j'intègre

MÉTHODES ET EXERCICES

MPSI

Jean-Marie Monier
Guillaume Haberer
Cécile Lardon

Mathématiques
méthodes et exercices

DUNOD

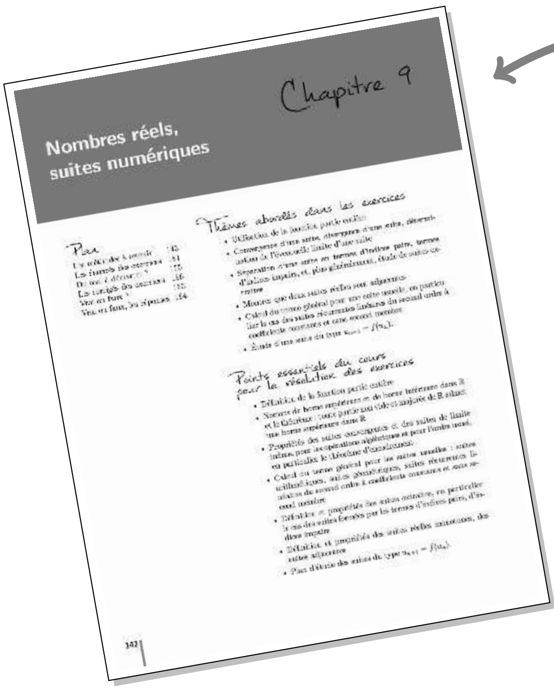
Conception et création de couverture : Atelier 3+

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-073024-7

Table des matières

Pour bien utiliser cet ouvrage


Chapitre 9

Nombres réels, suites numériques

Plan

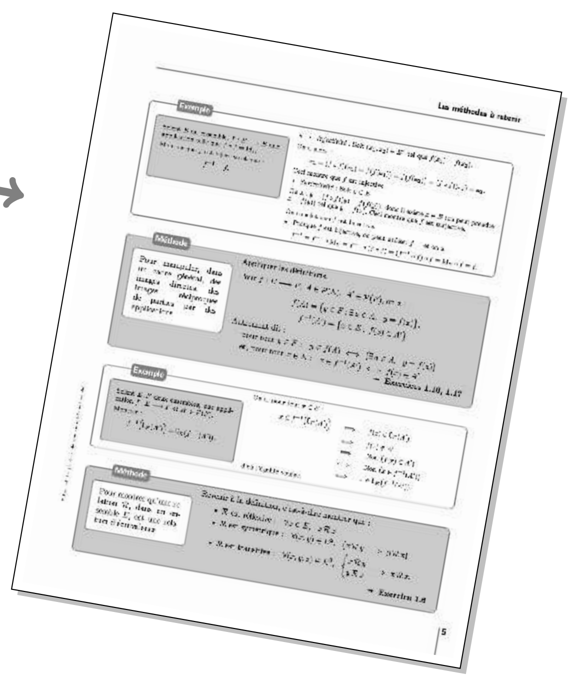
Thèmes abordés dans les exercices

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

342

La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.


Les méthodes à retenir

Exemple

Méthode

Exemple

Méthode

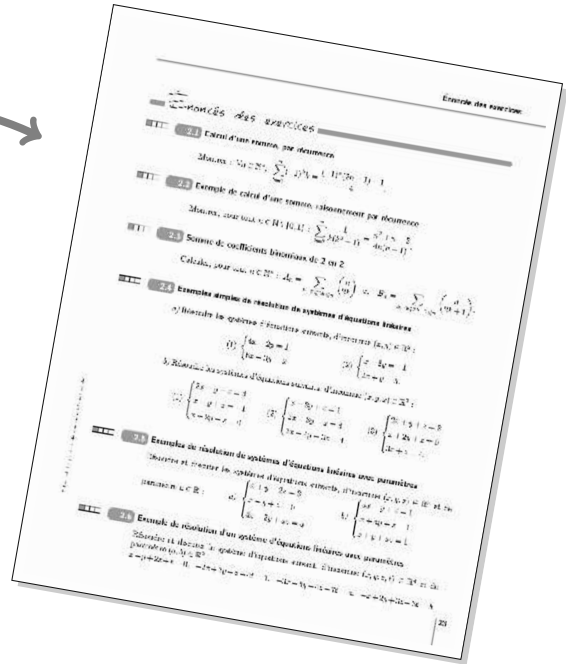
5

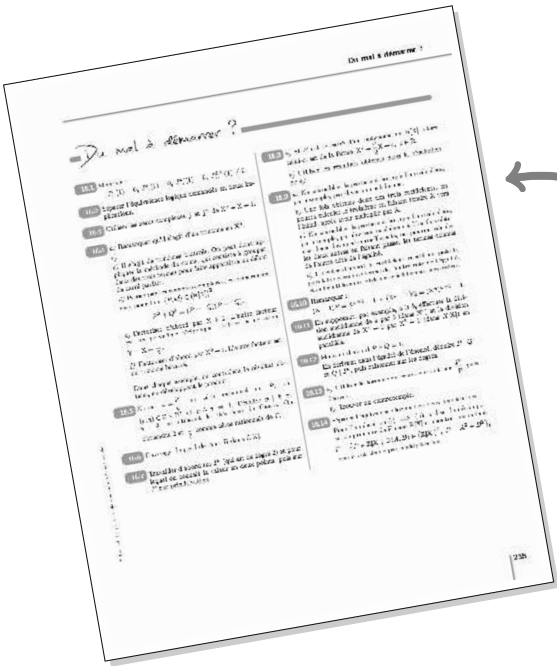
Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.
Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.

Énoncés des exercices

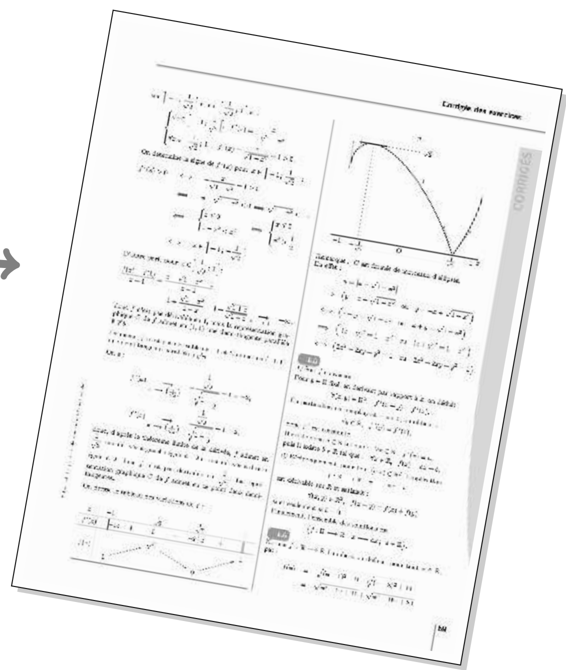
De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.





Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.



Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Marc Albrecht, Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Chapitre 1

Raisonnement, vocabulaire ensembliste

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en oeuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles, $\cap$, $\cup$, $\complement_E$, $\setminus$
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application
- Relations d'équivalence, relations d'ordre.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

➟ **Exercices 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.16 à 1.18**

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer : $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

On a :

$$\begin{aligned}
(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \overline{C}) \setminus (B \cap \overline{C}) \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\
&= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\
&= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
&= A \cap (\overline{B \cup C}) \\
&= A \setminus (B \cup C).
\end{aligned}$$

Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble

➟ **Exercices 1.2, 1.7, 1.8, 1.12, 1.18**

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer :
$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

On a :

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
&= A \cap \overline{B \cap C} \\
&= A \setminus (B \cap C).
\end{aligned}$$

Exemple

Montrer :

$$\{y \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in [-1\,;\,2],\ \ y = x^2\} = [0\,;\,4].$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in [-1\,;\,2]$ tel que $y = x^2$.

Si $x \in [-1\,;\,0]$, alors $y \in [0\,;\,1]$.
Si $x \in [0\,;\,2]$, alors $y \in [0\,;\,4]$.
On déduit $y \in [0\,;\,4]$.

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

- Réciproquement, soit $y \in [0\,;\,4]$.

En notant $x = \sqrt{y}$, on a $x \in [0\,;\,2] \subset [-1\,;\,2]$ et $y = x^2$.

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

Méthode

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.5**

Exemple

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$,
donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\
&= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\
&= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\
&= -(-1)^n \ = \ (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.10**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et, pour $n = 2$, on a $u_2 = \dfrac{u_1 + u_0}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour n et $n + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\dfrac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n + 2$.

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n_0), ..., \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.11**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $0 < u_1 \leqslant 1$ car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad 0 < u_k \leqslant 1.$$

On a alors : $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} > \dfrac{0 + \cdots + 0}{n^n} = 0$

et $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} \leqslant \dfrac{1 + \cdots + 1}{n^n} = \dfrac{n}{n^n} = \dfrac{1}{n^{n-1}} \leqslant 1.$

Ceci montre, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant 1$.

Méthode

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

Essayer de :

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.14 (en le redémontrant).

➟ **Exercices 1.3, 1.14, 1.15**

Exemple

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que f est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

$\star$ • *Injectivité :* Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que f est injective.

• *Surjectivité :* Soit $y \in E$.

On a : $y = (f \circ f)(y) = f\big(f(y)\big)$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective.

On conclut que f est bijective.

$\star$ Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

Méthode

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.

Pour $f : E \longrightarrow F$, $A \in \mathcal{P}(E)$, $A' \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$f(A) = \big\{y \in F\,;\ \exists\, a \in A,\quad y = f(x)\big\},$$

$$f^{-1}(A') = \big\{x \in E\,;\ f(x) \in A'\big\}.$$

Autrement dit :

pour tout $y \in F$: $\quad y \in f(A) \iff \big(\exists\, a \in A,\quad y = f(a)\big)$

et, pour tout $x \in E$: $\quad x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'$.

➟ **Exercices 1.16, 1.17**

Exemple

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \longrightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.

Montrer :

$$f^{-1}\Big(\complement_F(A')\Big) = \complement_E\big(f^{-1}(A')\big).$$

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\complement_F(A')\Big) &\iff f(x) \in \complement_F(A') \\ &\iff f(x) \notin A' \\ &\iff \text{Non } \big(f(x) \in A'\big) \\ &\iff \text{Non } \big(x \in f^{-1}(A')\big) \\ &\iff x \in \complement_E\big(f^{-1}(A')\big), \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E, est une relation d'équivalence

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\quad \forall x \in E,\quad x\,\mathcal{R}\,x$
- $\mathcal{R}$ est symétrique : $\quad \forall (x, y) \in E^2,\quad \big(x\,\mathcal{R}\,y \implies y\,\mathcal{R}\,x\big)$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\quad \forall (x, y, z) \in E^3,\quad \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{R}\,z \end{cases} \implies x\,\mathcal{R}\,z.$

➟ **Exercice 1.6**

Exemple

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \iff |x| = |y|\big).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

⋆ • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |x|$, d'où $x \,\mathcal{R}\, x$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

• On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y \,\mathcal{R}\, x,$$

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

• On a, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x \,\mathcal{R}\, z,$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$ est :

$$\widehat{x} = \{y \in \mathbb{R}\,;\ x \,\mathcal{R}\, y\} = \{y \in \mathbb{R}\,;\ |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E, est une relation d'ordre

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E, \quad x \,\mathcal{R}\, x$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique : $\forall (x,y) \in E^2, \quad \left(\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, x \end{cases} \implies x = y\right)$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad \left(\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{cases} \implies x \,\mathcal{R}\, z\right).$

➟ **Exercices 1.9, 1.13**

Exemple

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\leqslant$ la relation définie dans E par, pour toutes $f, g \in E$:

$$f \leqslant g \iff \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)\big).$$

Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans E. Cet ordre est-il total ?

⋆ • On a, pour toute $f \in E$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant f(x)$,
d'où $f \leqslant f$, donc $\leqslant$ est réflexive.

• On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant f \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \leqslant f(x) \end{cases}$$
$$\iff \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x)\big) \iff f = g,$$

donc $\leqslant$ est antisymétrique.

• On a, pour toutes $f, g, h \in E$:

$$\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant h \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \leqslant h(x) \end{cases}$$
$$\implies \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant h(x)\big) \iff f \leqslant h,$$

donc $\leqslant$ est transitive.

Ceci montre que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans E.

⋆ Considérons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 0$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x$.

On a $f(1) = 0 < 1 = g(1)$, donc on n'a pas $g \leqslant f$.

On a $f(1) = 0 > -1 = g(-1)$, donc on n'a pas $f \leqslant g$.

On conclut que l'ordre $\leqslant$ sur E n'est pas total.

Énoncés des exercices

1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient E un ensemble, A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$.

a) Montrer : $(A \cup B) \cap C \ \subset \ A \cup (B \cap C)$.

b) Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si : $A \subset C$.

1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \complement_E(B) = A \cap \complement_E(C).$$

1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

a) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.

b) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1 + x, \qquad g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$

c) $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ et $L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$.

1.6 Exemple de relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 - 2x = y^2 - 2y\big).$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

1.7 Réunion ou intersection de produits cartésiens

Soient E, F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E, B_1, B_2 des parties de F.

a) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) A-t-on nécessairement : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

1.8 Études de $\mathcal{P}(E \cap F)$ et de $\mathcal{P}(E \cup F)$

a) Montrer : $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

b) Établir : $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

c) A-t-on : $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

1.9 Exemple de relation d'ordre sur les entiers

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}^*$ par : $x \,\mathcal{R}\, y \iff \big(\exists\, n \in \mathbb{N}^*, \quad y = x^n\big)$.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est un ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) Est-ce que $\mathcal{R}$ est total ?

1.10 Exemple de raisonnement par récurrence à deux pas

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

1.11 Exemple de raisonnement par récurrence forte

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.12 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction indicatrice de A est l'application

$$\mathbf{1}_A : E \longmapsto \{0,1\}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A. \end{cases}$$

On note 1 l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}$ constante égale à 1.

a) Montrer, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A,$$

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

b) En déduire, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $\quad A \cap (A \cup B) = A \quad$ et $\quad A \cup (A \cap B) = A$.

1.13 Exemple de relation d'ordre sur un ensemble de fonctions

On note E l'ensemble des applications $f : [0\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables, telles que $f(0) = 1$, et on note $\mathcal{R}$ la relation définie dans E par, pour tout $(f, g) \in E^2$:

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f' \leqslant g'.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.

b) Est-ce que l'ordre $\mathcal{R}$ est total ?

c) Montrer : $\qquad \forall (f,g) \in E^2, \quad \big(f \,\mathcal{R}\, g \implies f \leqslant g\big).$

d) A-t-on : $\qquad \forall (f,g) \in E^2, \quad \big(f \leqslant g \implies f \,\mathcal{R}\, g\big)$?

1.14 Composée injective, composée surjective

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Montrer :

a) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

b) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

c) si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

1.15 Conséquences de la bijectivité d'une certaine composée

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ des applications.

On suppose que $g \circ f \circ g$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.14

1.16 Images directes de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A, B de E :

a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b) $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

1.17 Images réciproques de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A', B' de E :

a) $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

b) $f\big(f^{-1}(A')\big) \subset A'$

c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.18 Différence symétrique, associativité

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A, B de E :

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

appelée *différence symétrique* de A et B.

a) Deux exemples : Déterminer $A \vartriangle B$ dans les deux exemples suivants :

1) $E = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 3\}$

2) $E = \mathbb{R}, \quad A =]-\infty\,; 2], \quad B = [1\,; +\infty[$.

b) Établir : $\forall (A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2, \quad A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

c) Montrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$: $\mathbf{1}_{A \vartriangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

d) En déduire que la loi $\vartriangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall (A, B, C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3, \quad (A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C).$$

Du mal à démarrer ?

1.1 *a)* Utiliser la distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

b) Séparer l'équivalence logique en deux implications.

1.2 *Première méthode :*

Noter A',... le complémentaire de A, ... dans E et raisonner par équivalences logiques en passant aux complémentaires.

Deuxième méthode :

Supposer $A \cap B = A \cap C$.

• Partir d'un élément quelconque x de $A \cap \complement_E(B)$ et raisonner par l'absurde.

• L'autre inclusion s'en déduit en échangeant B et C.

1.3 *a)* $a = 2$. *b)* $b = 3$.

c) À partir de $y = f(x)$, calculer x en fonction de y.

1.4 Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$, et trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que ces deux résultats soient différents.

1.5 Récurrence (faible) sur n, pour chacune des trois questions.

Pour *c)*, utiliser *a)*.

1.6 *a)* Revenir à la définition d'une relation d'équivalence.

Noter $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x^2 - 2x$, pour la commodité.

b) Revenir à la définition de la classe d'équivalence $\widehat{x}$ de x modulo $\mathcal{R}$: $\forall y \in \mathbb{R},\ \ \big(y \in \widehat{x} \iff x\,\mathcal{R}\,y\big)$.

1.7 *a)* Raisonner par équivalences logiques successives, en partant de $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.

b) *1)* Même méthode qu'en *a)*.

2) Envisager un élément de $A_1 \times B_2$.

1.8 *a)* Séparer l'équivalence logique en deux implications.

1) Supposer $E \subset F$. Alors, toute partie de E est une partie de F.

2) Réciproquement, supposer $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$. Pour montrer que tout élément x de E est élément de F, penser à considérer le singleton $\{x\}$.

b) Raisonner par équivalences logiques.

c) Montrer, par un contrexemple, qu'il se peut que $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ ne soient pas égaux.

1.9 *a)* Revenir à la définition d'une relation d'ordre.

b) Envisager les éléments 1 et 2 de $\mathbb{N}^*$, par exemple.

1.10 Récurrence à deux pas sur n.

1.11 Récurrence forte sur n.

1.12 *a)* • Un sens est évident.

Réciproquement, supposer $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ et partir d'un élément quelconque a de A, pour montrer $A \subset B$.

• Pour $x \in E$, séparer en cas : $x \in A$, $x \notin A$.

• Pour $x \in E$, séparer en cas : $x \in A \cap B$, $x \notin A \cap B$.

• Passer aux complémentaires à partir du résultat précédent.

• Utiliser les résultats précédents.

b) Calculer $\mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)}$ et $\mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)}$.

1.13 *a)* Revenir à la définition d'une relation d'ordre.

b) Envisager f, g de façon que $f - g$ ne soit ni croissante ni décroissante.

c) Remarquer que, si $f\,\mathcal{R}\,g$, alors $f - g$ est décroissante et se rappeler que $f(0) = g(0)$.

d) Envisager f, g de façon que $f \leqslant g$ mais que $f - g$ ne soit pas décroissante.

1.14 *a)* Revenir aux définitions.

b) Revenir aux définitions.

c) Se déduit directement de *a)* et *b)*.

1.15 Appliquer le résultat de l'exercice 1.14, en groupant en $(g \circ f) \circ g$ ou en $g \circ (f \circ g)$.

1.16 *a)* Supposer $A \subset B$.

Partir d'un élément quelconque y de $f(A)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f.

b) Partir de $a \in A$ et utiliser les définitions.

c) • Montrer, en utilisant *a)* :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

• Réciproquement, partir de $y \in f(A \cup B)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f.

d) Utiliser *a)*.

1.17 *a)* Supposer $A' \subset B'$.

Partir d'un éléments quelconque x de $f^{-1}(A')$ et utiliser la définition de l'image réciproque d'une partie de F par f.

b) Partir de $y \in f\big(f^{-1}(A')\big)$ et utiliser les définitions.

c) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cup B')$ et en appliquant les définitions.

d) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cap B')$ et en appliquant les définitions.

1.18 *a)* Réponses :

1) $A \vartriangle B = \{2, 3\}$,

2) $A \vartriangle B =]-\infty\,;\,1[\cup]2\,;\,+\infty[$.

b) Calculer $A \vartriangle B$ d'après sa définition, en utilisant les formules sur le calcul sur les ensembles.

c) Utiliser *b)* et les formules sur les fonctions caractéristiques (cf. Exercice 1.12).

En particulier, pour tous ensembles X, Y :

$$\mathbf{1}_{\overline{X}} = 1 - \mathbf{1}_X, \quad \mathbf{1}_{X\,\cap\,Y} = \mathbf{1}_X\mathbf{1}_Y,$$

$$\mathbf{1}_{X\,\cup\,Y} = \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y - \mathbf{1}_X\mathbf{1}_Y.$$

d) Calculer les fonctions caractéristiques des deux membres.

Corrigés des exercices

1.1

a) On a, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (\underbrace{A \cap C}_{\subset A}) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

b) • Supposons $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

Soit $x \in A$.

Alors, $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, donc $x \in C$.

Ceci montre : $A \subset C$.

• Réciproquement, supposons $A \subset C$.

On a alors, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (\underbrace{A \cap C}_{= A}) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C).$$

On conclut qu'il y a égalité dans l'inclusion obtenue en *a)* si et seulement si $A \subset C$.

1.2

Première méthode, par les ensembles globalement :

Notons A',... le complémentaire de A,... dans E.

1) On a :

$$\begin{aligned}
& A \cap B = A \cap C \\
\Longrightarrow\quad & (A \cap B)' = (A \cap C)' \\
\Longleftrightarrow\quad & A' \cup B' = A' \cup C' \\
\Longrightarrow\quad & A \cap (A' \cup B') = A \cap (A' \cup C') \\
\Longleftrightarrow\quad & (A \cap A') \cup (A \cap B') = (A \cap A') \cup (A \cap C') \\
\Longleftrightarrow\quad & A \cap B' = A \cap C'.
\end{aligned}$$

2) On applique le résultat précédent à (B', C') à la place de (B, C) et on obtient l'implication réciproque.

Deuxième méthode, par les éléments :

On suppose $A \cap B = A \cap C$.

• Soit $x \in A \cap \complement_E(B)$. Alors, $x \in A$ et $x \notin B$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $x \in C$.

Alors, $x \in A \cap C = A \cap B$, donc $x \in B$, contradiction.

Ceci montre $x \notin C$, donc $x \in \complement_E(C)$, puis $x \in A \cap \complement_E(C)$.

On a ainsi montré : $A \cap \complement_E(B) \subset A \cap \complement_E(C)$.

• Par rôles symétriques de B et C dans $A \cap B = A \cap C$, on a aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité.

1.3

a) Il est clair que : $a = 2$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} &\iff xy - 2y = 3x - 1 \\
\iff xy - 3x = 2y - 1 &\iff (y-3)x = 2y - 1.
\end{aligned}$$

Si $y \neq 3$, on a : $y = f(x) \iff x = \dfrac{2y-1}{y-3}$

donc y admet un antécédent et un seul par f, qui est $\dfrac{2y-1}{y-3}$.

Si $y = 3$, alors : $y = f(x) \iff 0x = 5$,

donc y n'a pas d'antécédent par f.

Il existe donc un réel et un seul, $b = 3$, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) L'application $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x-2}$

est la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ à l'arrivée.

On a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{3\})$:

$$y = g(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff x = \frac{2y-1}{y-3}.$$

Ainsi, tout élément y de l'arrivée admet un antécédent et un seul par g, donc g est bijective, et l'application réciproque de g est : $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad y \longmapsto \dfrac{2y-1}{y-3}$.

1.4

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 1 + x^2 \\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(1+x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2. \end{cases}$$

• Par exemple : $(f \circ g)(1) = 2$ et $(g \circ f)(1) = 4$,
donc : $f \circ g \neq g \circ f$.

1.5

a) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a :

$$L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = L_1^2 - L_0 L_2 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5$$

et $$5(-1)^{n+1} = -5,$$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} & L_{n+2}^2 - L_{n+1}L_{n+3} \\ = \ & L_{n+2}^2 - L_{n+1}(L_{n+2} + L_{n+1}) \\ = \ & (L_{n+2}^2 - L_{n+1}L_{n+2}) - L_{n+1}^2 \\ = \ & L_{n+2}(L_{n+2} - L_{n+1}) - L_{n+1}^2 \\ = \ & L_{n+2}L_n - L_{n+1}^2 \\ = \ & -(L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2}) \\ = \ & -\big(5(-1)^{n+1}\big) \ = \ 5(-1)^{n+2}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$: $$\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_0^2 = 2^2 = 4,$$

et : $$L_n L_{n+1} + 2 = L_0 L_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4,$$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{n} L_k^2\Big) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_n L_{n+1} + 2) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_n L_{n+1} + L_{n+1}^2) + 2 \\ &= L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) + 2 \ = \ L_{n+1}L_{n+2} + 2, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$: $$\begin{cases} L_{2n} = L_0 = 2 \\ L_n^2 - 2(-1)^n = 2^2 - 2 = 2 \end{cases}$$

et $$\begin{cases} L_{2n+1} = L_1 = 1 \\ L_n L_{n+1} - (-1)^n = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \end{cases}$$

donc la formule (système de deux formules) est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} L_{2n+2} &= L_{2n+1} + L_{2n} \\ &= \big(L_n L_{n+1} - (-1)^n\big) + \big(L_n^2 - 2(-1)^n\big) \\ &= (L_n L_{n+1} + L_n^2) - 3(-1)^n \\ &= L_n(L_{n+1} + L_n) - 3(-1)^n \\ &= L_n L_{n+2} - 3(-1)^n \\ &= \big(L_{n+1}^2 - 5(-1)^{n+1}\big) - 3(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2 + 2(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{2n+3} &= L_{2n+2} + L_{2n+1} \\ &= \big(L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1}\big) + \big(L_n L_{n+1} - (-1)^n\big) \\ &= L_{n+1}\big(L_{n+1} + L_n\big) - (-1)^{n+1} \\ &= L_{n+1}L_{n+2} - (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6

a) Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ x \longmapsto x^2 - 2x$.

1) Réflexivité :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x)$, donc $x \, \mathcal{R} \, x$.

2) Symétrie :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \, \mathcal{R} \, y$.
On a alors $f(x) = f(y)$, donc $f(y) = f(x)$, d'où $y \, \mathcal{R} \, x$.

3) Transitivité :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \, \mathcal{R} \, y$ et $y \, \mathcal{R} \, z$.
On a alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, donc $f(x) = f(z)$, d'où $x \, \mathcal{R} \, z$.

On conclut : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Notons $\widehat{x}$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $y \in \widehat{x}$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad x \, \mathcal{R} \, y \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x = y^2 - 2y \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x - y)(x + y - 2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(y = x \ \text{ ou } \ y = 2 - x\big). \end{aligned}$$

On conclut : $$\widehat{x} = \begin{cases} \{1\} & \text{si } \ x = 1 \\ \{x, \, 2 - x\} & \text{si } \ x \neq 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\widehat{x}$ est de cardinal 1 si $x = 1$, de cardinal 2 si $x \neq 1$.

1.7

a) On a, pour tout $(a,b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned} & (a,b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\ \iff & \big((a,b) \in A_1 \times B_1 \ \text{ et } \ (a,b) \in A_2 \times B_2\big) \\ \iff & \big(a \in A_1 \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \ \text{ et } \ \big(a \in A_2 \ \text{ et } \ b \in B_2\big) \\ \iff & \big(a \in A_1 \ \text{ et } \ a \in A_2\big) \ \text{ et } \ \big(b \in B_1 \ \text{ et } \ b \in B_2\big) \\ \iff & \big(a \in A_1 \cap A_2 \ \text{ et } \ b \in B_1 \cap B_2\big) \\ \iff & (a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2), \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) On a, pour tout $(a,b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned} & (a,b) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) \\ \iff & \big((a,b) \in A_1 \times B_1 \ \text{ ou } \ (a,b) \in A_2 \times B_1\big) \\ \iff & \big((a \in A_1 \ \text{ ou } \ a \in A_2) \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \\ \iff & \big(a \in A_1 \cup A_2 \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \\ \iff & (a,b) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1, \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) L'ensemble $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ contient, entre autres, les couples (a,b) où $a \in A_1$ et $b \in B_2$, et ces couples ne sont pas nécessairement dans $A_1 \times B_1$ ou $A_2 \times B_2$.

Donnons un contrexemple.

Notons $E = F = \{0,1\}$, $A_1 = B_1 = \{0\}$, $A_2 = B_2 = \{0,1\}$.

On a alors : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$

et $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \{0,1\} \times \{0,1\}$
$= \big\{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\big\}$.

Ainsi, $(0,1)$ est dans le premier ensemble et non dans le second.

On conclut qu'en général il n'y a pas égalité entre les deux ensembles envisagés.

1.8

a) 1) Supposons $E \subset F$.

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a : $\forall x \in X, \quad x \in E \subset F$, donc : $X \subset F$, c'est-à-dire : $X \in \mathcal{P}(F)$.

Ceci montre : $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

On a établi : $E \subset F \implies \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

2) Réciproquement, supposons $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Soit $x \in E$. Considérons le singleton $\{x\}$, c'est-à-dire l'ensemble à un élément formé par x tout seul.

On a : $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, donc : $x \in F$.

Ceci montre : $E \subset F$.

On a établi : $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F) \implies E \subset F$.

On conclut à l'équivalence logique :

$$E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F).$$

b) On a, pour tout ensemble X :

$$X \in \mathcal{P}(E \cap F) \iff X \subset E \cap F \iff \begin{cases} X \subset E \\ X \subset F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X \in \mathcal{P}(E) \\ X \in \mathcal{P}(F) \end{cases} \iff X \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F),$$

et on conclut : $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

c) 1) On a, pour tout ensemble X :

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) & \iff \big(X \subset E \ \text{ ou } \ X \subset F\big) \\ & \implies X \in E \cup F \iff X \in \mathcal{P}(E \cup F), \end{aligned}$$

ce qui montre : $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

2) Mais la réciproque est en général fausse. En effet, si un ensemble X est inclus dans une réunion $E \cup F$, cela n'entraîne pas, en général, que X soit inclus dans E ou que X soit inclus dans F. En effet, X peut contenir des éléments de E qui ne sont pas dans F et des éléments de F qui ne sont pas dans E.

Pour montrer la non-inclusion, donnons un contrexemple : $E = \{1\}$, $F = \{2\}$. On a ici :

$$\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(\{1,2\}) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\},$$

$$\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \big\{\varnothing, \{1\}\big\} \cup \big\{\varnothing, \{2\}\big\} = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\big\}.$$

Dans cet exemple, on n'a pas égalité entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

1.9

a) 1) Réflexivité :

On a, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $x \,\mathcal{R}\, x$, car $x = x^1$.

2) Antisymétrie :

Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, x$.
Il existe $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $x = y^p$.
On a $x \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $x \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, d'où $x^n \geqslant x$, donc $y = x^n \geqslant x$.
De même, $x \geqslant y$, et on déduit $x = y$.

3) Transitivité :

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$.
Il existe $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $z = y^p$.
On a alors : $z = y^p = (x^n)^p = x^{np}$ et $np \in \mathbb{N}^*$, donc $x \,\mathcal{R}\, z$.

On conclut : $\mathcal{R}$ est un ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) On n'a ni $1 \,\mathcal{R}\, 2$, car il n'existe pas $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 = 1^n$, ni $2 \,\mathcal{R}\, 1$, car il n'existe pas $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 = 2^n$.

On conclut : $\mathcal{R}$ n'est pas total.

1.10

Puisque u_{n+2} est donné en fonction de u_{n+1} et de u_n, on va effectuer une récurrence à deux pas.

• *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a $u_1 > u_0$, car $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.

Pour $n = 1$, on a $u_2 > u_1$,

car $u_1 = 1$ et $u_2 = \dfrac{u_1 + u_0}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$.

• *Hérédité :*

Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_{n+1} > u_n$ et $u_{n+2} > u_{n+1}$. On a alors :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1}}{2} + 1 > \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1 = u_{n+2}.$$

Ceci montre, par récurrence à deux pas sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n.$$

On conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

1.11

Puisque u_{n+1} est donné (entre autres) en fonction de $u_0, ..., u_n$, on va effectuer un raisonnement par récurrence forte.

• *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}_+^*$.

• *Hérédité :*

Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé : $u_0, ..., u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Comme $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}$, que $u_0, ..., u_n$ sont dans $\mathbb{Q}_+^*$ et que $0!, 1!, ..., n!$ sont dans $\mathbb{N}^*$, par opérations, on déduit : $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_+^*$.

On conclut, par récurrence forte sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.12

a) • Il est clair que, si $A = B$, alors $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Réciproquement, supposons $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Pour tout $a \in A$, on a $\mathbf{1}_B(a) = \mathbf{1}_A(a) = 1$, donc $a \in B$, ce qui montre $A \subset B$, puis, de même, $B \subset A$, donc $A = B$.

On conclut : $A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Autrement dit, la connaissance de $\mathbf{1}_A$ détermine entièrement A.

• On a, pour tout $x \in E$:
si $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 0$, d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$
si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 0$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

On conclut : $\quad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.

• On a, pour tout $x \in E$:

si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$, $\mathbf{1}_A(x) = 1$, $\mathbf{1}_B(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$

si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$ et $\big(\mathbf{1}_A(x) = 0 \text{ ou } \mathbf{1}_B(x) = 0\big)$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

• On a, en passant par des complémentaires et en utilisant des résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \cup B} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A \cup B}} \\
&= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} \\
&= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}}\mathbf{1}_{\overline{B}} \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.
\end{aligned}$$

• On a :

$$\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_{A \cap \overline{B}} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\overline{B}} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

b) On a, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A \cup B} &= \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A,
\end{aligned}$$

donc, d'après *a)* : $A \cap (A \cup B) = A$.

De même :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A \cap B} - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A \cap B} \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A,
\end{aligned}$$

donc, d'après *a)* : $A \cup (A \cap B) = A$.

On peut aussi remarquer que, puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \cap (A \cup B) = A$, et que, puisque $A \cap B \subset A$, on a $A \cup (A \cap B) = A$.

1.13

a) 1) Réflexivité :

Soit $f \in E$. On a $f' \leqslant f'$, donc $f \,\mathcal{R}\, f$.

2) Antisymétrie :

Soit $(f, g) \in E^2$ tel que $f \,\mathcal{R}\, g$ et $g \mathcal{R} f$.

On a alors $f' \leqslant g'$ et $g' \leqslant f'$, donc $f' = g'$. Ainsi, $f - g$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$ et $(f - g)' = 0$, donc $f - g$ est constante.

Comme $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 1 - 1 = 0$, on déduit $f - g = 0$, donc $f = g$.

3) Transitivité :

Soit $(f, g, h) \in E^3$ tel que $f \,\mathcal{R}\, g$ et $g \,\mathcal{R}\, h$.

On a alors $f' \leqslant g'$ et $g' \leqslant h'$, donc $f' \leqslant h'$, d'où $f \,\mathcal{R}\, h$.

On conclut : $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans E.

b) Pour montrer que l'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total, il suffit de trouver $f, g \in E$ telles que l'on n'ait ni $f' \leqslant g'$ ni $g' \leqslant f'$, c'est-à-dire telles que $f - g$ ne soit ni croissante ni décroissante.

Il est clair que les applications $f, g : [0\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, par $f(x) = 1 + x$ et $g(x) = 1 + x^2$ conviennent.

On conclut que l'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total.

c) Soit $(f, g) \in E^2$ tel que $f \,\mathcal{R}\, g$.

On a alors $f' \leqslant g'$, donc $(f - g)' \leqslant 0$, donc $f - g$ est décroissante.

Comme $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 1 - 1 = 0$, on déduit $f - g \leqslant 0$, donc $f \leqslant g$.

d) Donnons un contrexemple, dans lequel $f \leqslant g$ et non $f \mathcal{R} g$.

Il suffit de trouver deux applications f, g, dérivables, telles que : $f(0) = g(0) = 1$, $f \leqslant g$ et $f - g$ non décroissante.

Considérons les applications $f, g : [0\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, par :

$$f(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 1 + \sin^2 x.$$

Il est clair que f et g sont dérivables sur $[0\,;+\infty[$, que $f(0)=g(0)=1$, que $f\leqslant g$.

De plus : $\forall x\in[0\,;+\infty[,\quad f'(x)=0$ et $g'(x)=2\sin x\cos x$.

En particulier :

$$f'\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)=0 \quad \text{et} \quad g'\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)=2\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=1,$$

donc on n'a pas $f'\leqslant g'$, donc non $f\,\mathcal{R}\,g$.

1.14

a) Supposons $g\circ f$ injective.

Soit $(x_1,x_2)\in E^2$ tel que $f(x_1)=f(x_2)$. On a alors :

$$g\circ f(x_1)=g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)=g\circ f(x_2).$$

Puisque $g\circ f$ est injective, il s'ensuit : $x_1=x_2$.

On conclut que f est injective.

b) Supposons $g\circ f$ surjective.

Soit $z\in G$. Puisque $g\circ f$ est surjective, il existe $x\in E$ tel que : $z=g\circ f(x)$.

On a alors : $\qquad z=g\big(f(x)\big)$ et $f(x)\in F$.

Ceci montre : $\forall z\in G,\ \exists y\in F,\quad z=g(y)$.

On conclut que g est surjective.

c) Si $g\circ f$ est bijective, alors $g\circ f$ est injective et surjective, donc, d'après *a)* et *b)*, f est injective et g est surjective.

1.15

Schématiquement, en utilisant le résultat de l'exercice 1.14, on a :

$$g\circ f\circ g \ \text{ bijective} \iff \begin{cases} g\circ f\circ g & \text{injective} \\ g\circ f\circ g & \text{surjective}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(g\circ f)\circ g & \text{injective} \\ g\circ(f\circ g) & \text{surjective}\end{cases} \implies \begin{cases} g & \text{injective} \\ g & \text{surjective}\end{cases}$$

$$\implies g \ \text{ bijective}\,.$$

Ceci montre que g est bijective.

On peut donc considérer l'application réciproque g^{-1} de g. On a alors : $\qquad f=g^{-1}\circ(g\circ f\circ g)\circ g^{-1}$,
qui est la composée de trois applications bijectives, donc f est bijective.

Finalement, f et g sont bijectives.

1.16

a) Supposons $A\subset B$.

Soit $y\in f(A)$. Il existe $a\in A$ tel que $y=f(a)$.
Comme $a\in A\subset B$, on a $a\in B$, puis $y=f(a)\in f(B)$.

On obtient : $f(A)\subset f(B)$.

b) Soit $a\in A$. On a : $f(a)\in f(A)$, donc par définition d'une image réciproque, $a\in f^{-1}\big(f(A)\big)$.

On conclut : $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

c) • En utilisant *a)* :

$$\begin{cases} A\subset A\cup B \\ B\subset A\cup B\end{cases} \implies \begin{cases} f(A)\subset f(A)\cup f(B) \\ f(B)\subset f(A)\cup f(B)\end{cases}$$

$$\implies f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B).$$

• Soit $y\in f(A\cup B)$.
Il existe $x\in A\cup B$ tel que $y=f(x)$.
On a : $x\in A$ ou $x\in B$.
Si $x\in A$, alors $f(x)\in f(A)\subset f(A)\cup f(B)$.
Si $x\in B$, alors $f(x)\in f(B)\subset f(A)\cup f(B)$.

On a donc : $f(x)\in f(A)\cup f(B)$.

Ceci montre : $\forall(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.

On conclut : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

d) En utilisant *a)* :

$$\begin{cases} A\cap B\subset A \\ A\cap B\subset B\end{cases} \implies \begin{cases} f(A\cap B)\subset f(A) \\ f(A\cap B)\subset f(B)\end{cases}$$

$$\implies f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B).$$

1.17

a) Supposons $A'\subset B'$.

Soit $x\in f^{-1}(A')$.
On a $f(x)\in A'$, donc $f(x)\in B'$, puis $x\in f^{-1}(B')$.

On conclut : $\qquad f^{-1}(A')\subset f^{-1}(B')$.

b) Soit $y\in f\big(f^{-1}(A')\big)$.
Il existe $x\in f^{-1}(A')$ tel que $y=f(x)$.
Puis, comme $x\in f^{-1}(A')$, on a $f(x)\in A'$, donc $y\in A'$.

On conclut : $\qquad f\big(f^{-1}(A')\big)\subset A'$.

c) On a, pour tout $x\in E$:

$$\begin{aligned} & x\in f^{-1}(A'\cup B') \\ \iff\ & f(x)\in A'\cup B' \\ \iff\ & \big(f(x)\in A' \quad \text{ou} \quad f(x)\in B'\big) \\ \iff\ & \big(x\in f^{-1}(A') \quad \text{ou} \quad x\in f^{-1}(B')\big) \\ \iff\ & x\in f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B').\end{aligned}$$

On conclut : $f^{-1}(A'\cup B')=f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$.

d) On a, pour tout $x\in E$:

$$\begin{aligned} & x\in f^{-1}(A'\cap B') \\ \iff\ & f(x)\in A'\cap B' \\ \iff\ & \big(f(x)\in A' \quad \text{et} \quad f(x)\in B'\big) \\ \iff\ & \big(x\in f^{-1}(A') \quad \text{et} \quad x\in f^{-1}(B')\big) \\ \iff\ & x\in f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B').\end{aligned}$$

On conclut : $f^{-1}(A'\cap B')=f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$.

1.18

a) 1) Pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, on a :

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{1\},$$
$$\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4\}, \quad A \vartriangle B = \{2, 3\}.$$

2) Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty\,;2]$, $B = [1\,;+\infty[$, on a :

$$A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = [1\,;2],$$
$$\overline{A \cap B} =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[, \quad A \vartriangle B =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[.$$

b) On a, pour tout $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\begin{aligned} A \vartriangle B &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}). \end{aligned}$$

c) On a, pour tout $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \vartriangle B} &= \mathbf{1}_{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\overline{A}} - \underbrace{\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\overline{A}}}_{=0} \\ &= \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B. \end{aligned}$$

d) Soit $(A, B, C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(A \vartriangle B) \vartriangle C} &= \mathbf{1}_{A \vartriangle B} + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_{A \vartriangle B} \mathbf{1}_C \\ &= (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C - 2 \cdot (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) \mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \vartriangle (B \vartriangle C)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B \vartriangle C} - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B \vartriangle C} \\ &= \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) - 2 \cdot \mathbf{1}_A (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C. \end{aligned}$$

Ceci montre : $\quad \mathbf{1}_{(A \vartriangle B) \vartriangle C} = \mathbf{1}_{A \vartriangle (B \vartriangle C)}$.

On déduit : $\quad (A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$,

et on conclut que la loi $\vartriangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$.

Vrai ou Faux ?

1.1 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $A \cap B = \varnothing \iff B \subset \complement_E(A)$. V F

1.2 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. V F

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.4 $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.5 Si les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective. V F

1.6 Si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives. V F

1.7 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$. V F

1.8 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$, alors $f = \mathrm{Id}_E$. V F

1.9 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors : V F

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

1.10 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors : V F

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Vrai ou Faux, les réponses

1.1 $B \subset \complement_E(A) \iff \big(\forall x \in B,\ \ x \notin A\big) \iff \big(\text{Non}\ (\exists\, x \in B,\ \ x \in A)\big)$
$\iff \big(\text{Non}\,(A \cap B \neq \varnothing)\big) \iff A \cap B = \varnothing.$ **V**

1.2 Contrexemple : $E = \{1, 2\},\ A = \{1\},\ B = \{2\}$.
La formule correcte est : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. **F**

1.3 Par exemple, $y = x + 1$. **V**

1.4 Il n'existe pas de réel y fixé plus grand que tout réel x. **F**

1.5 C'est un résultat du cours. **V**

1.6 Contrexemple : $E = F = G = \mathbb{R},\ f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x},\ g : y \longmapsto |y|$.
On a alors $g \circ f : x \longmapsto |\,\mathrm{e}^{\,x}| = \mathrm{e}^{\,x}$, $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas. **F**

1.7 L'application f est injective, car, pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big)$, donc $x_1 = x_2$. **V**

L'application f est surjective car, pour tout $y \in E$, on a $y = f\big(f(y)\big)$.

Il en résulte que f est bijective, puis, en composant à gauche par f^{-1}, on obtient $f = f^{-1}$.

1.8 Contrexemple : $E = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto 0$. **F**

1.9 Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a alors $x \in A$ d'où $f(x) \in A$, ou $x \in B$ d'où $f(x) \in f(B)$, et donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. On obtient $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. **V**

Réciproquement, soit $y \in f(A) \cup f(B)$. On a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, d'où $x \in A \cup B$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(A \cup B)$. De même, si $y \in f(B)$, on déduit $y \in f(A \cup B)$. On obtient $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Par double inclusion, on conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

1.10 Contrexemple : $E = F = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x^2,\ A = \mathbb{R}_-,\ B = \mathbb{R}_+$. **F**

On a alors : $A \cap B = \{0\},\ f(A \cap B) = \{0\},\ f(A) = \mathbb{R}_+,\ f(B) = \mathbb{R}_+,\ f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$.

Calculs algébriques

Chapitre 2

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de sommations simples ou doubles, de produits simples ou doubles
- Manipulation des coefficients binomiaux, obtention d'égalités et calculs de sommes les faisant intervenir
- Résolution de systèmes linéaires.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés du symbole $\sum$ pour une sommation d'un nombre fini de termes, et du symbole $\prod$ pour un produit d'un nombre fini de facteurs
- Règles de calcul élémentaire sur les nombres entiers, sur les nombres réels
- Sommations usuelles : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$
- Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$, en particulier :
  - l'expression à l'aide de factorielles $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$,
  - la formule fondamentale $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$,
  - la formule du binôme de Newton
- Opérations élémentaires, méthode du pivot.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer certaines sommations indexées par un entier

- Si le résultat est fourni, essayer de raisonner par récurrence
- Essayer de se ramener aux sommations classiques :
  - la sommation géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\quad \sum_{q=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  - la sommation d'entiers, de carrés d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  - la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

- Essayer de faire apparaître un télescopage

➟ **Exercices 2.1 à 2.3, 2.7, 2.8, 2.14, 2.19 à 2.21**

Exemple

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1) = (-1)^n (n+1).$$

Récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, la formule proposée est évidente.
- Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (2k+1) = (-1)^n (n+1).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (2k+1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1) + (-1)^{n+1}(2n+3) \\
&= (-1)^n (n+1) + (-1)^{n+1}(2n+3) \\
&= (-1)^{n+1}\big(-(n+1) + (2n+3)\big) \\
&= (-1)^{n+1}(n+2),
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1).$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)\big((2n+1)+3\big)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

On remarque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$,

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Méthode

Pour calculer des sommations doubles, ou des produits doubles

Essayer de :

- emboîter deux sommations simples, emboîter deux produits simples
- utiliser une permutation de symboles $\sum$, une permutation de symboles $\prod$
- exploiter des rôles éventuellement symétriques des deux indices

➟ **Exercices 2.10, 2.12, 2.13, 2.17, 2.18, 2.21**

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (2i + 3j).$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2i + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 3j = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + 3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} i\Big(\sum_{j=1}^{n} 1\Big) + 3\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big) = 2\sum_{i=1}^{n} in + 3n\sum_{j=1}^{n} j \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n} i + 3n\sum_{j=1}^{n} j = 5n\sum_{i=1}^{n} i = \frac{5n^2(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Méthode

Pour calculer une sommation faisant intervenir des coefficients binomiaux

Essayer de :

- remplacer les coefficients binomiaux par leurs expressions à l'aide de factorielles
- utiliser la formule du binôme de Newton
- utiliser un raisonnement par récurrence, si l'énoncé donne la valeur de la sommation

➟ **Exercices 2.3, 2.14, 2.19, 2.20**

Exemple

Montrer, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2 \leqslant k \leqslant n$:

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} k(k-1)\binom{n}{k} &= k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k(k-1)}{k!}\,\frac{n!}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{(k-2)!}\,\frac{n!}{(n-k)!} \\ &= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!\big((n-2)-(k-2)\big)!} \\ &= n(n-1)\binom{n-2}{k-2}. \end{aligned}$$

Exemple

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k/2}$.

On applique la formule du binôme de Newton à 1 et $2^{1/2}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k/2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(2^{1/2})^k = (1+\sqrt{2})^n.$$

Méthode

Pour résoudre un système linéaire

- Utiliser une méthode de Gauss.
- Utiliser des combinaisons linéaires d'équations pour se ramener à un système équivalent plus simple.

➟ **Exercices 2.4 à 2.6**

Exemple

Résoudre le système d'équations, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 & L_1 \\ 2x - 3y = 8 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y = 1 & L_1 \\ 11x = 11 & L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Exemple

Résoudre le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ x + 4y + z = -1 \\ x + y + 4z = 8. \end{cases}$$

On a, en additionnant les trois égalités :

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} (\mathrm{S}) \\ 6(x + y + z) = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + y + z = 5 & L_1 \\ x + 4y + z = -1 & L_2 \\ x + y + 4z = 8 & L_3 \\ x + y + z = 2 & L_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x = 3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ 3y = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ 3z = 6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Énoncés des exercices

2.1 Calcul d'une somme, par récurrence

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$

2.2 Exemple de calcul d'une somme, raisonnement par récurrence

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}.$

2.3 Somme de coefficients binomiaux de 2 en 2

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = \displaystyle\sum_{k,\ 0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k,\ 0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}.$

2.4 Exemples simples de résolution de systèmes d'équations linéaires

a) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$(1)\ \begin{cases} 4x-2y=1 \\ 6x-3y=2 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x+y=5. \end{cases}$$

b) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$(1)\ \begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-y+z=-1 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-3y-z=3 \\ 3x-4y-3z=4 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+z=4. \end{cases}$$

2.5 Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires avec paramètres

Résoudre et discuter les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et de paramètre $a\in\mathbb{R}$:

$$a)\ \begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-y+z=0 \\ 4x-2y+az=a \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1. \end{cases}$$

2.6 Exemple de résolution d'un système d'équations linéaires avec paramètres

Résoudre et discuter le système d'équations suivant, d'inconnue $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et de paramètre $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$x-y+2z+t=0,\quad -2x+3y+z-4t=1,\quad -3x+5y+4z-7t=a,\quad -x+2y+3z-3t=b.$

2.7 Calcul d'une somme

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$.

2.8 Calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^3$

On note, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$: $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

a) Rappeler les valeurs de $S_p(n)$ pour $p \in \{0,1,2\}$.

b) En développant $(k+1)^4$ puis en sommant, déduire la valeur de $S_4(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.9 Calcul d'une somme par télescopage

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

2.10 Sommes de nombres harmoniques

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$, appelé k-ème nombre harmonique.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_k$ et $\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{H}_k$ en fonction de n et de H_n.

2.11 Calcul d'une somme contenant des factorielles

a) Décomposer linéairement le polynôme $P = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sur les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = \mathrm{X}$, $P_2 = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k!$.

2.12 Somme de minimums

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{Min}\,(i,j)$.

2.13 Exemple de calcul d'une somme double

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} 2^p$.

2.14 Une formule sur les coefficients binomiaux et un calcul de somme

a) Montrer, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k \leqslant n$: $\quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

2.15 Simplification d'un produit

Calculer, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$: $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \big(n(n+p) - k(k+p)\big)$.

2.16 Exemple d'utilisation d'une récurrence forte

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k^2\Big)^2$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = n$.

2.17 Exemple de calcul d'une somme double

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$.

2.18 Exemple de calcul d'une somme double

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$: $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

2.19 Exemple de calcul d'une somme de coefficients binomiaux

Montrer, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant p$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

2.20 Calcul d'une somme double de produits de coefficients binomiaux

a) Montrer, pour tout $(n, k, i) \in \mathbb{N}^3$, tel que $k \leqslant i \leqslant n$: $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

2.21 Exemple de calcul d'un produit double

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad P_n = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.

Du mal à démarrer ?

2.1 Récurrence sur n.

2.2 Récurrence sur n.

2.3 Former $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$ et appliquer la formule du binôme de Newton pour $(1+1)^n$ et pour $\big(1+(-1)\big)^n$.

2.4 Utiliser, par exemple, les opérations licites sur les lignes.

2.5 Utiliser, par exemple, les opérations licites sur les lignes.

a) Séparer les cas : $a = 1,\ a \neq 1$.

b) Séparer les trois cas :
$a = -2,\ a = 1,\ \big(a \neq -2 \text{ et } a \neq 1\big)$.

2.6 Utiliser, par exemple, les opérations licites sur les lignes. Séparer les cas : $(a,b) = (2,1),\ (a,b) \neq (2,1)$.

2.7 Noter $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$, Considérer $S_n + T_n$ et séparer en cas selon la parité de n. Obtenir :

$$S_n = \begin{cases} p(2p+1) & \text{si} \quad n = 2p,\ p \in \mathbb{N}^* \\ -(p+1)(2p+1) & \text{si} \quad n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Regrouper les deux résultat s en une même formule.

Réponse : $S_n = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.8 *a)* Formules du cours.

b) Obtenir :

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n).$$

2.9 Calculer $1 + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$, puis sa racine carrée, qui se simplifie, et enfin décomposer $\dfrac{1}{k(k+1)}$ en $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

Réponse : $S_n = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$.

2.10 Exprimer la somme proposée sous forme d'une somme double triangulaire et permuter convenablement les symboles de sommation.

1) **Réponse :** $(n+1)\mathrm{H}_n - n$.

2) **Réponse :** $\dfrac{n(n+1)}{2}\mathrm{H}_n - \dfrac{n(n-1)}{4}$.

2.11 *a)* **Réponse :** $P = P_2 - 5P_1 + 4P_0$.

b) Utiliser *a)* puis des télescopages.

Réponse : $S_n = (n-2)(n+1)! + 2$.

2.12 Pour i fixé, décomposer $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Min}(i,j)$ à l'aide de la relation de Chasles sur les sommations.

Réponse : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.13 Calculer $\sum_{p=0}^{q} 2^p$ par sommation géométrique, puis S_n en utilisant la formule du binôme de Newton.

2.14 *a)* Remplacer les coefficients binomiaux par leurs expressions à l'aide de factorielles.

b) Utiliser *a)* et la formule du binôme de Newton.

2.15 Factoriser $n(n+p) - k(k+p)$, décomposer P_n en produit de deux produits, puis amener des factorielles.

Réponse : $P_n = n!\dfrac{(2n+p-1)!}{(n+p+1)!}$.

2.16 Récurrence forte sur n.

Pour l'hérédité, on suppose, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad u_k = k.$$

Partir de $\sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big)^2$, isoler les termes d'indice $n+1$, déduire une équation portant sur u_{n+1}, d'où la valeur de u_{n+1}.

2.17 Calculer la somme double par emboîtement de deux sommes simples : $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{j} ij\Big)$.

2.18 Calculer la somme double par emboîtement de deux sommes simples : $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \dfrac{i}{j} = \sum_{j=2}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{j-1} \dfrac{i}{j}\Big)$.

2.19 Récurrence sur n, pour p fixé. Utiliser la formule fondamentale des coefficients binomiaux.

2.20 *a)* Calculer chacun des deux membres de l'égalité voulue, en exprimant les coefficients binomiaux à l'aide de factorielles.

b) Utiliser *a)*, un changement d'indice, et la formule du binôme de Newton deux fois.

2.21 Remarquer, par rôles symétriques :

$$P_n^2 = \Big(\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij\Big) \Big/ \Big(\prod_{1 \leqslant i=j \leqslant n} ij\Big).$$

Corrigés des exercices

2.1

Récurrence sur n.

• Pour $n = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = -1$ et $\dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} = -1$, donc la formule est vraie pour $n = 1$.

• Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1)\\ &= \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1)\\ &= \frac{(-1)^n}{4}\big((2n+1)-4(n+1)\big) - \frac{1}{4}\\ &= \frac{(-1)^n}{4}(-2n-3) - \frac{1}{4}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}\big(2(n+1)+1\big)-1}{4},\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

On conclut, par récurrence sur n, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2

Récurrence sur n.

• Pour $n = 2$:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)} = \frac{4}{4\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{6},$$

donc la formule est vraie pour $n = 2$.

• Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ fixé.

On a alors :

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k^2-1)} + \frac{1}{(n+1)\big((n+1)^2-1\big)}$$

$$= \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)n(n+2)} = \frac{(n^2+n-2)(n+2)+4}{4n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^3+3n^2}{4n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2+(n+1)-2}{4(n+1)(n+2)},$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, la formule demandée.

2.3

Par définition de l'énoncé :

$$A_n = \sum_{k,\ 0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots,$$

$$B_n = \sum_{k,\ 0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots.$$

D'où, en additionnant et en utlisant la formule du binôme de Newton : $A_n + B_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$,

et, en soustrayant et en utilisant la formule du binôme de Newton : $A_n - B_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p} = \big(1+(-1)\big)^n = 0.$

On conclut : $A_n = B_n = 2^{n-1}$.

2.4

a) (1) $\begin{cases}4x-2y=1 & L_1\\ 6x-3y=2 & L_2\end{cases} \iff \begin{cases}4x-2y=1\\ 0=\frac{1}{2}\ ;\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1.\end{cases}$

On conclut : $\mathcal{S} = \varnothing$.

(2) $\begin{cases}x-3y=-1\\ 2x+y=5\end{cases} \iff \begin{cases}x=3y-1\\ 2(3y-1)+y=5\end{cases} \iff \begin{cases}x=2\\ y=1.\end{cases}$

On conclut : $\mathcal{S} = \{(2,1)\}$.

b) (1) $\begin{cases}2x+y-z=4 & L_1\\ x-y+z=-1 & L_2\\ x-2y-z=0 & L_3\end{cases}$

$\iff \begin{cases}2x+y-z=4 & \\ 3x=3 & L_2 \leftarrow L_2+L_1\\ 2x-3y=-1 & L_3 \leftarrow L_3+L_2\end{cases} \iff \begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=-1.\end{cases}$

On conclut : $\mathcal{S} = \{(1,1,-1)\}$.

(2) $\begin{cases}x-2y+z=1 & L_1\\ 2x-3y-z=3 & L_2\\ 3x-4y-3z=4 & L_3\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x-2y+z=1 & \\ y-3z=1 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1\\ 2y-6z=1 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1\end{cases}$

et les deux dernières équations sont incompatibles.

On conclut : $\mathcal{S} = \varnothing$.

(3) $\begin{cases}2x+y+z=2 & L_1\\ x+2y+z=0 & L_2\\ 3x+z=4 & L_3\end{cases} \iff \begin{cases}x+2y+z=0 & \\ 2x+y+z=2 & L_1 \leftrightarrow L_2\\ 3x+z=4 & \end{cases}$

$\iff \begin{cases}x+2y+z=0 & \\ -3y-z=2 & L_2 \longleftarrow L_2-2L_1\\ -6y-2z=4 & L_3 \longleftarrow L_3-3L_1\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x+2y+z=0\\ 3y+z=-2\end{cases} \iff \begin{cases}x=-2y-(-2-3y)=y+2\\ z=-2-3y.\end{cases}$

On conclut : $\mathcal{S} = \big\{(y+2,\ y,\ -2-3y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\big\}$.

2.5

a) $$(S)\begin{cases} x+y-2z=2 & L_1\\ x-y+z=0 & L_2\\ 4x-2y+az=a & L_3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-z=2 & L_1 \leftarrow L_1+L_2\\ 2y-3z=2 & L_2\leftarrow L_1-L_2\\ 4x-2y+az=a & (1)\end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}z+1\\ y=\dfrac{1}{2}z+1\\ (1),\end{cases}$$

où :

$$(1)\quad 4\Big(\frac{1}{2}z+1\Big)-2\Big(\frac{3}{2}z+1\Big)z+az=a \iff (a-1)z=a-2.$$

Si $a=1$, alors (1) n'a pas de solution, donc (S) non plus.

Si $a\neq 1$, alors (S) admet une solution unique, donnée par :

$$z=\frac{a-2}{a-1},$$

$$x=\frac{1}{2}z+1=\frac{a-2}{2(a-1)}+1=\frac{3a-4}{2(a-1)},$$

$$y=\frac{3}{2}z+1=\frac{3(a-2)}{2(a-1)}+1=\frac{5a-8}{2(a-1)}.$$

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est :

$$\mathcal{S}=\begin{cases} \varnothing & \text{si}\quad a=1\\ \Big\{\Big(\dfrac{3a-4}{2(a-1)},\ \dfrac{5a-8}{2(a-1)},\ \dfrac{a-2}{a-1}\Big)\Big\} & \text{si}\quad a\neq 1.\end{cases}$$

b) En additionnant les trois équations du système proposé (S), on obtient : $(a+2)(x+y+z)=3$.

- Si $a=-2$, alors (S) n'a pas de solution.
- Si $a\neq -2$, alors :

$$(S)\iff\begin{cases} ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y=az=1\\ x+y+z=\dfrac{3}{a+2}\end{cases}\iff\begin{cases}(a-1)x=\dfrac{a-1}{a+2}\\ (a-1)y=\dfrac{a-1}{a+2}\\ (a-1)z=\dfrac{a-1}{a+2}\\ x+y+z=\dfrac{3}{a+2}.\end{cases}$$

$*$ Si $a=1$, alors : $(S)\iff x+y+z=1$.

$*$ Si $a\neq 1$, alors : $(S)\iff x=\dfrac{1}{a+2},\quad y=\dfrac{1}{a+2},\quad z=\dfrac{1}{a+2}.$

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) est :

$$\mathcal{S}=\begin{cases}\varnothing & \text{si}\quad a=-2\\ \{(x,\,y,\,1-x-y)\,;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\} & \text{si}\quad a=1\\ \Big\{\Big(\dfrac{1}{a+2},\ \dfrac{1}{a+2},\ \dfrac{1}{a+2}\Big)\Big\}; & \text{si}\quad a\neq -2 \ \text{et}\ a\neq 1.\end{cases}$$

2.6

Combinons linéairement les équations pour, par exemple, faire disparaître x des équations 2 et 4 :

$$(S)\iff\begin{cases} x-y+2z+t=0 & L_1\\ -2x+3y+z-4t=1 & L_2\\ -3x+5y+4z-7t=a & L_3\\ -x+2y+3z-3t=b & L_4\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} x-y+2z+t=0 & L_1\\ y+5z-2t=1 & L_2\longleftarrow L_2+2L_1\\ 2y+10z-4t=a & L_3\longleftarrow L_3+3L_1\\ y+5z-2t=b & L_4\longleftarrow L_4+L_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} x-y+2z+t=0\\ y+5z-2t=1\\ y+5z-2t=a/2\\ y+5z-2t=b.\end{cases}$$

Si $a\neq 2$ ou $b\neq 1$, alors (S) n'a pas de solution.

Si $a=2$ et $b=1$, alors :

$$(S)\iff\begin{cases} x-y+2z=t=0\\ y+5z-2t=1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} y=-5z+2t+1\\ x=(-5z+2t+1)+2z+t=-3z+3t+1.\end{cases}$$

On conclut :

$$\mathcal{S}=\begin{cases}\varnothing & \text{si}\quad (a,b)\neq(2,1)\\ \{(-3z+3t+1,\ -5z+2t+1,\ z,\ t)\,;\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\} & \text{si}\quad (a,b)=(2,1).\end{cases}$$

2.7

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$.

On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n+T_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2+\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\big((-1)^n+1\big)k^2.$$

Dans cette dernière somme, les termes d'indices impairs sont nuls, donc il ne reste que les termes d'indices pairs.

Séparons en deux cas, selon la parité de n.

1er cas : n pair, $n=2p,\ p\in\mathbb{N}^*$

On a : $S_n+T_n=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{p}2(2\ell)^2=8\sum_{\ell=1}^{p}\ell^2=8\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$

Comme $T_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{(2p)(2p+1)(4p+1)}{6}$,

on déduit :

$$S_n=\frac{4}{3}p(p+1)(2p+1)-\frac{1}{3}p(2p+1)(4p+1)$$
$$=\frac{1}{3}p(2p+1)\big(4(p+1)-(4p+1)\big)=p(2p+1).$$

2è cas : n impair, $n=2p+1,\ p\in\mathbb{N}$

On a : $S_n+T_n=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{p}2(2\ell)^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$

Comme $T_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{(2p+1)(2p+2)(4p+3)}{6}$, on déduit :

$$S_n = \frac{4}{3}p(p+1)(2p+1) - \frac{1}{3}(2p+1)(p+1)(4p+3)$$
$$= \frac{1}{3}(p+1)(2p+1)\big(4p-(4p+3)\big) = -(p+1)(2p+1).$$

On obtient :

$$S_n = \begin{cases} p(2p+1) & \text{si} \quad n = 2p,\ p \in \mathbb{N}^* \\ -(p+1)(2p+1) & \text{si} \quad n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On remarque que, dans le premier cas :

$$p(2p+1) = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

et que, dans le deuxième cas :

$$-(p+1)(2p+1) = -\frac{n+1}{2}n = -\frac{1}{2}n(n+1).$$

On peut donc grouper la réponse en une seule formule et conclure : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$

2.8

a) D'après le cours, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_0(n) = n, \quad S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de Newton : $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.

En sommant, pour k allant de 1 à n, on déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Par télescopage, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=2}^{n+1} k^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 = (n+1)^4 - 1.$$

D'où : $(n+1)^4 - 1 = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n)$, et donc :

$$\begin{aligned} & 4S_3(n) \\ = \ & (n+1)^4 - 1 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - n \\ = \ & (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) \\ = \ & (n+1)\big((n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\big) \\ = \ & (n+1)(n^3+n^2) \ = \ n^2(n+1)^2, \end{aligned}$$

et on conclut : $\quad S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \Big(\dfrac{n(n+1)}{2}\Big)^2.$

2.9

Essayons d'abord de simplifier le terme général de cette somme.

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1)^2}$$
$$= \frac{k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2},$$

donc :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = \frac{k^2+k+1}{k^2+k}$$
$$= 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par télescopage :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\Big(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = n + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big)$$
$$= n + \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\Big) = n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}.$$

2.10

1) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par somme triangulaire :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_k = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}\Big) = \sum_{p=1}^{n}\Big(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{p}\Big) = \sum_{p=1}^{n}(n-p+1)\frac{1}{p}$$
$$= (n+1)\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} 1 = (n+1)\mathrm{H}_n - n.$$

2) De même :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{H}_k \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n}\Big(k\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}\Big) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{p=1}^{k}\frac{k}{p}\Big) \\ &= \quad \sum_{p=1}^{n}\Big(\sum_{k=p}^{n}\frac{k}{p}\Big) \\ &= \quad \sum_{p=1}^{n}\Big(\frac{1}{p}\sum_{k=p}^{n} k\Big) \\ &= \quad \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\Big(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{p-1} k\Big) \\ &= \quad \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\Big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2}\Big) \\ &= \quad \frac{n(n+1)}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}(p-1) \\ &= \quad \frac{n(n+1)}{2}\mathrm{H}_n - \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-1} q \\ &= \quad \frac{n(n+1)}{2}\mathrm{H}_n - \frac{n(n-1)}{4}. \end{aligned}$$

2.11

a) Faisons apparaître d'abord P_2 dans P :

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1 \\ &= \big((\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2) - 3\mathrm{X} - 2\big) - 2\mathrm{X} + 1 \\ &= P_2 - 5\mathrm{X} - 1 = P_2 - 5\big((\mathrm{X}+1) - 1\big) - 1 \\ &= P_2 - 5P_1 + 4P_0. \end{aligned}$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant le résultat de *a)* :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 k! = \sum_{k=1}^{n} P(k)k! \\ =\;& \sum_{k=1}^{n}\big(P_2(k) - 5P_1(k) + 4P_0(k)\big)k! \\ =\;& \sum_{k=1}^{n} P_2(k)k! - 5\sum_{k=1}^{n} P_1(k)k! + 4\sum_{k=1}^{n} P_0(k)k! \\ =\;& \sum_{k=1}^{n}(k+2)! - 5\sum_{k=1}^{n}(k+1)! + 4\sum_{k=1}^{n} k! \\ =\;& \sum_{k=3}^{n+2} k! - 5\sum_{k=2}^{n+1} k! + 4\sum_{k=1}^{n} k! \\ =\;& \Big(\sum_{k=3}^{n} k! + (n+1)! + (n+2)!\Big) \\ & \quad - 5\Big(2! + \sum_{k=3}^{n} k! + (n+1)!\Big) + 4\Big(1! + 2! + \sum_{k=3}^{n} k!\Big) \\ =\;& (n+1)! + (n+2)! - 5\cdot 2! - 5(n+1)! + 4\cdot 1! + 4\cdot 2! \\ =\;& \big((n+2)! - (n+1)!\big) + 2 = (n+1)!\big((n+2) - 4\big) + 2 \\ =\;& (n-2)(n+1)! + 2. \end{aligned}$$

2.12

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Min}\,(i,j)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)i - \frac{1}{2}i^2\Big) = \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{2n+1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

2.13

On a, en utilisant la somme d'une progression géométrique et la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q} 2^p = \sum_{q=0}^{n}\frac{2^{q+1}-1}{2-1} = 2\sum_{q=0}^{n} 2^q - \sum_{q=0}^{n} 1$$

$$= 2\,\frac{2^{n+1}-1}{2-1} - (n+1) = 2^{n+2} - 2 - (n+1) = 2^{n+2} - n - 3.$$

2.14

a) On a, pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \underset{a)}{=} \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \underset{i=k-1}{=} n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} \underset{\text{Newton}}{=} n2^{n-1}. \end{aligned}$$

2.15

On a :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^{n-1}\big(n(n+p) - k(k+p)\big) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(n^2 + pn - k^2 - pk) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\big((n^2-k^2) + p(n-k)\big) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(n-k)(n+k+p) \\ &= \Big(\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)\Big)\Big(\prod_{k=0}^{n-1}(n+k+p)\Big). \end{aligned}$$

En utilisant les changements d'indice $u = n-k$ dans le premier produit et $v = n+k+p$ dans le second, on obtient :

$$P_n = \Big(\prod_{u=1}^{n} u\Big)\Big(\prod_{v=n+p}^{2n+p-1} v\Big) = n!\frac{(2n+p-1)!}{(n+p+1)!}.$$

2.16

Montrons, par récurrence forte sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n.$$

- Pour $n = 1$, par hypothèse, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} u_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{1} u_k\Big)^2$,

c'est-à-dire $u_1^3 = u_1^2$, et puisque $u_1 > 0$, on déduit $u_1 = 1$.

- Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé : $\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad u_k = k$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big)^2$$
$$\iff \sum_{k=1}^{n} u_k^3 + u_{n+1}^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\Big)^2$$
$$\iff \sum_{k=1}^{n} u_k^3 + u_{n+1}^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big)^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big)u_{n+1} + u_{n+1}^2.$$

D'autre part, de l'hypothèse de récurrence forte, on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'où, après simplification de ces deux termes :

$$u_{n+1}^3 = 2\frac{n(n+1)}{2}u_{n+1} + u_{n+1}^2,$$

et donc : $u_{n+1}^3 - u_{n+1}^2 - n(n+1)u_{n+1} = 0.$

Comme $u_{n+1} > 0$ (donc $\neq 0$), on obtient :

$$u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1) = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est

$$\Delta = 1 + 4n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

donc :

$$u_{n+1} = \frac{1-(2n+1)}{2} = -n \text{ ou } u_{n+1} = \frac{1+(2n+1)}{2} = n+1.$$

Comme $u_{n+1} > 0$ et $-n < 0$, on a nécessairement $u_{n+1} \neq -n$, d'où $u_{n+1} = n+1$, donc la propriété est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence forte, le résultat annoncé.

2.17

1re méthode : emboîtement de sommations :

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{j} ij\Big) = \sum_{j=1}^{n} j\Big(\sum_{i=1}^{j} i\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big)\\
&= \frac{n(n+1)}{24}\big(3n(n+1) + 2(2n+1)\big)\\
&= \frac{n(n+1)}{24}(3n^2+7n+2)\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

2è méthode : utilisation d'autres sommes doubles :

On a :

$$\begin{aligned}
2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i=j\leqslant n} ij\\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big) + \sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},
\end{aligned}$$

et on termine comme dans la 1re méthode.

2.18

On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i}{j}\\
&= \sum_{j=2}^{n}\Big(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1} i\Big) = \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\frac{(j-1)j}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j-1) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=2}^{n} j - \sum_{j=2}^{n} 1\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{n(n+1)}{2} - 1 - (n-1)\Big) = \frac{n^2-n}{4}.
\end{aligned}$$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad S_n = \dfrac{n(n-1)}{4}.$

2.19

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Récurrence sur n.

• Pour $n = p$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$ et $\displaystyle\binom{p+1}{p+1} = 1,$

donc la formule est vraie pour $n = p$.

• Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $n \geqslant p$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \Big[\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}\Big] + \binom{n+1}{p}\\
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1} = \binom{(n+1)+1}{p+1},
\end{aligned}$$

ce qui montre que la formule est vraie pour $n+1$.

On conclut, par récurrence sur n, que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant p$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$

Exemple : $p = 2, n = 5$: $\underbrace{\binom{2}{2}}_{=1} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{=3} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{=6} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{=10} = \underbrace{\binom{5}{3}}_{=20}.$

2.20

a) Soit $(n,k,i) \in \mathbb{N}^3$ tel que $k \leqslant i \leqslant n$. On a :

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{i!}{k!(i-k)!} = \frac{n!}{(n-i)!k!(i-k)!}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} = \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!},$$

d'où l'égalité voulue : $\displaystyle\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}.$

CORRIGÉS

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} \underset{a)}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\Big[\sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{n-i}\Big] \underset{j=n-i}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\Big[\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j}\Big]$$

$$\underset{\text{Newton}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = 3^n.$

2.21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exploitons les rôles symétriques de i et j dans le produit ij. On a : $P_n = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} ij,$

donc :

$$P_n^2 = \Big(\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n} ij\Big) \Big/ \Big(\prod_{1 \leqslant i = j \leqslant n} ij\Big)$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{n} ij\Big)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i^2} = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\Big(i^n \prod_{j=1}^{n} j\Big)}{\Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i\Big)^2} = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(i^n n!)}{(n!)^2}$$

$$= \frac{(n!)^n \displaystyle\prod_{i=1}^{n} i^n}{(n!)^2} = \frac{(n!)^n \Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i\Big)^n}{(n!)^2} = (n!)^{2n-2}.$$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad P_n = (n!)^{n-1}.$

Vrai ou Faux ?

2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = 1$. V F

2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = in$. V F

2.3 Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$: $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$. V F

2.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$. V F

2.5 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. V F

2.6 Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$: $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$. V F

2.7 La fonction $|.|$ est croissante sur $\mathbb{R}$. V F

2.8 Tout nombre réel admet un inverse. V F

2.9 Après calculs, le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: V F

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

admet une solution et une seule, qui est $(1,\ -1,\ 2)$.

2.10 Pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, V F

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{2k}$.

Vrai ou Faux, les réponses

2.1 Si $n \geqslant 2$, on a $\sum_{i=1}^{n} 1 = n \neq 1$. **F**

2.2 La formule proposée n'a pas de sens car la lettre i du second membre n'est pas définie. La formule correcte est : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. **F**

2.3 $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$. **V**

2.4 Il y a oubli du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ dans le second membre. **F**

2.5 C'est un résultat du cours, l'inégalité triangulaire. **V**

2.6 On a, en élevant au carré, pour des nombres tous $\geqslant 0$: **V**

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \iff 0 \leqslant 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

et cette dernière inégalité est vraie.

2.7 Contrexemple : On a $-2 \leqslant 1$ et on n'a pas $|-2| \leqslant |1|$. **F**

2.8 Le réel 0 n'a pas d'inverse. **F**

2.9 Le triplet proposé $(1, -1, 2)$ ne satisfait pas la troisième équation. **F**

2.10 On a $S_{2n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n}$, qui est la somme de tous les u_k (sans condition de parité sur k) pour k allant de 0 à $2n$, alors que $\sum_{k=0}^{n} u_{2k} = u_0 + u_2 + \cdots + u_{2n}$ est la somme des termes d'indices pairs seulement. **F**

Chapitre 3

Nombres complexes et trigonométrie

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calcul algébrique sur les nombres complexes : sommes, produits, quotients, puissances, conjugués, modules, forme algébrique et forme trigonométrique
- Équations algébriques simples, systèmes d'équations algébriques
- Inégalités portant sur des modules, souvent en liaison avec une interprétation géométrique
- Utilisation des nombres complexes pour la trigonométrie, formule d'Euler, formule de Moivre
- Utilisation des nombres complexes pour la géométrie plane, utilisation des rotations et des similitudes directes
- Manipulation des racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Calcul dans $\mathbb{C}$, en particulier les propriétés algébriques de la conjugaison et du module
- Résolution des équations du premier et du second degré dans $\mathbb{C}$
- Propriétés de la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul
- Définition et propriétés des racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$
- Formule d'Euler et formule de Moivre
- Traduction sur les affixes d'une translation, d'une rotation, d'une similitude directe.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe présenté comme puissance d'un nombre complexe

Utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes.

➟ **Exercice 3.1**

De manière générale :

- l'écriture algébrique $x + \mathrm{i}\, y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, est conseillée pour des calculs additifs,
- l'écriture trigonométrique $\rho\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$, $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, est conseillée pour des calculs multiplicatifs.

Exemple

Calculer la partie réelle du nombre complexe $A = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{(1 + \mathrm{i})(1 + 2\,\mathrm{i})}$.

On a :

$$A = \frac{3 - \mathrm{i}}{(1 + \mathrm{i})(1 + 2\,\mathrm{i})} = \frac{3 - \mathrm{i}}{-1 + 3\,\mathrm{i}} = \frac{(3 - \mathrm{i})(-1 - 3\,\mathrm{i})}{(-1 + 3\,\mathrm{i})(-1 - 3\,\mathrm{i})} = \frac{-6 - 8\,\mathrm{i}}{10},$$

donc : $\text{Ré}\,(A) = -\dfrac{6}{10} = -\dfrac{3}{5}$.

Méthode

Pour résoudre une équation à une inconnue dans les complexes

- On sait résoudre les équations du premier degré ou du second degré (voir cours).
- Toujours tenir compte des particularités de l'équation proposée : à ce niveau, s'il y a une question, c'est qu'il y a une réponse exprimable.
- Effectuer un changement d'inconnue (ou un changement de variable) pour ramener l'équation à une autre équation plus simple. On prendra souvent comme nouvelle inconnue un groupement intervenant plusieurs fois dans l'équation.

➟ **Exercices 3.2, 3.3, 3.5, 3.7**

Exemple

Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 3z + 3 - \mathrm{i} = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

Le discriminant Δ est $\Delta = (-3)^2 - 4(3 - \mathrm{i}) = -3 + 4\,\mathrm{i}$.

Cherchons les racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$.

On a, pour tout $\delta = x + \mathrm{i}\, y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \impliedby \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Ainsi, une racine carrée de Δ est $\delta = 1 + 2\,\mathrm{i}$.
On peut d'ailleurs contrôler : $(1+2\,\mathrm{i})^2 = -3 + 4\,\mathrm{i}$.

Les solutions de l'équation proposée sont donc :

$$z_1 = \frac{3-(1+2\,\mathrm{i})}{2} = 1 - \mathrm{i}\,, \quad z_2 = \frac{3+(1+2\,\mathrm{i})}{2} = 2 + \mathrm{i}\,.$$

Méthode

Pour traduire qu'un nombre complexe est réel, qu'un nombre complexe est imaginaire pur

Utiliser, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{R\acute{e}}\,(z) = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z}), \quad \mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{i}}(z-\overline{z})$.

Ainsi : $\begin{cases} z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z \\ z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z. \end{cases}$

➟ **Exercice 3.4**

Exemple

Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$:
$$\frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

On a, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} &\iff \overline{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)} = \frac{1-z}{1+z} \iff \frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}} = \frac{1-z}{1+z} \\ &\iff 1 + z - \overline{z} - z\overline{z} = 1 + \overline{z} - z - z\overline{z} \\ &\iff 2(z-\overline{z}) = 0 \iff \overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Méthode

Pour établir une inégalité portant sur des modules de nombres complexes

Essayer de :

- utiliser l'inégalité triangulaire :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$
ou l'inégalité triangulaire renversée :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z-z'| \geqslant \big||z| - |z'|\big|.$$
De manière générale, il est conseillé de partir du membre le plus compliqué.
- faire intervenir des carrés de module (au lieu des modules eux-mêmes), de façon à pouvoir utiliser la formule :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 = \overline{z}z.$$
- On peut être amené à séparer en cas et à traiter les différents cas par des méthodes différentes.

➟ **Exercices 3.6, 3.9, 3.15 à 3.18**

Exemple

Montrer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$:

$$|u| + |v| \leqslant |u+v| + |u-v|.$$

On a, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{cases} 2|u| = \big|(u+v)+(u-v)\big| \leqslant |u+v| + |u-v| \\ 2|v| = \big|(u+v)-(u-v)\big| \leqslant |u+v| + |u-v|, \end{cases}$$

d'où, en additionnant : $2\big(|u|+|v|\big) \leqslant 2\big(|u+v|+|u-v|\big)$.

En simplifiant par 2, on obtient le résultat demandé.

Méthode

Pour faire des calculs sur des nombres complexes de module 1

Essayer d'utiliser, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $|z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$,

ce qui permet, lorsque $|z| = 1$, de remplacer $\overline{z}$ par $\dfrac{1}{z}$, ou inversement.

➟ **Exercices 3.8, 3.13**

Exemple

Montrer, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{U}^3$:

$$a+b+c = 0 \iff ab+ac+bc = 0.$$

On a, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{U}^3$:

$$\begin{aligned} a+b+c=0 &\iff \overline{a+b+c}=0 \iff \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0 \\ &\iff \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \iff \frac{ab+ac+bc}{abc}=0 \\ &\iff ab+ac+bc=0. \end{aligned}$$

Méthode

Pour résoudre une question portant sur des cosinus et des sinus

Essayer de faire intervenir les nombres complexes, en utilisant la formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x + \mathrm{i} \sin x = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$.

Pour transformer $1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ ou $1 - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$, $(\theta \in \mathbb{R})$, mettre $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2}}$ en facteur :

$$1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2}} \cos\frac{\theta}{2}, \qquad 1 - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2}} \sin\frac{\theta}{2}.$$

➟ **Exercice 3.12**

Exemple

Pour $t \in [0\,;\,2\pi]$, calculer le module et un argument de $1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}$.

On a : $\quad 1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,t}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,t}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,t}{2}}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,t}{2}} \cos\frac{t}{2}.$

Si $t \in [0\,;\,\pi]$, alors $2\cos\frac{t}{2} \in \mathbb{R}_+$, donc :

$$|1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}| = 2\cos\frac{t}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg}(1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}) = \frac{t}{2} \quad [2\pi].$$

Si $t \in [\pi\,;\,2\pi]$, alors $2\cos\frac{t}{2} \leqslant 0$, donc :

$$1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t} = 2\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{t}{2}} = -2\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\frac{t}{2}+\pi\right)},$$

donc : $\quad |1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}| = -2\cos\frac{t}{2} \quad$ et $\quad \operatorname{Arg}(1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}) = \frac{t}{2} + \pi \quad [2\pi].$

Méthode

Pour calculer une expression faisant intervenir des coefficients binomiaux

Essayer d'appliquer la formule du binôme de Newton .

Si les coefficients binomiaux sont régulièrement espacés (par exemple de trois en trois), faire intervenir des racines (par exemple cubiques) de 1 dans $\mathbb{C}$.

➟ **Exercice 3.14**

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} (-1)^p 2^p.$$

Considérons $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mathrm{i}^{\,k} \sqrt{2}^k$.

D'une part, d'après la formule du binôme de Newton :

$$S_n = (1 + \mathrm{i}\sqrt{2})^{2n}.$$

D'autre part, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} \mathrm{i}^{\,2p} \sqrt{2}^{2p} + \sum_{q=0}^{n-1} \binom{2n}{2q+1} \mathrm{i}^{\,2q+1} \sqrt{2}^{2q+1} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} (-1)^p 2^p + \mathrm{i} \sum_{q=0}^{n-1} \binom{2n}{2q+1} (-1)^q 2^q \sqrt{2}, \end{aligned}$$

ce qui montre que A_n est la partie réelle de S_n.

On a donc :

$$A_n = \text{Ré}\,(S_n) = \frac{1}{2}(S_n + \overline{S_n}) = \frac{1}{2}\Big((1 + \mathrm{i}\sqrt{2})^{2n} + \overline{(1 + \mathrm{i}\sqrt{2})^{2n}}\Big)$$

et on conclut : $A_n = \dfrac{1}{2}\Big((1 + \mathrm{i}\sqrt{2})^{2n} + (1 - \mathrm{i}\sqrt{2})^{2n}\Big)$.

Méthode

Pour calculer une somme faisant intervenir une ou des racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$

Essayer d'appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a, b \in \mathbb{C},\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

ou la formule sur la sommation d'une progression géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\quad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

➟ **Exercice 3.19**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

On note $\omega = \exp\left(\dfrac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}\right)$.

Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2$.

On a, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$:

$$|\omega^k - 1|^2 = \left|\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} - 1\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)\right|^2$$

$$= \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\, 2\,\mathrm{i} \sin\frac{k\pi}{n}\right|^2 = 4\sin^2\frac{k\pi}{n} = 2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right).$$

D'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right) = 2\sum_{k=0}^{n-1} 1 - 2\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}}_{\text{notée } C_n} = 2n - 2C_n.$$

Puisque $n \geqslant 2$, on a $\omega \neq 1$, donc :

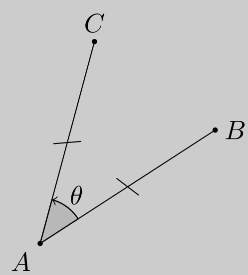
$$C_n = \mathrm{Ré}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\right) = \mathrm{Ré}\left(\frac{1-\omega^n}{1-\omega}\right) = \mathrm{Ré}(0) = 0.$$

On conclut : $S_n = 2n$.

Méthode

Pour traduire une configuration de géométrie plane par les nombres complexes

Essayer de faire apparaître des rotations ou, plus généralement, des similitudes directes.



Rappelons que, si A, B, C sont trois points du plan, d'affixes respectives a, b, c, et si $\theta \in \mathbb{R}$, alors :

$$C = \mathrm{Rot}_{(A,\theta)}(B) \iff \overrightarrow{AC} = \mathrm{Rot}_\theta(\overrightarrow{AB}) \iff c - a = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}(b-a).$$

➟ **Exercice 3.20**

Exemple

Soit ABC un triangle du plan.

On construit, extérieurement à ABC, les points D, E, F tels que les triangles ABD, BCE, CAF soient rectangles isocèles en D, E, F respectivement.

Montrer que les triangles ABC et DEF ont le même centre de gravité.

Notons a, b, c les affixes respectives de A, B, C.

Puisque le triangle ABD est rectangle isocèle en D (et indirect), le point A se déduit de B par la rotation affine de centre D et d'angle $\pi/2$, donc le vecteur $\overrightarrow{DA}$ se déduit du vecteur $\overrightarrow{DB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$, d'où : $a - d = \mathrm{i}\,(b-d)$, puis : $d = \dfrac{a - \mathrm{i}\,b}{1-\mathrm{i}}$.

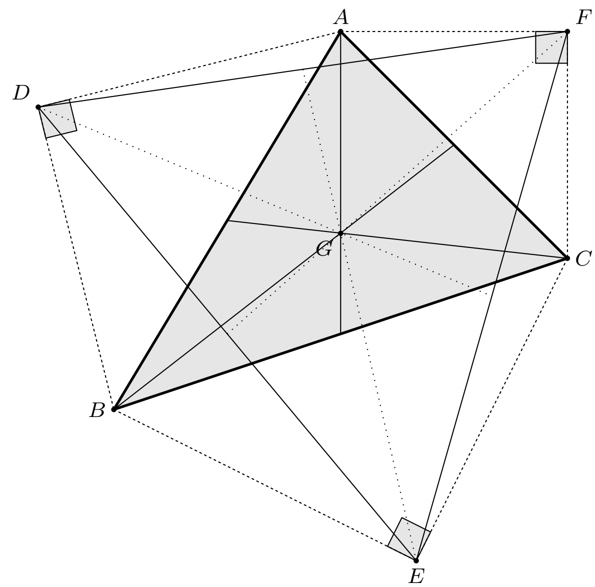
De même, $e = \dfrac{b - \mathrm{i}\,c}{1-\mathrm{i}}$, $f = \dfrac{c - \mathrm{i}\,a}{1-\mathrm{i}}$.

Notons G le centre de gravité de ABC, g l'affixe de G, G_1 le centre de gravité de DEF, g_1 l'affixe de G_1.

On a :

$$g_1 = \frac{1}{3}(d+e+f) = \frac{1}{3(1-\mathrm{i})}\big((a-\mathrm{i}\,b)+(b-\mathrm{i}\,c)+(c-\mathrm{i}\,a)\big)$$

$$= \frac{1}{3(1-\mathrm{i})}\big((1-\mathrm{i})(a+b+c)\big) = \frac{1}{3}(a+b+c) = g.$$



On conclut $G_1 = G$, c'est-à-dire que les triangles ABC et DEF ont le même centre de gravité.

Énoncés des exercices

3.1 Calcul de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une puissance

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $A = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}\right)^{125}$.

3.2 Exemple de résolution d'une équation particulière du 3è degré dans $\mathbb{C}$

a) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad z^3 - (16 - \mathrm{i})z^2 + (89 - 16\mathrm{i})z + 89\mathrm{i} = 0.$$

b) Quelle particularité présente le triangle formé par les trois points dont les affixes sont les solutions de (1) ?

3.3 Exemple de résolution d'une équation particulière du 4è degré dans $\mathbb{C}$

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\qquad$ (E) $\qquad (z^2+4z+1)^2 + (3z+5)^2 = 0.$

3.4 Étude de conjugaison et de module

Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. Montrer : $\qquad \dfrac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff |z| = 1.$

3.5 Résolution d'une équation dans $\mathbb{C}$ faisant intervenir un conjugué

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: (1) $\qquad \overline{z} = z^3.$

3.6 Étude d'inégalités sur des modules de nombres complexes

a) Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad \big|z - (1+\mathrm{i})\big| \leqslant 1 \implies \sqrt{10} - 1 \leqslant |z-4| \leqslant \sqrt{10} + 1.$

b) Traduire géométriquement le résultat de *a)*.

3.7 Exemple de résolution d'une équation particulière du 4è degré dans $\mathbb{C}$

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\qquad$ (1) $\qquad z(2z+1)(z-2)(2z-3) = 63.$

3.8 Étude de conjugaison et de modules de nombres complexes

Montrer : $\qquad \forall u \in \mathbb{U},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\quad \left|u - \dfrac{1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{|u-z|}{|z|}.$

3.9 Inégalités sur des modules de nombres complexes

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1.$

3.10 Un exemple d'involution d'un disque

Montrer que $f : z \longmapsto -z\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}$ est une involution de $D = \big\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\big\}$.

3.11 Exemple d'intervention de la géométrie dans les nombres complexes

Résoudre l'équation (1) $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 0$, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

3.12 **Somme des cosinus et somme des sinus de réels en progression arithmétique**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$.

3.13 **Utilisation de la conjugaison pour des nombres complexes de module 1**

Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $b \neq c$. On note $A = \dfrac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2}$. Montrer : $A \in \mathbb{R}_+$.

3.14 **Calcul de sommes de coefficients binomiaux de trois en trois**

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$, les sommes :

$$A = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots, \quad B = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \cdots, \quad C = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \cdots.$$

3.15 **Exemple d'inégalité portant sur des modules de nombres complexes**

Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| \leqslant |z|^2 + |z-1|$.

3.16 **Calcul d'une borne supérieure faisant intervenir des nombres complexes**

Déterminer $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{|z| \leqslant 1} |z^3 + 2\,\mathrm{i}\,z|$.

3.17 **Étude d'inégalité sur des sommes de modules de nombres complexes**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}^*$. On suppose $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

a) Montrer : $\quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|}$.

b) En déduire : $\quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$.

3.18 **Obtention d'inégalités portant sur des modules de nombres complexes**

a) Montrer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$: $\quad |u| + |v| \leqslant |u + v| + |u - v|$.

b) En déduire, pour tout $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$:

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3| + |z_2 + z_4| + |z_3 + z_4|.$$

3.19 **Exemple de calcul d'une somme faisant intervenir des racines n-èmes de 1**

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $z \in \mathbb{C}$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n$. Calculer S_n.

3.20 Triangle équilatéral dans le plan

Soient A, B, C trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives a, b, c.

a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + \mathrm{j}\, b + \mathrm{j}^2 c = 0$.

b) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0.$$

3.21 Exemple de traduction d'une configuration géométrique par une condition sur des nombres complexes

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note u, v les racines carrées complexes de z. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, u, v forment un triangle rectangle de sommet le point d'affixe z.

Du mal à démarrer ?

3.1 Utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes.

3.2 *a)* Grouper les deux termes contenant 16 et les deux termes contenant 89.

3.3 Remarquer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:
$$a^2 + b^2 = (a + \mathrm{i}\, b)(a - \mathrm{i}\, b).$$

3.4 Utiliser : $\forall A \in \mathbb{C}, \quad A \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \overline{A} = -A$.

3.5 Passer par la forme trigonométrique de z.

3.6 *a)* Faire apparaître $z - (1 + \mathrm{i})$ dans $z - 4$, et utiliser l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire renversée.

3.7 En groupant les facteurs z et $2z - 3$ d'une part, les facteurs $2z + 1$ et $z - 2$ d'autre part, faire apparaître la même expression $2z^2 - 3z$ et utiliser alors un changement d'inconnue.

3.8 Remarquer que, puisque $u \in \mathbb{U}$ ensemble des nombres complexes de module 1, on peut remplacer u par $\dfrac{1}{\overline{u}}$.

3.9 Après avoir vérifié l'existence de l'expression proposée, mettre des modules au carré.

3.10 Se rappeler qu'une involution d'un ensemble D est, par définition, une application $f : D \longrightarrow D$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_D$.

3.11 Traduire (1) par une configuration géométrique.

3.12 Passer par les nombres complexes, en formant $C + \mathrm{i}\, S$, puis faire apparaître une progression géométrique.

3.13 • Utiliser l'égalité $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$, pour tout $u \in \mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1.

• Pour établir $A \in \mathbb{R}_+$, on peut essayer de faire apparaître A comme carré du module d'un nombre complexe.

3.14 Puisque les coefficients vont de trois en trois, on peut penser aux racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$, d'où l'idée de former $A+B+C,\ A + \mathrm{j}\, B + \mathrm{j}^2 C,\ A + \mathrm{j}^2 B + \mathrm{j}\, C$.

3.15 Appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire et séparer en cas selon la position de $|z|$ par rapport à 1, à cause de la présence de $|z|$ et de $|z|^2$.

3.16 Obtenir une majoration convenable, par l'inégalité triangulaire, puis choisir z pour réaliser l'égalité dans l'inégalité obtenue.

3.17 *a)* Partir du membre le plus compliqué, le second.

b) Utiliser l'inégalité triangulaire.

3.18 *a)* Utiliser convenablement l'inégalité triangulaire.

b) Appliquer le résultat de *a)* à (z_1, z_2), (z_3, z_4), puis à $(z_1 - z_2, z_3 - z_4)$.

3.19 Utiliser le binôme de Newton, une propriété de permutation de deux symboles Σ et enfin la sommation d'une progression géométrique.

3.20 *a)* Traduire la configuration à l'aide d'une rotation, par exemple de centre B.

b) Un triangle est équilatéral si et seulement s'il est équilatéral direct ou équilatéral indirect.

3.21 Se rappeler que le produit scalaire de deux vecteurs d'affixes complexes a, b est donné par $\mathrm{Ré}\,(\overline{a}b)$.

Corrigés des exercices

3.1

Mettons $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1+\mathrm{i}$ sous formes trigonométriques :

$$|1+\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2,$$

donc : $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\,\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$,

et : $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, donc : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

D'où : $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

Puis : $A = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{125} = \sqrt{2}^{125}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{125\pi}{12}}$.

On calcule cette dernière exponentielle complexe :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{125\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)} \\
= \; & \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\
= \; & \mathrm{i}\,\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \\
= \; & \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{i}\left((1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\,\mathrm{i}\right) \\
= \; & \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\,\mathrm{i}\right).
\end{aligned}$$

On obtient : $A = 2^{61}(\sqrt{3}-1)+2^{61}(\sqrt{3}+1)\,\mathrm{i}$

et on conclut que la partie réelle de A est $2^{61}(\sqrt{3}-1)$ et que la partie imaginaire de A est $2^{61}(\sqrt{3}+1)$.

3.2

a) On a :

$$\begin{aligned}
(1) \iff\; & z^3+\mathrm{i}\,z^2-16(z^2+\mathrm{i}\,z)+89(z+\mathrm{i}\,)=0 \\
\iff\; & z^2(z+\mathrm{i}\,)-16z(z+\mathrm{i}\,)+89(z+\mathrm{i}\,)=0 \\
\iff\; & (z^2-16z+89)(z+\mathrm{i}\,)=0 \\
\iff\; & z^2-16z+89=0 \quad (2) \quad \text{ou} \quad z=-\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

Le discriminant Δ de l'équation du second degré (2) est :

$$\Delta = 16^2-4\cdot 89 = 256-356 = -100 = (10\,\mathrm{i}\,)^2.$$

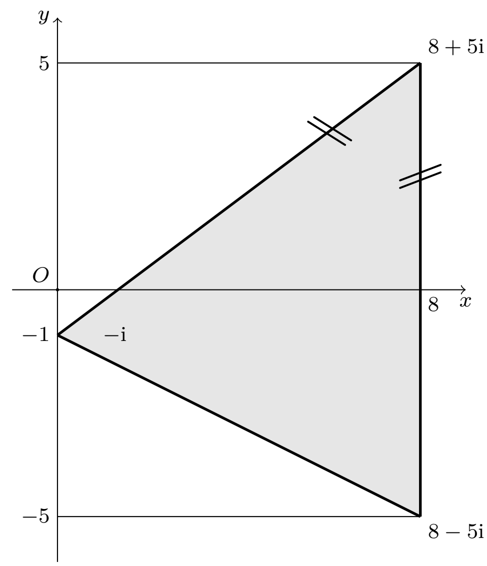
Les solutions de (2) dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\frac{16-10\,\mathrm{i}}{2} = 8-5\,\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \frac{16+10\,\mathrm{i}}{2} = 8+5\,\mathrm{i}\,.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (1) est

$$\left\{-\mathrm{i}\,,\ 8-5\mathrm{i}\,,\ 8+5\mathrm{i}\right\}.$$

b) On peut éventuellement commencer par faire un schéma situant les trois points en question, pour deviner quelle réponse apporter à cette question.



Puisque

$$\begin{cases} \left|(8+5\,\mathrm{i}\,)-(-\,\mathrm{i}\,)\right| = |8+6\,\mathrm{i}\,| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10 \\ \left|(8+5\,\mathrm{i}\,)-(8-5\,\mathrm{i}\,)\right| = |10\,\mathrm{i}\,| = 10, \end{cases}$$

le triangle formé par les trois points dont les affixes sont les solutions de (1) est isocèle, de sommet d'affixe $8+5\,\mathrm{i}$.

3.3

On a :

$$(\mathrm{E}) \iff \left|\begin{array}{c} (z^2+4z+1)+\mathrm{i}\,(3z+5)=0 \\ \text{ou} \\ (z^2+4z+1)-\mathrm{i}\,(3z+5)=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left|\begin{array}{c} z^2+(4+3\,\mathrm{i}\,)z+(1+5\,\mathrm{i}\,)=0 \quad (1) \\ \text{ou} \\ z^2+(4-3\,\mathrm{i}\,)z+(1-5\,\mathrm{i}\,)=0 \quad (2). \end{array}\right.$$

L'équation (1) est du second degré. Son discriminant Δ est : $\Delta = (4+3\,\mathrm{i}\,)^2-4(1+5\,\mathrm{i}\,) = 16-9+24\,\mathrm{i}-4-20\,\mathrm{i} = 3+4\,\mathrm{i}$.

On remarque que $3+4\,\mathrm{i} = (2+\mathrm{i}\,)^2$, ou bien on calcule les racines carrées complexes de $3+4\,\mathrm{i}$ par la méthode habituelle. On en déduit les solutions de (1) :

$$\frac{1}{2}\left(-(4+3\,\mathrm{i}\,)-(2+\mathrm{i}\,)\right) = \frac{1}{2}(-6-4\,\mathrm{i}\,) = -3-2\,\mathrm{i}$$
$$\frac{1}{2}\left(-(4+3\,\mathrm{i}\,)+(2+\mathrm{i}\,)\right) = \frac{1}{2}(-2-2\,\mathrm{i}\,) = -1-\mathrm{i}\,.$$

D'autre part, un nombre complexe z est solution de (2) si et seulement si son conjugué $\overline{z}$ est solution de (1), donc les solutions de (2) sont les conjuguées des solutions de (1).

Finalement, l'ensemble des solutions de (1) est :

$$\left\{-3-2\mathrm{i}\,,\ -1-\mathrm{i}\,,\ -3+2\mathrm{i}\,,\ -1+\mathrm{i}\right\}.$$

3.4

Notons $A = \dfrac{1+z}{1-z}$. On a :

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} &\iff \overline{A} = -A \iff \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = -\frac{1+z}{1-z} \\ &\iff \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = -\frac{1+z}{1-z} \\ &\iff (1+\overline{z})(1-z) = -(1-\overline{z})(1+z) \\ &\iff 2 - 2z\overline{z} = 0 \iff z\overline{z} = 1 \\ &\iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1. \end{aligned}$$

3.5

Remarquer que le nombre 0 est solution.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $z = \rho\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$(1) \iff \rho\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta} = \rho^3\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,\theta} \iff \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ -\theta \equiv 3\theta \;\; [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ 4\theta \equiv 0 \;\; [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0 \;\; \left[\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (1) est

$$\{0,\ 1,\ \mathrm{i},\ -1,\ -\mathrm{i}\}.$$

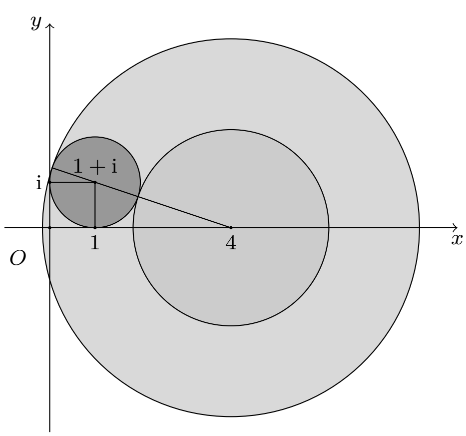
3.6

a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-(1+\mathrm{i})| \leqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned} |z-4| &= |z-(1+\mathrm{i})+(-3+\mathrm{i})| \\ &\leqslant |z-(1+\mathrm{i})| + |-3+\mathrm{i}| \leqslant 1+\sqrt{10}, \\ |z-4| &= |z-(1+\mathrm{i})-(3-\mathrm{i})| \\ &\geqslant -|z-(1+\mathrm{i})| + |3-\mathrm{i}| \geqslant -1+\sqrt{10}. \end{aligned}$$

On conclut : $\sqrt{10}-1 \leqslant |z-4| \leqslant \sqrt{10}+1$.

b) Le résultat de *a)* se traduit géométriquement par : le disque fermé de centre $1+\mathrm{i}$ et de rayon 1 est inclus dans la couronne fermée de centre 4 et de rayons $\sqrt{10}-1$ et $\sqrt{10}+1$ (qui est d'ailleurs tangente au disque précédent en deux points).



3.7

On a :

$$\begin{aligned} (1) &\iff \big(z(2z-3)\big)\big((2z+1)(z-2)\big) = 63 \\ &\iff (2z^2-3z)(2z^2-3z-2) = 63. \end{aligned}$$

En notant $Z = 2z^2 - 3z$, on a donc :

$$(1) \iff Z(Z-2) = 63 \iff Z^2 - 2Z - 63 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré. Le discriminant Δ est : $\Delta = 2^2 + 4 \cdot 63 = 256 = 16^2$. Les solutions en Z sont donc : $\dfrac{2-16}{2} = -7$ et $\dfrac{2+16}{2} = 9$.

D'où :

$$\begin{aligned} (1) &\iff 2z^2 - 3z = -7 \;\text{ ou }\; 2z^2 - 3z = 9 \\ &\iff 2z^2 - 3z + 7 = 0 \;(2) \;\text{ ou }\; 2z^2 - 3z - 9 = 0 \;(3). \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de deux équations du second degré.

Le discriminant Δ_2 de (2) est $\Delta_2 = 9 - 56 = -47$, donc les solutions de (2) sont $\dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{47}}{4}$ et $\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{47}}{4}$.

Le discriminant Δ_3 de (3) est $\Delta_3 = 9 + 72 = 81 = 9^2$, donc les solutions de (3) sont $\dfrac{3-9}{4} = -\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{3+9}{4} = 3$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (1) est

$$\left\{3,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3-\mathrm{i}\sqrt{47}}{4},\ \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{47}}{4}\right\}.$$

3.8

Puisque $u \in \mathbb{U}$, on a $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$, donc $u = \dfrac{1}{\overline{u}}$, d'où :

$$\left|u - \frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1}{\overline{u}} - \frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{\overline{z}-\overline{u}}{\overline{u}\overline{z}}\right| = \frac{|\overline{z}-\overline{u}|}{|\overline{u}|\,|\overline{z}|} = \frac{|u-z|}{|z|}.$$

3.9

- Montrons d'abord que l'expression proposée existe.

On a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|a| < 1$ et $|b| < 1$:

$$1 - \overline{a}b = 0 \iff \overline{a}b = 1 \implies |a|\,|b| = |\overline{a}b| = 1,$$

exclu, car $|a|\,|b| < 1$, ce qui montre que $1 - \overline{a}b \neq 0$, donc $\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}$ existe.

- On a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|a| < 1$ et $|b| < 1$:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1 \\ \iff\ & |a-b| < |1-\overline{a}b| \\ \iff\ & |a-b|^2 < |1-\overline{a}b|^2 \\ \iff\ & (\overline{a}-\overline{b})(a-b) < (1-\overline{a}b)(1-a\overline{b}) \\ \iff\ & \overline{a}a - \overline{a}b - \overline{b}a + \overline{b}b < 1 - \overline{a}b - a\overline{b} + \overline{a}ba\overline{b} \\ \iff\ & 1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 > 0 \\ \iff\ & (1-|a|^2)(1-|b|^2) > 0, \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité est vraie, car $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

On conclut : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$.

Remarque : Le même calcul permet, plus généralement, d'obtenir la position stricte de $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|$ par rapport à 1 en fonction des positions strictes de $|a|$ et de $|b|$ par rapport à 1.

3.10

1) Soit $z \in D$. On a alors $z \neq 1$, donc $f(z) = -z\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}$ existe, et :

$$|f(z)| = \left| -z\frac{1-\overline{z}}{1-z}\right| = |z|\frac{|1-\overline{z}|}{|1-z|} = |z|\frac{|\overline{1-z}|}{|1-z|} = |z| < 1,$$

donc $f(z) \in D$.

Ceci montre que f est une application de D dans D.

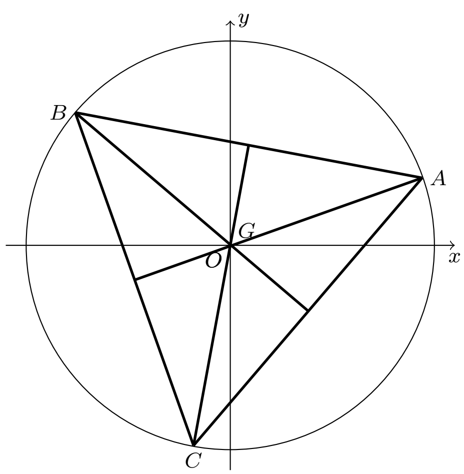
2) Pour montrer $f \circ f = \mathrm{Id}_D$, on va calculer $f \circ f(z)$ pour tout $z \in D$.

On a, pour tout $z \in D$:

$$\begin{aligned}(f\circ f)(z) &= f\big(f(z)\big)\\ &= -f(z)\frac{1-\overline{f(z)}}{1-f(z)} = z\frac{1-\overline{z}}{1-z}\,\frac{1+\overline{z}\dfrac{1-z}{1-\overline{z}}}{1+z1-\overline{z}1-z}\\ &= z\frac{1-\overline{z}}{1-z}\,\frac{1-\overline{z}+\overline{z}-\overline{z}z}{1-z+z-z\overline{z}}\,\frac{1-z}{1-\overline{z}} = z.\end{aligned}$$

On obtient $f\circ f = \mathrm{Id}_D$ et on conclut que f est une involution de D.

3.11



Notons A, B, C les points d'affixes respectives $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$, $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,y}$, $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,z}$. Ainsi, A, B, C sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.

L'affixe du centre de gravité G du triangle ABC est $\dfrac{1}{3}\big(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,y} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,z}\big)$. Ainsi, (x, y, z) est solution de (1) si et seulement si $G = O$.

Si $G = O$, c'est-à-dire si le centre de gravité G de ABC est confondu avec le centre O du cercle circonscrit à ABC, alors les médiatrices et les médianes du triangle ABC sont confondues, donc ABC est équilatéral. La réciproque est évidente.

On conclut que (x, y, z) est solution de (1) si et seulement si le triangle dont les sommets ont pour affixes $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$, $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,y}$, $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,z}$ est équilatéral.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (1) est :

$$\left\{\left(x,\, x+\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\, x+\frac{4\pi}{3}+2\ell\pi\right);\ (x,k,\ell)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}$$
$$\cup\left\{\left(x,\, x+\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\, x+\frac{2\pi}{3}+2\ell\pi\right);\ (x,k,\ell)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}.$$

3.12

On a : $C + \mathrm{i}\,S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(a+kb)} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,a}\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,b})^k.$

Si $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,b} \neq 1$, donc :

$$\begin{aligned} C+\mathrm{i}\,S &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,a}\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(n+1)b}-1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,b}-1}\\ &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,a}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,(n+1)b}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,(n+1)b}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,(n+1)b}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,b}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,b}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,b}{2}}\right)}\\ &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(a+\frac{nb}{2}\right)}\frac{2\,\mathrm{i}\,\sin\dfrac{(n+1)b}{2}}{2\,\mathrm{i}\,\sin\dfrac{b}{2}}. \end{aligned}$$

On en déduit C et S en prenant la partie réelle et la partie imaginaire.

Si $b \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors l'étude est immédiate.

Finalement :

$$C = \begin{cases} \cos\left(a+\dfrac{nb}{2}\right)\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)b}{2}}{\sin\dfrac{b}{2}} & \text{si}\quad b\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ (n+1)\cos a & \text{si}\quad b\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$S = \begin{cases} \sin\left(a+\dfrac{nb}{2}\right)\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)b}{2}}{\sin\dfrac{b}{2}} & \text{si}\quad b\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ (n+1)\sin a & \text{si}\quad b\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

3.13

Remarquer d'abord que l'expression proposée existe, puisque $a \neq 0$ et $c \neq b$.

Notons $z = \dfrac{c-a}{c-b}$. On a, puisque $a, b, c \in \mathbb{U}$:

$$\overline{z} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} = \frac{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}} = \frac{a-c}{ca}\,\frac{bc}{b-c} = \frac{b}{a}z.$$

D'où :

$$\frac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2} = \frac{b}{a}\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2 = \frac{b}{a}z^2 = \left(\frac{b}{a}z\right)z = \overline{z}z = |z|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

3.14

En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} & A+B+C \\ = \ & \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots \\ = \ & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n \\ & A+\mathrm{j}\,B+\mathrm{j}^2C \\ = \ & \binom{n}{0}+\mathrm{j}\binom{n}{1}+\mathrm{j}^2\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots \\ = \ & \sum_{k=0}^{n}\mathrm{j}^k\binom{n}{k}=(1+\mathrm{j})^n=(-\mathrm{j}^2)^n=(-1)^n\mathrm{j}^{2n} \\ & A+\mathrm{j}^2B+\mathrm{j}\,C \\ = \ & \binom{n}{0}+\mathrm{j}^2\binom{n}{1}+\mathrm{j}^4\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots \\ = \ & \sum_{k=0}^{n}\mathrm{j}^{2k}\binom{n}{k}=(1+\mathrm{j}^2)^n=(-\mathrm{j})^n=(-1)^n\mathrm{j}^n. \end{aligned}$$

On résout ce système de trois équations à trois inconnues, à l'aide des coefficients $1,\ \mathrm{j},\ \mathrm{j}^2$ et en utilisant $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$, d'où les valeurs de A, B, C :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}\big(2^n+(-1)^n\mathrm{j}^{2n}+(-1)^n\mathrm{j}^n\big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(2^n+(-1)^n 2\cos\frac{2n\pi}{3}\Big) \\ B &= \frac{1}{3}\big(2^n+(-1)^n\mathrm{j}^{2n+2}+(-1)^n\mathrm{j}^{n+1}\big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(2^n+(-1)^n 2\cos\frac{2(n+1)\pi}{3}\Big) \\ C &= \frac{1}{3}\big(2^n+(-1)^n\mathrm{j}^{2n+1}+(-1)^n\mathrm{j}^{n+2}\big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(2^n+(-1)^n 2\cos\frac{2(n-1)\pi}{3}\Big). \end{aligned}$$

3.15

Soit $z\in\mathbb{C}$. On a, par l'inégalité triangulaire :

$$|z|=|z-z^2+z^2|\leqslant|z-z^2|+|z^2|=|z|\,|z-1|+|z|^2.$$

• Si $|z|\leqslant 1$, on déduit le résultat voulu :

$$|z|\leqslant|z-1|+|z|^2.$$

• Si $|z|\geqslant 1$, alors $|z|\leqslant|z|^2$, donc a fortiori :

$$|z|\leqslant|z|^2+|z-1|.$$

3.16

1) On a, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leqslant 1$, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|z^3+2\,\mathrm{i}\,z|\leqslant|z^3|+|2\,\mathrm{i}\,z|=|z|^3+2|z|\leqslant 3.$$

2) Voyons si on peut choisir z de façon qu'il y ait égalité dans chacune des deux inégalités précédentes. On sait qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ici si et seulement si z^3 et $2\,\mathrm{i}\,z$ sont positivement liés, c'est-à-dire : $z^3=2\,\mathrm{i}\,\lambda z,\ \lambda\in\mathbb{R}_+$. Pour $|z|=1$, on déduit, en passant aux modules, $1=2\lambda,\ \lambda=\dfrac{1}{2}$.

Puis : $z^3=2\,\mathrm{i}\,\lambda z \iff z^3=\mathrm{i}\,z \iff z^2=\mathrm{i}$, car $z\neq 0$. Une racine carrée complexe de $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ est $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})$.

En prenant $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})$, on a :

$$|z|=1,\ z^2=\mathrm{i},\ z^3=\mathrm{i}\,z,\ |z^3+2\,\mathrm{i}\,z|=|3\,\mathrm{i}\,z|=3|z|=3.$$

On conclut : $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{|z|\leqslant 1}|z^3+2\,\mathrm{i}\,z|=3.$

3.17

a) On a, pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(z_k-z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{z_k\overline{z_k}}{|z_k|}-\sum_{k=1}^{n}\frac{z\overline{z_k}}{|z_k|} \\ &= \sum_{k=1}^{n}|z_k|-z\,\overline{\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{|z_k|}}=\sum_{k=1}^{n}|z_k|. \end{aligned}$$

b) D'après *a)*, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(z_k-z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|}=\sum_{k=1}^{n}|z_k|\in\mathbb{R}_+$, et, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}|z_k| &= \sum_{k=1}^{n}(z_k-z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|}=\Big|\sum_{k=1}^{n}(z_k-z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|}\Big| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k-z|\frac{|z_k|}{|z_k|}=\sum_{k=1}^{n}|z_k-z|. \end{aligned}$$

3.18

a) En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{cases} |2u|=\big|(u+v)+(u-v)\big|\leqslant|u+v|+|u-v| \\ |2v|=\big|(u+v)-(u-v)\big|\leqslant|u+v|+|u-v|, \end{cases}$$

d'où, en additionnant puis en simplifiant par 2 :

$$|u|+|v|\leqslant|u+v|+|u-v|.$$

b) • D'après *a)* appliqué à (z_1,z_2) et à (z_3,z_4) à la place de (u,v), on a :

$$\begin{cases} |z_1|+|z_2|\leqslant|z_1+z_2|+|z_1-z_2| \\ |z_3|+|z_4|\leqslant|z_3+z_4|+|z_3-z_4|, \end{cases}$$

puis en additionnant :

$$\begin{aligned} & |z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4| \\ & \qquad\leqslant|z_1+z_2|+|z_3+z_4|+|z_1-z_2|+|z_3-z_4|. \end{aligned}$$

• D'après *a)* appliqué à (z_1-z_2,z_3-z_4) à la place de (u,v), on a :

$$\begin{aligned} & |z_1-z_2|+|z_3-z_4|\leqslant|z_1-z_2+z_3-z_4|+|z_1-z_2-z_3+z_4| \\ & =\big|(z_1+z_3)-(z_2+z_4)\big|+\big|(z_1+z_4)-(z_2+z_3)\big| \\ & \qquad\leqslant|z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu :

$$\begin{aligned} & |z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4| \\ & \qquad\leqslant|z_1+z_2|+|z_1+z_3|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3| \\ & \qquad\qquad+|z_2+z_4|+|z_3+z_4|. \end{aligned}$$

3.19

On a, en utilisant le binôme de Newton, puis une permutation de deux symboles de sommation :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1}(z+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(\omega^k)^\ell z^{n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{\ell}\omega^{k\ell}z^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}z^{n-\ell}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^\ell)^k. \end{aligned}$$

On calcule cette dernière somme (portant sur l'indice k), en séparant en cas selon que ω^ℓ est égal à 1 on non :

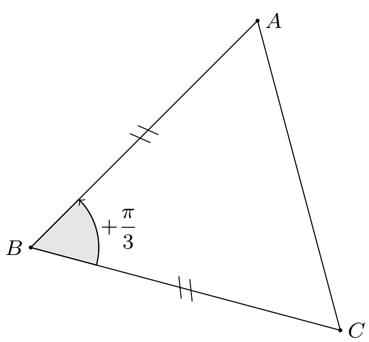
• si $\ell = 0$ ou $\ell = n$, alors $\omega^\ell = 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^\ell)^k = n$

• si $\ell \neq 0$ et $\ell \neq n$, alors, comme $0 < \ell < n$, on a $\omega^\ell \neq 1$, d'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^\ell = \frac{1-(\omega^\ell)^n}{1-\omega^\ell} = \frac{1-(\omega^n)^\ell}{1-\omega^\ell} = 0.$

Ainsi, dans la somme S_n, il ne reste que les termes d'indices $\ell = 0,\ \ell = n$, d'où : $S_n = \binom{n}{0}z^n n + \binom{n}{n}z^0 n = n(z^n+1)$.

3.20

a) Le triangle ABC est équilatéral direct en A si et seulement si A se déduit de C par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, c'est-à-dire : (1) $\quad a - b = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)$.



Mais $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = -\mathrm{j}^2$, donc :

(1) $\iff a - b + \mathrm{j}^2(c-b) = 0 \iff a + \mathrm{j}\,b + \mathrm{j}^2 c = 0.$

b)

$$\begin{aligned} & ABC \text{ est équilatéral} \\ \iff\ & ABC \text{ équilatéral direct ou équilatéral indirect} \\ \iff\ & a + \mathrm{j}\,b + \mathrm{j}^2 c = 0 \quad\text{ou}\quad a + \mathrm{j}\,c + \mathrm{j}^2 b = 0 \\ \iff\ & (a + \mathrm{j}\,b + \mathrm{j}^2 c)(a + \mathrm{j}^2 b + \mathrm{j}\,c) = 0 \\ \iff\ & a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0. \end{aligned}$$

3.21

1re méthode (algébrique) :

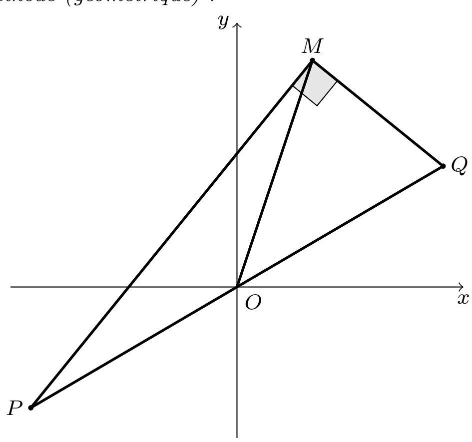
Puisque u, v sont les racines carrées complexes de z, on a : $v = -u$ et $z = u^2$.

On a :

$$\begin{aligned} & (z,u,v) \text{ rectangle en } z \\ \iff\ & \text{Ré}\big((\overline{u-z})(v-z)\big) = 0 \\ \iff\ & \text{Ré}\big((\overline{u} - \overline{u}^2)(-u-u^2)\big) = 0 \\ \iff\ & (\overline{u} - \overline{u}^2)(-u-u^2) + (u-u^2)(-\overline{u} - \overline{u}^2) = 0 \\ \iff\ & -\overline{u}u + \overline{u}^2 u - \overline{u}u^2 + \overline{u}^2u^2 - u\overline{u} - u\overline{u}^2 + u^2\overline{u} \\ & \qquad + u^2\overline{u}^2 = 0 \\ \iff\ & -2|u|^2 + 2|u|^4 = 0 \\ \iff\ & |u|^2 = 0 \text{ (exclu)} \quad\text{ou}\quad |u|^2 = 1 \\ \iff\ & |u|^2 = 1 \iff |z| = 1. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble cherché est $\mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1.

2è méthode (géométrique) :



Notons M, P, Q les points d'affixes respectives z, u, v. Pour que le triangle MPQ soit rectangle en M, il faut et il suffit que M soit sur le cercle de diamètre PQ, ce qui équivaut à $OM = OP$. Et :

$$\begin{aligned} OM = OP \iff\ & |z| = |u| \iff |u|^2 = |u| \\ \iff\ & \big(|u| = 0 \text{ (exclu)} \quad\text{ou}\quad |u| = 1\big) \\ \iff\ & |z| = 1. \end{aligned}$$

Vrai ou Faux ?

3.1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le conjugué du nombre complexe $1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}$ est $1 - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}$. V F

3.2 Pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$: $\overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v}$. V F

3.3 Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = z\,\overline{z}$. V F

3.4 Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $|z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$. V F

3.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, la somme des racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$ est égale à 0. V F

3.6 Pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$: $|u - v| \leqslant |u| - |v|$. V F

3.7 Pour tous points M_1, M_2 d'affixes z_1, z_2 dans le plan d'origine O, on a : V F

$$\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2} \iff \mathrm{Ré}\,(\overline{z_1}\, z_2) = 0.$$

3.8 Pour tout $b \in \mathbb{C}$, l'application $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto z + b$ se traduit géométriquement par la translation de vecteur d'affixe b. V F

3.9 L'argument du produit de deux nombres complexes non nuls est le produit des arguments de ces deux nombres complexes. V F

3.10 Si $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et si $z_1,\, z_2$ sont les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, alors : V F

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Vrai ou Faux, les réponses

3.1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le conjugué de $1 + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}$ est $1 + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,t}$, et non $1 - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}$. **F**

3.2 C'est une formule du cours. **V**

3.3 Il y a oubli du carré sur $|z|$. La formule correcte est : $|z|^2 = z\overline{z}$. **F**

3.4 On a : $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z\overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$. **V**

3.5 Les racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$ sont les $\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$, et leur somme est : **V**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}} \text{ car } \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}} \neq 1$$

$$= \frac{1-1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}} = 0.$$

3.6 Contrexemple : $u = 0$, $v = 1$.
La formule correcte est : $|u - v| \leqslant |u| + |v|$, qui est l'inégalité triangulaire appliquée aux deux nombres complexes u et $-v$. **F**

3.7 C'est un résultat du cours, traduction de l'orthogonalité de deux vecteurs sur leurs affixes. **V**

3.8 C'est un résultat du cours. **V**

3.9 Le résultat correct est : l'argument du produit de deux nombres complexes non nuls est la somme de leurs arguments. **F**

3.10 C'est un résultat du cours. **V**

Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 4

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Résolution d'équations à inconnue réelle
- Résolution de certaines équations fonctionnelles
- Manipulation des fonctions remarquables : paires, impaires, périodiques, majorées, minorées, bornées, croissantes, décroissantes
- Existence de solutions d'une équation
- Existence et propriétés d'une fonction réciproque.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition des fonctions remarquables : paires, impaires, périodiques, majorées, minorées, bornées, croissantes, décroissantes
- Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de continuité sur un segment, théorème de la bijection monotone
- Définition de la fonction partie entière, notée $\lfloor \cdot \rfloor$.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour résoudre une équation à une inconnue réelle

- On sait résoudre les équations et les inéquations du premier degré et du second degré (voir cours).
- Toujours tenir compte des particularités de l'équation ou de l'inéquation proposée : à ce niveau, s'il y a une question, c'est qu'il y a une réponse exprimable.
- Montrer éventuellement que l'équation se ramène à $f(x) = 0$, où f est strictement monotone, ce qui établira que l'équation admet au plus une solution.
- S'il y a des valeurs absolues, essayer de les chasser en séparant en cas, s'il y a des racines carrées, essayer de les chasser par élévation(s) au carré ou faire intervenir la notion de quantité conjuguée.
- Essayer d'étudier les variations d'une fonction associée à l'équation, par exemple celle obtenue en faisant tout passer dans le premier membre.

➟ **Exercices 4.1 à 4.3, 4.5, 4.10, 4.14**

Exemple

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{19-x}+\sqrt{97+x}=14.$$

On a, pour tout $x \in [-97\,;19]$:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{19-x}+\sqrt{97+x}=14 \\
\iff\quad & \left(\sqrt{19-x}+\sqrt{97+x}\right)^2=196 \\
\iff\quad & \sqrt{19-x}\sqrt{97+x}=\frac{1}{2}\big(196-(19-x)-(97+x)\big) \\
\iff\quad & \sqrt{19-x}\sqrt{97+x}=40 \\
\iff\quad & (19-x)(97+x)=1600 \\
\iff\quad & x^2+78x-243=0.
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré. Le discriminant Δ est :

$$\Delta = 78^2+4\cdot 243=7056=84^2.$$

Les solutions sont :

$$x_1=\frac{-78-84}{2}=-81, \qquad x_2=\frac{-78+84}{2}=3.$$

Enfin, ces deux réels sont bien dans l'intervalle $[-97\,;19]$.

On conclut : $\mathcal{S}=\{-81,\,3\}$.

Exemple

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$: $3x^{1/2} + 2x^{1/3} = 5$.

On remarque que 1 est solution.

L'application $x \longmapsto 3x^{1/2} + 2x^{1/3}$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, donc l'équation admet au plus une solution.

On conclut : $\mathcal{S} = \{1\}$.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction est paire , est impaire , est périodique

Revenir à la définition.

➟ **Exercices 4.4, 4.12**

Exemple

Que dire de la composée $g \circ f$ de deux applications $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paires ou impaires ?

1) Si f est paire et g quelconque, alors $g \circ f$ est paire, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(g \circ f)(-x) = g\big(f(-x)\big) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$.

2) • Si f est impaire et g paire, alors $g \circ f$ est paire, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(-x) = g\big(f(-x)\big) = g\big(-f(x)\big) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x).$$

• Si f est impaire et g impaire, alors $g \circ f$ est impaire, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(-x) = g\big(f(-x)\big) = g\big(-f(x)\big) = -g\big(f(x)\big) = -(g \circ f)(x).$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée, est minorée, est bornée

Essayer de :

- revenir à la définition, c'est-à-dire, respectivement :

  $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\quad f(x) \leqslant M$

  $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\quad m \leqslant f(x)$

  $\exists\, C \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\quad |f(x)| \leqslant C$

- appliquer le théorème du cours si f est continue et si X est un segment.

Exemple

Montrer que l'application :

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{2x}{1+x^4}$$

est bornée.

Soit $x \in [0\,;+\infty[$.

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant f(x) = \dfrac{2x}{1+x^4} \leqslant 2x \leqslant 2$.

Si $x \geqslant 1$, alors $0 \leqslant f(x) = \dfrac{2x}{1+x^4} \leqslant \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3} \leqslant 2$.

Ceci montre : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 2$, donc f est bornée.

Méthode

Pour résoudre une équation fonctionnelle

Raisonner clairement par implication puis réciproque, ou exceptionnellement par équivalences logiques.

Essayer d'appliquer l'équation à des valeurs ou des formes particulières de la (des) variable(s), ou passer à une limite.

Par exemple, si l'équation fait apparaître x et $-x$, essayer de l'appliquer à x et à $-x$.

➟ **Exercice 4.13**

Exemple

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x + 3.$

1) Soit f convenant. Soit $x \in \mathbb{R}$.

En appliquant l'hypothèse à x et à $-x$, on a :

$$\begin{cases} 2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x + 3 & L_1 \\ 2f(-x) + f(x) = 3x^2 - x + 3 & L_2 \end{cases}$$

d'où, en effectuant $2L_1 - L_2$ pour faire disparaître $f(-x)$:

$$3f(x) = 2(3x^2 + x + 3) - (3x^2 - x + 3) = 3x^2 + 3x + 3,$$

donc : $f(x) = x^2 + x + 1$.

2) Réciproquement, en notant $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 + x + 1$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2f(x) + f(-x) = 2(x^2 + x + 1) + (x^2 - x + 1) = 3x^2 + x + 3,$$

donc f convient.

On conclut qu'il y a une application et une seule convenant, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 + x + 1$.

Méthode

Pour manipuler la fonction partie entière

Se rapporter à la définition de la partie entière d'un réel :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \Big)$$

ou encore : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \Big).$

➟ **Exercice 4.7**

Exemple

Montrer : $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $n = \lfloor x \rfloor$. On a : $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant x < n + 1$.

Si $n \leqslant x < n + \dfrac{1}{2}$, alors $n \leqslant x + \dfrac{1}{2} < n + 1$ et $2n \leqslant 2x < 2n + 1$, donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = n$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2n$, d'où $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 2n = \lfloor 2x \rfloor$.

Si $n + \dfrac{1}{2} \leqslant x < n + 1$, alors on a $n + 1 \leqslant x + \dfrac{1}{2} < n + 2$ et aussi $2n + 1 \leqslant 2x < 2n + 2$, donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = n + 1$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$, d'où $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 2n + 1 = \lfloor 2x \rfloor$.

On conclut, dans les deux cas, à l'égalité demandée.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow J$ est bijective, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$

Essayer de :

- revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\forall y \in J,\ \exists !\, x \in I, \quad y = f(x).$$

  On pourra éventuellement exprimer l'application réciproque f^{-1} de f. Dans ce contexte, souvent, on ne pourra pas exprimer l'application réciproque f^{-1} de f.

➟ **Exercices 4.16, 4.19**

Exemple

Montrer que l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 + 1$$

est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$y = f(x) \iff y = x^3 + 1 \iff y - 1 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y-1}.$$

Ceci montre que f est bijective et que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}.$$

Exemple

Montrer que l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{x} + x$$

est bijective.

L'application $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x} + x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par opérations) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto x$ le sont, et on a, par opérations :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty, \qquad f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, on conclut que f est bijective.

Énoncés des exercices

4.1 Exemple de résolution d'une équation polynomiale à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\quad x^3 + x^2 + x = -\dfrac{1}{3}.$

4.2 Exemple de résolution d'une équation avec racines carrées dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}.$$

4.3 Exemple de résolution d'une équation avec racines n-èmes dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\quad 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[4]{x} = 9.$

4.4 Obtention d'une périodicité à partir d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 3 \quad \text{et} \quad f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

4.5 Exemple de résolution d'une équation avec racines carrées dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\quad 3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2 - x + 3} = 6.$

4.6 Des inégalités sur des réels

a) Montrer : $\quad \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \dfrac{a^2}{a+b} \geqslant \dfrac{3a-b}{4}.$

b) En déduire : $\quad \forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \quad \dfrac{a^2}{a+b} + \dfrac{b^2}{b+c} + \dfrac{c^2}{c+a} \geqslant \dfrac{a+b+c}{2}.$

4.7 Une partie entière calculable

Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\,)^2 \right\rfloor = 4n+1.$

4.8 Exemple de résolution d'une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\quad 2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[3]{x} \geqslant \sqrt{x}.$

4.9 Une inégalité du second degré sur des réels

Montrer : $\quad \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad (a+b+c)^2 \leqslant 4a^2 + 4b^2 + 2c^2.$

4.10 Résolution d'une équation, utilisation de la stricte monotonie

Résoudre l'équation $\; x^6 + x^4 = 810, \;$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

4.11 Existence d'une solution par théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que l'équation $\; x^{15} = x^{11} + 2, \;$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet au moins une solution.

4.12 Fonctions paires, fonctions impaires

a) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, \quad -x \in I$.
On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^I$ l'espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des applications paires (resp. impaires) de I dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P} = \big\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ \forall x \in I, \quad f(-x) = f(x) \big\},$$

$$\mathcal{I} = \big\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ \forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x) \big\}.$$

Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ supplémentaires dans $\mathcal{E}$, et exprimer, pour toute $f \in \mathcal{E}$, la décomposition linéaire de f sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$.

b) On prend ici $I =]-1\,;\,1[$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Calculer, pour tout $x \in I$, $p(x)$ et $i(x)$, où p et i sont les projetés de f sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ respectivement.

4.13 Exemple d'équation fonctionnelle résolue par simple remplacement

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$.

4.14 Exemple de résolution d'une équation polynomiale à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\quad (x-7)(x-5)(x+4)(x+6) = 608$.

4.15 Un entier caché sous des radicaux

Montrer que le réel $A = \dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} + 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ est un entier et le calculer.

4.16 Expliciter une fonction réciproque

Montrer que l'application $f :]-1\,;\,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

4.17 Condition de composition sur une fonction

Existe-t-il une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f\big(f(x)\big) = x+1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f\big(f(x)-1\big) = 1-x \end{cases}$?

4.18 Exemple d'inéquation fonctionnelle avec utilisation d'une limite

Trouver toutes les applications $f :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in]0\,;\,+\infty[^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{x+y}.$$

4.19 Fonction réciproque, équation

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 + x - 8$.

a) Montrer que f est strictement croissante et bijective. On note f^{-1} la réciproque de f.

b) Résoudre l'équation $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Du mal à démarrer ?

4.1 Faire apparaître le développement d'un cube.

4.2 Essayer de faire disparaître les $\sqrt{\cdot}$, par élévation(s) au carré.

4.3 Utiliser un argument de stricte monotonie d'une fonction.

4.4 Calculer $f(x+2)$, puis $f(x+4)$.

4.5 Remarquer la présence, deux fois, de $x^2 - x$.

4.6 *a)* Faire tout passer dans le premier membre, et étudier le signe de cette différence.

b) Utiliser *a)* trois fois.

4.7 Revenir à la définition de la partie entière d'un réel.

4.8 Effectuer un changement de variable, en exploitant la présence de $x^{1/4}$, $x^{1/3}$, $x^{1/2}$.

4.9 Faire tout passer dans le deuxième membre, et étudier le signe de cette différence.

4.10 Considérer $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^6 + x^4$.

4.11 Considérer $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^{15} - x^{11} - 2$.

4.12 *a)* Revenir à la définition d'un sev, montrer $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ et montrer que tout élément f de $\mathcal{E}$ se décompose sous la forme $f = p + i$, où $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$, par analyse-synthèse.

b) Appliquer les formules obtenues en *a)*.

4.13 Appliquer l'hypothèse à x et à $\dfrac{1}{x}$.

4.14 Essayer de grouper les quatre facteurs du premier membre deux par deux, de manière à faire apparaître une même expression.

4.15 En notant u et v les deux fractions de l'énoncé, étudier $u+v$, u^3+v^3, u^3v^3, pour obtenir une équation satisfaite par A.

4.16 Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \left]-1\,;\,1\right[$. Utiliser une expression conjuguée pour transformer l'écriture.

4.17 Supposer qu'il existe f convenant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f\Big(f\big(f(x)-1\big)\Big)$ de deux façons, et déduire $x = \dfrac{1}{2}$.

4.18 Pour x fixé, faire tendre y vers $+\infty$.

4.19 *a)* Utiliser le théorème de la bijection monotone.

b) Considérer $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto 2f(x) + 3f^{-1}(x)$. Montrer que g est strictement croissante, et remarquer $g(2) = 10$.

Corrigés des exercices

4.1

On a successivement, par des calculs dans $\mathbb{R}$, en faisant apparaître le développement de $(x+1)^3$ par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} & x^3+x^2+x=-\frac{1}{3} \\ \iff\quad & 3x^3+3x^2+3x+1=0 \\ \iff\quad & 2x^3+(x+1)^3=0 \\ \iff\quad & (\sqrt[3]{2}\,x)^3=\big(-(x+1)\big)^3 \\ \iff\quad & \sqrt[3]{2}\,x=-(x+1) \\ \iff\quad & (1+\sqrt[3]{2})x=-1 \\ \iff\quad & x=-\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}\right\}$.

4.2

D'abord, les racines carrées qui interviennent dans l'équation de l'énoncé, notée (1), existent si et seulement si $6-x$, $3-x$, $x+5$, $4-3x$ sont tous $\geqslant 0$, ce qui revient à :

$$-5\leqslant x\leqslant \frac{4}{3}.$$

On a alors, en élevant au carré, les deux membres étant $\geqslant 0$:

$$\begin{aligned} & (1) \\ \iff\quad & \big(\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}\big)^2=\big(\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}\big)^2 \\ \iff\quad & 9-2x+2\sqrt{6-x}\sqrt{3-x} \\ & \qquad =9-2x+2\sqrt{x+5}\sqrt{4-3x} \\ \iff\quad & (6-x)(3-x)=(x+5)(4-3x) \\ \iff\quad & x^2-9x+18=-3x^2-11x+20 \\ \iff\quad & 4x^2+2x-2=0 \iff 2x^2+x-1=0 \\ \iff\quad & (x+1)(2x-1)=0 \iff x=-1 \ \text{ ou } \ x=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, les deux réels trouvés sont dans l'intervalle de définition dégagé plus haut.

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{-1,\ \dfrac{1}{2}\right\}$.

On peut d'ailleurs contrôler ces deux résultats en reportant chacune de ces valeurs dans (1).

4.3

D'abord, les deux membres de l'équation proposée sont définis si et seulement si : $x\geqslant 0$.

L'application $[0\,;+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R},\ x\longmapsto 4\sqrt[3]{x}+5\sqrt[4]{x}-9$ est strictement croissante, donc l'équation proposée admet au plus une solution.

D'autre part, le réel 1 est solution évidente.

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule, $x=1$.

4.4

Soit $x\in\mathbb{R}$. Notons $y=f(x)$. On a :

$$f(x+2)=f\big((x+1)+1\big)=\frac{f(x+1)-5}{f(x+1)-3}$$

$$=\frac{\dfrac{y-5}{y-3}-5}{\dfrac{y-5}{y-3}-3}=\frac{-4y+10}{-2y+4}=\frac{2y-5}{y-2},$$

puis :

$$f(x+4)=f\big((x+2)+2\big)=\frac{2f(x+2)-5}{f(x+2)-2}$$

$$=\frac{2\dfrac{2y-5}{y-2}-5}{\dfrac{2y-5}{y-2}-2}=\frac{-y}{-1}=y=f(x).$$

On conclut que f est 4-périodique.

4.5

On remarque que x n'intervient que par le groupement x^2-x, donc on effectue le changement d'inconnue $y=x^2-x$. En notant (1) l'équation proposée, on a alors, pour $y+3\geqslant 0$:

$$\begin{aligned} & (1) \\ \iff\quad & 3y-4\sqrt{y+3}=6 \\ \iff\quad & 3y-6=4\sqrt{y+3} \\ \iff\quad & \begin{cases} 3y-6\geqslant 0 \\ (3y-6)^2=16(y+3) \end{cases} \\ \iff\quad & \begin{cases} y\geqslant 2 \\ 9y^2-52y-12=0 \end{cases} \\ \iff\quad & \begin{cases} y\geqslant 2 \\ y=6 \ \text{ ou } \ y=-\dfrac{2}{9} \end{cases} \\ \iff\quad & y=6, \end{aligned}$$

et la valeur 6 trouvée pour y vérifie $y+3\geqslant 0$.

Ensuite :

$$y=6 \iff x^2-x=6 \iff x^2-x-6=0$$

$$\iff (x-3)(x+2)=0.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\{-2,\ 3\}$.

On peut d'ailleurs contrôler ces deux résultats en reportant chacune de ces valeurs dans (1).

4.6

a) On a, pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} = \frac{4a^2-(a+b)(3a-b)}{4(a+b)} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geqslant 0,$$

d'où l'inégalité voulue.

b) On applique le résultat de *a)* à (a,b), (b,c), (c,a), puis on additionne :

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{3a-b}{4}+\frac{3b-c}{4}+\frac{3c-a}{4} = \frac{a+b+c}{2}.$$

4.7

Par définition de la partie entière, puisque $4n+1 \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}\big((\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2\big) = 4n+1\\
\iff\quad & 4n+1 \leqslant (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 < 4n+2\\
\iff\quad & 4n+1 \leqslant 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2\\
\iff\quad & \begin{cases} 2n \leqslant 2\sqrt{n(n+1)}\\ 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \end{cases}\\
\iff\quad & \begin{cases} n^2 \leqslant n^2+n\\ 4n^2+4n < 4n^2+4n+1, \end{cases}
\end{aligned}$$

et ces deux dernières inégalités sont vraies, ce qui prouve, par équivalences logiques successives, le résultat voulu.

4.8

D'abord, les termes de l'inéquation existent si et seulement si $x \geqslant 0$.

Puisque $\sqrt[4]{x}$ et $\sqrt[3]{x}$ interviennent, notons $t = x^{\frac{1}{12}}$, de sorte que :

$$\sqrt[4]{x} = \big(t^{12}\big)^{\frac14} = t^3,\quad \sqrt[3]{x} = \big(t^{12}\big)^{\frac13} = t^4,\quad \sqrt{x} = \big(t^{12}\big)^{\frac12} = t^6.$$

On a alors, en notant (1) l'inéquation de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
& (1)\\
\iff\quad & 2t^3+3t^4 \geqslant t^6\\
\iff\quad & t^3(t^3-3t-2) \leqslant 0\\
\iff\quad & t^3(t+1)(t^2-t-2) \leqslant 0\\
\iff\quad & t^3(t+1)(t+1)(t-2) \leqslant 0\\
\iff\quad & t^3(t+1)^2(t-2) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Puisque $t = x^{\frac{1}{12}} \geqslant 0$, on a $t+1>0$, donc :

$$(1) \iff t^3(t-2) \leqslant 0 \iff 0 \leqslant t \leqslant 2 \iff 0 \leqslant x \leqslant 2^{12} = 4096.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est donc l'intervalle $[0\,;\,4096]$.

4.9

On a, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, en considérant qu'il s'agit d'un trinôme en c, que l'on met sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
& 4a^2+4b^2+2c^2-(a+b+c)^2\\
=\ & 3a^2+3b^2+c^2-2ab-2ac-2bc\\
=\ & c^2-2(a+b)c+3a^2+3b^2-2ab\\
=\ & \big(c-(a+b)\big)^2-(a+b)^2+3a^2+3b^2-2ab\\
=\ & (c-a-b)^2+2a^2+2b^2-4ab\\
=\ & (c-a-b)^2+2(a-b)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

4.10

• L'application $\quad f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^6+x^4$

est strictement croissante, donc injective.

Il en résulte que l'équation $f(x) = 810$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet au plus une solution.

• D'autre part, on remarque : $f(3) = 810$.

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule : $x = 3$.

4.11

L'application $\quad f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^{15}-x^{11}-2$

est continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $\quad f(0) = -2 < 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il en résulte qu'il existe $c \in [0\,;+\infty[$ tel que $f(c) = 0$, d'où la conclusion voulue.

4.12

a) 1) • On a $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ et $0 \in \mathcal{P}$, où 0 désigne l'application nulle.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{P}$. On a :

$$\forall x \in I,\quad (\alpha f+g)(-x) = \alpha f(-x)+g(-x) = \alpha f(x)+g(x) = (\alpha f+g)(x),$$

donc : $\alpha f+g \in \mathcal{P}$.

Ceci montre que $\mathcal{P}$ est un sev de $\mathcal{E}$.

2) • On a $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}$ et $0 \in \mathcal{I}$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{I}$. On a :

$$\forall x \in I,\quad (\alpha f+g)(-x) = \alpha f(-x)+g(-x) = -\alpha f(x)-g(x) = -(\alpha f+g)(x),$$

donc : $\alpha f+g \in \mathcal{I}$.

Ceci montre que $\mathcal{I}$ est un sev de $\mathcal{E}$.

3) • Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. On a alors :

$$\forall x \in I,\quad \big(f(-x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)\big),$$

d'où, en soustrayant : $\forall x \in I,\ \ 2f(x) = 0$, puis : $f = 0$.

Ceci montre : $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

• Soit $f \in \mathcal{E}$. Cherchons $p \in \mathcal{P}$, $i \in \mathcal{I}$ telles que : $f = p+i$.

$*$ *Analyse :*

Si (p,i) convient, alors : $\forall x \in I,\ \ f(x) = p(x)+i(x)$,

d'où, en appliquant ceci à $-x$:

$$\forall x \in I,\quad f(-x) = p(-x)+i(-x) = p(x)-i(x),$$

puis, en additionnant, en soustrayant :

$$\forall x \in I,\quad p(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big),\quad i(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big).$$

$*$ *Synthèse :* Réciproquement, considérons les applications $p, i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par les formules obtenues ci-dessus.

On a, pour tout $x \in I$:

$$\begin{cases} p(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x)+f(x)\big) = p(x) \\ i(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x)-f(x)\big) = -i(x) \\ p(x)+i(x) = f(x), \end{cases}$$

donc (p, i) convient.

Ceci montre : $\forall f \in \mathcal{E},\ \exists\,(p,i) \in \mathcal{E},\quad f = p+i,$

donc : $\mathcal{P}+\mathcal{I} = \mathcal{E}$.

Comme $\mathcal{P}\cap\mathcal{I} = \{0\}$ et $\mathcal{P}+\mathcal{I} = \mathcal{E}$, on conclut que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$, et nous avons obtenu, pour toute $f \in \mathcal{E}$ la décomposition linéaire de f sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$, $f = p+i$, où p, i sont définies plus haut en fonction de f.

b) D'après la solution de *a)*, la décomposition linéaire de f sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ est donnée, pour tout $x \in I$, par :

$$\begin{aligned} p(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(1+x)+(1-x)}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

4.13

1) Soit f convenant.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En appliquant l'hypothèse à x et à $\dfrac{1}{x}$ à la place de x, on a :

$$\begin{cases} f(x)+3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 & \Big|\ -1 \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+3f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2} & \Big|\ 3 \end{cases}$$

d'où, en combinant avec les coefficients indiqués, pour faire disparaître $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$: $8f(x) = \dfrac{3}{x^2}-x^2$.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f(x) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{x^2}-x^2\right) = \dfrac{3-x^4}{8x^2}$.

2) Réciproquement, considérons l'application :

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto f(x) = \frac{3-x^4}{8x^2}.$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3-x^4}{8x^2}+3\frac{3-\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{8}{x^2}} = \frac{3-x^4}{8x^2}+3\frac{3x^4-1}{8x^2} = x^2,$$

donc f convient.

On conclut qu'il y a une application et une seule convenant,

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{3-x^4}{8x^2}.$$

4.14

On remarque que :

$(x-7)(x+6) = x^2-x-42$ et $(x-5)(x+4) = x^2-x-20$.

Ainsi, x n'intervient que par le groupement x^2-x.
On effectue donc le changement d'inconnue $y = x^2-x$.
En notant (1) l'équation proposée, on a alors :

$(1) \iff (y-42)(y-20) = 608 \iff y^2-62y+232 = 0.$

Le discriminant Δ de cette équation du second degré est :

$$\Delta = 62^2-4\cdot 232 = 2916 = 54^2,$$

d'où les solutions en y :

$$(1) \iff y = \frac{62\pm 54}{2} \iff y = 4 \quad\text{ou}\quad y = 58.$$

On revient à x, en résolvant deux équations du second degré :

- $y = 4 \iff x^2-x-4 = 0 \iff x = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$
- $y = 58 \iff x^2-x-58 = 0 \iff x = \dfrac{1\pm\sqrt{233}}{2}$.

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est :

$$\left\{\frac{1-\sqrt{17}}{2},\ \frac{1+\sqrt{17}}{2},\ \frac{1-\sqrt{233}}{2},\ \frac{1+\sqrt{233}}{2}\right\}.$$

4.15

Notons $u = \dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}},\quad v = \dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$.

On a alors $A = u+v$ et :

- $u^3+v^3 = \dfrac{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}+\dfrac{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = 36$
- $u^3v^3 = \dfrac{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$
  $= \dfrac{54^2\cdot 3-41^2\cdot 5}{3^3} = \dfrac{343}{27} = \dfrac{7^3}{3^3} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^3,$

donc, comme $uv \in \mathbb{R}$: $uv = \dfrac{7}{3}$.

D'où : $A^3 = (u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$
$= (u^3+v^3)+3uv(u+v) = 36+7A.$

Ainsi, A vérifie : $A^3-7A-36 = 0$ (1).
Une solution évidente est 4, donc :

$$(1) \iff (A-4)(A^2+4A+9) = 0.$$

Le discriminant $\Delta = 4^2-4\cdot 9 = -20$ est < 0, donc, comme A est réel, A^2+4A+9 n'est pas nul, et on conclut : $A = 4$.

4.16

On a, pour tout $(x,y) \in\ ]-1\,;1[\times\mathbb{R}$:

$$y = f(x) \iff y = \frac{x}{1-x^2} \iff yx^2+x-y = 0 \ \ (1).$$

Si $y = 0$, alors : $(1) \iff x = 0$.

Si $y \neq 0$, l'équation (1), d'inconnue $x \in]-1\,;1[$, est du second degré. Son discriminant est $\Delta = 1 + 4y^2 > 0$, donc (1) admet deux solutions distinctes, qui sont :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4y^2}}{2y}, \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}.$$

Mais : $\quad |x_1| = \dfrac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2|y|} > \dfrac{\sqrt{1+4y^2}}{2|y|} > 1,$

donc $x_1 \notin]-1\,;1[$.

D'autre part, par produit des racines d'une équation du second degré : $x_1x_2 = \dfrac{-y}{y} = -1$, donc $|x_1x_2| = 1$,

d'où $x_1 \neq 0$ et $|x_2| = \dfrac{1}{|x_1|} < 1$, donc $x_2 \in]-1\,;1[$.

Ainsi, pour $x \neq 0$: (1) $\iff x = \dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$.

Remarquons, par utilisation d'une expression conjuguée :

$$\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} = \frac{4y^2}{2y\big(1+\sqrt{1+4y^2}\big)} = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}.$$

Cette dernière formulation est valable aussi lorsque $y = 0$.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in]-1\,;1[\times\mathbb{R}$:

$$y = f(x) \iff x = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}.$$

Ceci montre que f est bijective et que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}.$$

4.17

Soit f convenant.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f\big[f\big(f(x)-1\big)\big] = \big(f(x)-1\big)+1 = f(x) \\ f\big[f\big(f(x)-1\big)\big] = f(1-x), \end{cases}$$

d'où : $f(x) = f(1-x)$, puis : $f\big(f(x)\big) = f\big(f(1-x)\big)$.

Mais : $f\big(f(x)\big) = x+1 \quad$ et $\quad f\big(f(1-x)\big) = (1-x)+1$,

d'où : $x+1 = (1-x)+1$, donc : $x = \dfrac{1}{2}$,

contradiction avec $x = 0$ par exemple.

On conclut qu'il n'existe pas d'application f convenant.

4.18

1) Soit f convenant.

Soit $x \in]0\,;+\infty[$ fixé. On a : $0 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{x+y}$ et $\dfrac{1}{x+y} \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par théorème d'encadrement : $|f(x) - f(y)| \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $f(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Ceci montre que f admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est $f(x)$. Par unicité de la limite de f en $+\infty$, il s'ensuit que $f(x)$ ne dépend pas de x, et donc f est constante.

2) Réciproque évidente.

On conclut : les applications convenant sont les applications constantes.

4.19

a) 1) 1re méthode :

Les applications $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto x - 8$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, donc, par addition, $f : x \longmapsto x^3 + x - 8$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2è méthode :

L'application f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 + 1 > 0,$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) L'application f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, strictement croissante, de limite $-\infty$ en $-\infty$ et de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective.

b) Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2f(x) + 3f^{-1}(x).$$

Puisque f et f^{-1} sont strictement croissantes, par addition avec coefficients > 0, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $g(x) = 10$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet au plus une solution.

On remarque : $f(2) = 2^3 + 2 - 8 = 2$, donc $f^{-1}(2) = 2$,

puis : $g(2) = 2f(2) + 3f^{-1}(2) = 2\cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$,

ce qui montre que 2 est solution.

Finalement, l'équation proposée admet une solution et une seule : $x = 2$.

CORRIGÉS

Vrai ou Faux ?

4.1 Si le produit de deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle, alors l'une au moins de ces deux fonctions est la fonction nulle. V F

4.2 Pour deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, si on n'a pas $f \leqslant g$, alors on a $g \leqslant f$. V F

4.3 Si une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas paire, alors elle est impaire. V F

4.4 Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont décroissantes et à valeurs $\geqslant 0$, alors la fonction produit fg est décroissante. V F

4.5 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, alors f est minorée au voisinage de $+\infty$. V F

4.6 Soient $a \in \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ell \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$. V F
Si f admet ℓ pour limite en a et si $\ell \leqslant c$, alors, pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant c$.

4.7 Soient $a \in \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ell \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$. V F
Si f admet ℓ pour limite en a et si pour tout x au voisinage de a on a $f(x) < c$, alors $\ell < c$.

4.8 Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. V F

4.9 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors f atteint au moins l'une de ses bornes. V F

4.10 Si une application $f :]0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $]0\,;1[$, alors f est bornée sur $]0\,;1[$. V F

Vrai ou Faux, les réponses

4.1 Contrexemple : $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad g : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. **F**

4.2 Contrexemple : $f : x \longmapsto \sin x, \quad g : x \longmapsto \cos x.$ **F**

4.3 Contrexemple : l'application $f : x \longmapsto x + 1$ n'est ni paire ni impaire. **F**

4.4 Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 \leqslant x_2$, on a $0 \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et $0 \leqslant g(x_1) \leqslant g(x_2)$, d'où par produit, $0 \leqslant f(x_1)f(x_2) \leqslant g(x_1)g(x_2)$. **V**

4.5 Puisque $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [a\,;+\infty[, \quad f(x) \geqslant 0$, donc f est minorée au voisinage de $+\infty$. **V**

4.6 Contrexemple : $a = 0, \ f : x \longmapsto x, \ \ell = 0, \ c = 0.$ **F**

Le résultat devient vrai si l'on remplace l'hypothèse d'inégalité au sens large $\ell \leqslant c$ par l'hypothèse d'inégalité au sens strict $\ell < c$.

4.7 Contrexemple : $a = 0, \ f : x \longmapsto x, \ \ell = 0, \ c = 0.$ **F**

Le résultat devient vrai si l'on remplace la conclusion au sens strict $\ell < c$ par la conclusion au sens large $\ell \leqslant c$.

4.8 C'est un résultat du cours, conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. **V**

4.9 Contrexemples : $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan} x$, ou $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$. **F**

4.10 Contrexemple : $f :]0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. **F**

Chapitre 5

Calcul différentiel élémentaire

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calcul éventuel d'une dérivée première, d'une dérivée n-ème
- Existence de zéros d'une équation
- Étude des variations d'une fonction, représentation graphique
- Séparation des zéros d'une fonction, résolution d'équations et d'inéquations
- Résolution de certaines équations fonctionnelles
- Obtention d'inégalité à une ou plusieurs variables.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés algébriques de la dérivabilité, de la dérivée, de la dérivée n-ème
- Formule de Leibniz pour la dérivée n-ème d'un produit
- Lien entre dérivée et sens de variation.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour décider si une fonction f est monotone sur un intervalle I, ou pour étudier les variations de f

- Calculer f' (si f est dérivable) et étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in I$.
- On pourra être amené à étudier le signe de $f''(x)$ ou celui d'autres fonctions liées à f.

➟ **Exercices 5.1, 5.4, 5.12**

Exemple

Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x} + x^3$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{e}^{\,x} + 3x^2 > 0,$$

donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Remarque : On peut aussi dire que f est somme de deux fonctions strictement croissantes.

Exemple

Montrer que l'application

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x+1)\ln x$$

est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Par opérations, f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x},$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

On en déduit le signe de $f''(x)$, puis le sens de variation de f'.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	>0	$\nearrow$	
$f(x)$	‖		$\nearrow$		

On déduit : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) > 0$,

donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Méthode

Pour déterminer le nombre et la situation des zéros d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Étudier les variations de f, en étudiant le signe de $f'(x)$, pour $x \in I$, si f est dérivable sur I.

➟ **Exercices 5.2, 5.3**

Exemple

Déterminer le nombre de zéros réels de

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

On en déduit le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de f.

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		1		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$			0			$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty < 0, \quad f(-1) = 3 > 0,$$

$$f(1) = -1 < 0, \quad f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty > 0.$$

On en déduit, d'après le théorème de la bijection monotone par intervalles, que f admet exactement trois zéros réels, notés x_1, x_2, x_3, et que l'on a : $x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3$.

Méthode

Pour résoudre une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue est supposée dérivable

Dériver une ou plusieurs fois par rapport à une des variables du contexte

➟ **Exercices 5.5, 5.7**

Exemple

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x^2 + y^2) = f(x+y).$$

1) Soit f convenant.
En dérivant par rapport à x, pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xf'(x^2+y^2) = f'(x+y).$$

En remplaçant x par 0, on déduit : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad 0 = f'(y)$,
donc f est constante.
2) Réciproquement, si f est constante sur $\mathbb{R}$, il est clair que f convient.
Finalement, les fonctions cherchées sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour déterminer la borne inférieure ou la borne supérieure (si elles existent) d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Étudier les variations de f, en étudiant le signe de $f\,'(x)$, pour $x \in I$, si f est dérivable sur I.

➟ **Exercice 5.6**

Exemple

Existence et calcul de

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [0\,;+\infty[} \frac{x}{x^4+1}.$$

L'application $f : [0\,;\,+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{x}{x^4+1}$

est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$f\,'(x) = \frac{(x^4+1) - x(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{1-3x^4}{(x^4+1)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ceci montre que la borne supérieure demandée existe et qu'elle est égale à $f\Big(\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^{1/4}\Big)$.

On a : $f\Big(\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^{1/4}\Big) = \dfrac{\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^{1/4}}{\dfrac{1}{3}+1} = \dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^{1/4} = \dfrac{3^{3/4}}{4} \simeq 0,57...$

Méthode

Pour établir une inégalité à une variable réelle

Faire tout passer dans le premier membre et étudier les variations de la fonction définie par ce premier membre

➟ **Exercices 5.9, 5.10, 5.13**

Exemple

Montrer :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad x^2 \leqslant 2\ln(x\sqrt{\mathrm{e}}).$$

L'application $f :]0\,;\,+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^2 - 2\ln(x\sqrt{\mathrm{e}})$

est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad f\,'(x) = 2x - 2\frac{1}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

On a : $f(1) = 1 - 2\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = 1 - 2\dfrac{1}{2} = 0.$

On obtient : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f(x) \geqslant 0,$

ce qui montre l'inégalité voulue.

Méthode

Pour établir une inégalité à plusieurs variables réelles

Fixer toutes les variables sauf une, et étudier les variations d'une fonction de cette variable

➟ **Exercices 5.11, 5.14, 5.15, 5.17**

Exemple

Montrer :

$\forall (x,y) \in [0\,;1] \times [0\,;+\infty[,$

$$\sqrt{1+y^2} \geqslant xy + \sqrt{1-x^2}.$$

Soit $x \in [0\,;1]$ fixé.

L'application

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \sqrt{1+y^2} - xy - \sqrt{1-x^2}$$

est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$\forall y \in [0\,;+\infty[, \quad f'(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - x.$$

On a, pour tout $y \in [0\,;+\infty[$:

$$f'(y) \geqslant 0 \iff y \geqslant x\sqrt{1+y^2} \iff y^2 \geqslant x^2(1+y^2) \iff (1-x^2)y^2 \geqslant x^2.$$

On peut supposer $x \neq 1$ car, pour $x = 1$, l'inégalité voulue est immédiate.

On en déduit le tableau de variations de f :

y	0		$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$		$\searrow$		$\nearrow$	

On a : $f\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} = 0.$

Il en résulte : $\forall y \in [0\,;+\infty[, \quad f(y) \geqslant 0,$

ce qui montre l'inégalité voulue.

Remarque : On peut aussi démontrer cette inégalité grâce à l'inégalité de Cauchy et Schwarz, appliquée dans $\mathbb{R}^2$ usuel, aux deux vecteurs $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$ et $(y, 1)$.

Énoncés des exercices

5.1 Étude des variations d'une fonction

Soit $(a,b) \in]0\,;+\infty[^2$ tel que $a<b$. Montrer que l'application

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

est strictement croissante.

5.2 Nombre et situation des zéros d'une fonction polynomiale

Combien le polynôme $P = \mathrm{X}^5 - 5\mathrm{X} + 2$ a-t-il de zéros réels ?

5.3 Nombre et situation des zéros d'une fonction

Combien la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (x-1)\,\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}\,x + 1$ a-t-elle de zéros ?

5.4 Étude et représentation graphique d'une fonction explicitée

Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x\sqrt{1-x^2}}.$$

On pourra remarquer : $\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1 - 2x\sqrt{1-x^2}$.

5.5 Exemple de résolution d'une équation fonctionnelle par dérivation

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

5.6 Calcul d'une borne inférieure par étude des variations d'une fonction

Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}} \left(\sqrt{(x-1)^2+9} + \sqrt{(x-8)^2+16}\right)$.

5.7 Exemple d'équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue est supposée dérivable

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x^4+y) = x^3 f(x) + f\big(f(y)\big).$$

5.8 Exemple de résolution d'une équation à une inconnue réelle, par étude des variations d'une fonction

Résoudre dans $\mathbb{R}_+$: $\qquad 17 + 2^x = (x+2)^2.$

5.9 Exemple d'inégalité à une variable réelle

Montrer : $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\quad \sqrt{x^2+(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2+x^2} \geqslant 2.$

5.10 Exemples d'inégalités à une variable réelle

a) Montrer : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\quad 3\sin x \leqslant x(2+\cos x)$.

b) Montrer : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

5.11 Exemple d'inégalité à plusieurs variables réelles

Soient $a,\ b,\ \alpha,\ \beta \in]0\,;\,+\infty[$. Montrer : $\alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{\frac{1}{\beta}} \geqslant (\alpha+\beta)(ab)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$,
et étudier le cas d'égalité.
Par exemple : $\forall (a,b) \in]0\,;\,+\infty[^2,\quad 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

5.12 Un encadrement de $\sin x$ et de $\cos x$ entre des polynômes

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n, S_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par :

$$\begin{cases} C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\[2ex] S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases}$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\quad (-1)^{n+1}\big(\cos x - C_n(x)\big) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (-1)^{n+1}\big(\sin x - S_n(x)\big) \geqslant 0.$$

Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \text{et} \qquad x - \frac{x^3}{3} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

5.13 Exemple d'inégalité à une variable réelle

Montrer : $\forall x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[,\quad \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$.

5.14 Exemple d'inégalité à trois variables réelles

Soient $x, y, z \in]0\,;\,+\infty[$ tels que $x \leqslant y+z$. Montrer : $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{y}{1+y} + \dfrac{z}{1+z}$.

5.15 Exemples d'inégalités à deux ou trois variables réelles

a) Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\quad xy \leqslant x\ln x + \mathrm{e}^{\,y-1}$.

b) En déduire trois applications $f, g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\quad xyz \leqslant f(x) + g(y) + h(z).$$

5.16 Exemple d'inégalité à deux variables réelles

Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{x}{y} < \dfrac{\sin x}{\sin y} < \dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{y}$.

5.17 Inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\ \forall y \in]0\,;+\infty[,\quad (n-1)x + \dfrac{y^n}{x^{n-1}} \geqslant ny.$

b) En déduire la comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n réels > 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\quad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Du mal à démarrer ?

5.1 Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$.

5.2 Étudier les variations de P et, à cet effet, calculer P'.

5.2 Étudier les variations de f et, à cet effet, calculer f' et f''.

5.4 À l'aide de l'indication fournie dans l'énoncé, obtenir $\text{Déf}(f) = [-1\,;1]$ et $f(x) = \left|x - \sqrt{1-x^2}\right|$.
Étudier le signe de $x - \sqrt{1-x^2}$.

5.5 Pour y fixé, dériver par rapport à x.

5.6 Étudier les variations de la fonction intervenant dans l'énoncé.

5.7 Soit f convenant. Déduire : $\forall y \in \mathbb{R},\ f\big(f(y)\big) = f(y)$, puis une équation fonctionnelle plus simple que celle de l'énoncé et dériver par rapport à y, pour x fixé.

5.8 Étudier les variations de $f : x \longmapsto 17 + 2^x - (x+2)^2$.

5.9 Étudier les variations de la fonction donnée par le premier membre de l'inégalité de l'énoncé.

5.10 *a)* Étudier les variations de

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x(2+\cos x) - 3\sin x.$$

b) Montrer que l'encadrement proposé se ramène à :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) < -\frac{1}{x+1}.$$

Montrer : $\quad \forall t \in]-1\,;+\infty[,\quad \ln(1+t) \leqslant t.$

5.11 Simplifier un peu l'étude en notant $u = \ln a$, $v = \ln b$. Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, étudier les variations d'une fonction de la variable v.

5.12 Récurrence sur n, avec étude de variations de fonctions.

5.13 Étudier les variations de $x \longmapsto \dfrac{\sin^3 x}{\cos x} - x^3$.

5.14 Considérer l'application :

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \frac{t}{1+t},$$

et montrer qu'il suffit de prouver :

$$\forall (y,z) \in]0\,;+\infty[^2,\quad f(y+z) < f(y) + f(z).$$

Pour $z \in]0\,;+\infty[$ fixé, étudier les variations de :

$$g : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto f(t) + f(z) - f(t+z).$$

5.15 *a)* Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, étudier les variations de

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x\ln x + \mathrm{e}^{\,y-1} - xy.$$

b) Appliquer *a)* à $(xy,\, z)$, à $(y,\, x\ln x)$, à $(x,\, y\ln y)$.

5.16 Étudier les variations de $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $\left]0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

5.17 *a)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0\,;+\infty[$ fixés, étudier les variations de :

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad y \longmapsto (n-1)x + \frac{y^n}{x^{n-1}} - ny.$$

b) Récurrence sur n.

Pour le passage de $n-1$ à n, pour un n-uplet $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ donné, noter :

$$x = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1},\quad y = (x_n\, x^{n-1})^{1/n},$$

de sorte que $\dfrac{y^n}{x^{n-1}} = x_n$, et utiliser *a)*.

Corrigés des exercices

5.1

L'application f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \dfrac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\big(\ln(1+bx)\big)^2} = \frac{N(x)}{(1+ax)(1+bx)\big(\ln(1+bx)\big)^2},$$

en notant

$N :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},$
$\quad x \longmapsto N(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax),$

et l'étude du signe de $f'(x)$ se ramène à l'étude du signe de $N(x)$.

L'application N est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$N'(x) = \big(ab\ln(1+bx)+ab\big) - \big(ba\ln(1+ax)+ba\big) = ab\big(\ln(1+bx) - \ln(1+ax)\big) > 0,$$

donc N est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

De plus : $N(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Il en résulte : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad N(x) > 0$.

On a donc :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) > 0,$$

et on conclut que f est strictement croissante.

5.2

L'application polynomiale $P : x \longmapsto x^5 - 5x + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\quad P'(x) = 5(x^4 - 1)$,

d'où le tableau de variations de P :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Puisque P est continue et strictement monotone par intervalles, on conclut que P admet exactement trois zéros réels, notés a, b, c, et que : $a < -1 < b < 1 < c$.

5.3

L'application $f : x \longmapsto (x-1)\,\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}\,x + 1$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = x\,\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}\,,\qquad f''(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{\,x},$$

d'où les tableaux de variations de f', puis de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$-\mathrm{e}$	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$\searrow$		< 0	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f(1) = -\,\mathrm{e} + 1 < 0$.

Puisque f est continue et strictement monotone par intervalles, on conclut que f admet exactement deux zéros réels, notés a, b, et que : $a < 1 < b$.

5.4

1) Existence et expression de f

• On a, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$:

$$\big(x - \sqrt{1-x^2}\big)^2 = x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) = 1 - 2x\sqrt{1-x^2},$$

donc : $\quad f(x) = \big|x - \sqrt{1-x^2}\big|$.

D'autre part, si $x \in \mathbb{R} - [-1\,;\,1]$, alors $\sqrt{1-x^2}$ n'existe pas, donc $f(x)$ n'existe pas.

Ainsi : Déf$\,(f) = [-1\,;\,1]$

et : $\quad \forall x \in [-1\,;\,1],\quad f(x) = \big|x - \sqrt{1-x^2}\big|$.

• Pour supprimer l'intervention de la valeur absolue, étudions le signe de $x - \sqrt{1-x^2}$.

Soit $x \in [-1\,;\,1]$.

$*$ Si $x \in [-1\,;\,0]$, alors $x - \sqrt{1-x^2} \leqslant 0$, donc $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$.

$*$ Si $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$x - \sqrt{1-x^2} \geqslant 0 \iff x \geqslant \sqrt{1-x^2} \iff x^2 \geqslant 1 - x^2 \iff 2x^2 \geqslant 1 \iff x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On conclut à l'expression de f, par séparation en cas :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} - x & \text{si } \ -1 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\[2mm] x - \sqrt{1-x^2} & \text{si } \ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2) Continuité

D'après la formule donnant f dans l'énoncé, et par théorèmes généraux, f est continue sur $[-1\,;\,1]$.

3) Dérivabilité, dérivée

D'après les formules obtenues ci-dessus, f est de classe C^1

sur $\left]-1\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\,1\right[$ et :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-1\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[, \quad f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \\ \forall x \in \left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\,1\right[, \quad f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 > 0. \end{cases}$$

On détermine le signe de $f'(x)$ pour $x \in \left]-1\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\iff \quad -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 > 0 \\ &\iff \quad x + \sqrt{1-x^2} < 0 \iff \sqrt{1-x^2} < -x \\ &\iff \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 1 - x^2 < x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2 > \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \quad x \in \left]-1\,;\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $x \in \left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\,1\right[$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{x - \sqrt{1-x^2} - 1}{x - 1} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = 1 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \underset{x \longrightarrow 1^-}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

donc f n'est pas dérivable en 1, mais la représentation graphique C de f admet en $(1,1)$ une demi-tangente parallèle à $y'y$.

De même, f n'est pas dérivable en -1 et C admet en $(-1,1)$ une demi-tangente parallèle à $y'y$.

On a :

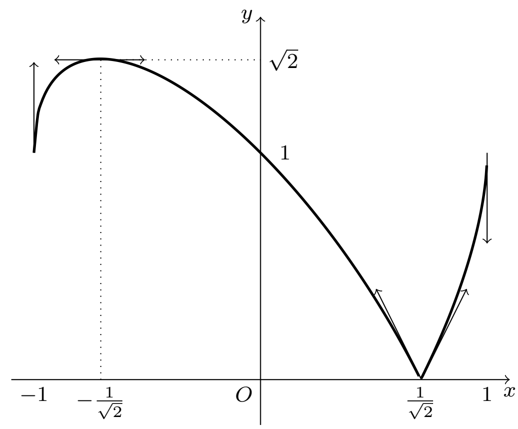
$$f'(x) \underset{x \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^-}{\longrightarrow} -\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}} - 1 = -2,$$

$$f'(x) \underset{x \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^+}{\longrightarrow} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}} + 1 = 2,$$

donc, d'après le théorème limite de la dérivée, f admet en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ une dérivée à gauche égale à -2 et une dérivée à droite égale à 2, donc f n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La représentation graphique C de f admet en ce point deux demi-tangentes.

On dresse le tableau des variations de f :

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$	$\Vert +\infty$	$+$	0	$-$	$-2 \Vert 2$	$+$	$\Vert$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



Remarque : C est formée de morceaux d'ellipses.
En effet :

$$\begin{aligned} & y = \left|x - \sqrt{1-x^2}\right| \\ \Longrightarrow\ & \left(y = x - \sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad y = -x + \sqrt{1-x^2}\right) \\ \iff\ & \left(x - y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad x + y = \sqrt{1-x^2}\right) \\ \Longrightarrow\ & \left((x-y)^2 = 1 - x^2 \quad \text{ou} \quad (x+y)^2 = 1 - x^2\right) \\ \iff\ & \left(2x^2 - 2xy + y^2 = 1 \quad \text{ou} \quad 2x^2 + 2xy + y^2 = 1\right). \end{aligned}$$

5.5

1) Soit f convenant.

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, en dérivant par rapport à x, on déduit :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x+y) = f'(x).$$

En particulier, en remplaçant x par 0, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(y) = f'(0),$$

donc f' est constante.

Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a,$

puis il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$

2) Réciproquement, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto ax + b$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

si et seulement si $b = 0$.

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto ax\,;\ a \in \mathbb{R}\right\}.$$

5.6

Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16} \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 10} + \sqrt{x^2 - 16x + 80}. \end{aligned}$$

L'application f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} + \frac{2x-16}{2\sqrt{x^2-16x+80}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} + \frac{x-8}{\sqrt{x^2-16x+80}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+10}} \\ &\quad + (x-1)\Big(-\frac{1}{2}\Big)(x^2-2x+10)^{-\frac{3}{2}}(2x-2) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{x^2-16x+80}} \\ &\quad + (x-8)\Big(-\frac{1}{2}\Big)(x^2-16x+80)^{-\frac{3}{2}}(2x-16) \\ &= \frac{x^2-2x+10-(x-1)^2}{(x^2-2x+10)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{x^2-16x+80-(x-8)^2}{(x^2-16x+80)^{3/2}} \\ &= \frac{9}{(x^2-2x+10)^{3/2}} + \frac{16}{(x^2-16x+80)^{3/2}} > 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, f' est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -2 < 0 \text{ et } f'(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 2 > 0.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, f' s'annule en un réel et un seul.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \iff\ & \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{8-x}{\sqrt{x^2-16x+80}} \\ \implies\ & (x-1)^2(x^2-16x+80) = (8-x)^2(x^2-2x+10) \\ \iff\ & (x-1)^2\big((x-8)^2+16\big) = (x-8)^2\big((x-1)^2+9\big) \\ \iff\ & 16(x-1)^2 = 9(x-8)^2 \\ \iff\ & 4(x-1) = 3(x-8) \ \text{ ou } \ 4(x-1) = -3(x-8) \\ \iff\ & x = -20 \ \text{ ou } \ x = 4. \end{aligned}$$

Pour $x = -20$, les deux membres de l'équation du départ de ce calcul sont de signes stricts contraires, donc $f'(-20) \neq 0$.

Et : $f'(4) = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+9}} + \dfrac{-4}{\sqrt{4^2+16}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$
$f'(x)$	↗	0	↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

On conclut :

$$\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(4) = \sqrt{3^2+9} + \sqrt{4^2+16} = 7\sqrt{2}.$$

5.7

1) Soit f convenant.

• En remplaçant x par 0, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R},\quad f(y) = f\big(f(y)\big),$$

puis, en reportant dans l'énoncé :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x^4+y) = x^3 f(x) + f(y).$$

• Puisque f est dérivable, on a alors, en dérivant par rapport à y, pour x fixé :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f'(x^4+y) = f'(y).$$

Déduisons-en que f' est constante.

En remplaçant y par 0, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x^4) = f'(0)$, donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ f'(t) = f'(0)$, et, en remplaçant y par $-x^4$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(0) = f'(-x^4)$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_-,\quad f'(0) = f'(t).$$

Il en résulte que f' est constante.

• Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = ax + b$.

2) Réciproquement, soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto f(x) = ax+b.$$

On a :

$$\begin{aligned} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x^4+y) = x^3 f(x) + f\big(f(y)\big) \\ \iff\ & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ & \qquad a(x^4+y)+b = x^3(ax+b) + a(ay+b) + b \\ \iff\ & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad (a-a^2)y - bx^3 - ab = 0 \\ \iff\ & \begin{cases} a - a^2 = 0 \\ b = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \right). \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation proposée est $\{0, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$, c'est-à-dire qu'il y a deux solutions et deux seulement, qui sont l'application nulle et l'identité.

5.8

L'application $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$x \longmapsto f(x) = 17 + 2^x - (x+2)^2 = 2^x - x^2 - 4x + 13$$

est de classe C^∞ sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = (\ln 2)2^x - 2x - 4,\qquad f''(x) = (\ln 2)^2 2^x - 2.$$

On a :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 2^x = \frac{2}{(\ln 2)^2} \\ &\iff x \ln 2 = \ln\Big(\frac{2}{(\ln 2)^2}\Big) \iff x = \frac{\ln 2 - 2\ln\ln 2}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Notons $\alpha = \dfrac{\ln 2 - 2\ln\ln 2}{\ln 2} \simeq 2{,}057\ldots$.

On a : $f'(0) = \ln 2 - 4 < 0$ et $f'(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Dressons le tableau des variations de f :

x	0		α		β		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$	< 0	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie sur $[\alpha\,;+\infty[$, il existe $\beta \in\,]\alpha\,;+\infty[$ unique tel que $f'(\beta) = 0$.

On en déduit que f admet au plus deux zéros réels.

On remarque : $\begin{cases} f(3) = 2^3 - 3^2 - 4\cdot 3 + 13 = 0 \\ f(5) = 2^5 - 5^2 - 4\cdot 5 + 13 = 0, \end{cases}$

et on conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\{3,\ 5\}$.

5.9

Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + x^2}.$$

L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x + 2(x-1)}{2\sqrt{x^2+(x-1)^2}} + \frac{2(x+1)+2x}{2\sqrt{(x+1)^2+x^2}} \\ &= \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+(x-1)^2}} + \frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2+x^2}}. \end{aligned}$$

Si $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors $2x - 1 \geqslant 0$ et $2x + 1 \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.

Supposons $x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Alors :

$$\begin{aligned} & f'(x) \geqslant 0 \\ \iff\ & \frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2+x^2}} \geqslant \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+(x-1)^2}} \\ \underset{1-2x\geqslant 0}{\iff}\ & (2x+1)^2\big(x^2+(x-1)^2\big) \\ & \quad \geqslant (1-2x)^2\big((x+1)^2+x^2\big) \\ \iff\ & (4x^2+4x+1)(2x^2-2x+1) \\ & \quad \geqslant (4x^2-4x+1)(2x^2+2x+1) \\ \iff\ & \big((4x^2+1)+4x\big)\big((2x^2+1)-2x\big) \\ & \quad \geqslant \big((4x^2+1)-4x\big)\big((2x^2+1)+2x\big) \\ \iff\ & -2\cdot 2x(4x^2+1) + 2\cdot 4x(2x^2+1) \geqslant 0 \\ \iff\ & x\big(2(2x^2+1) - (4x^2+1)\big) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$		$\nearrow$	

Comme $f(0) = 2$, on conclut :
$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) \geqslant 2$, ce qui est l'inégalité voulue.

5.10

a) L'application

$$f : [0\,;+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x(2+\cos x) - 3\sin x$$

est de classe C^∞ et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = 2 - x\sin x - 2\cos x,$$
$$f''(x) = -x\cos x + \sin x, \qquad f'''(x) = x\sin x.$$

• On a, pour tout $x \in [\pi\,;+\infty[$:

$$3\sin x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x(2+\cos x) \geqslant \pi(2-1) = \pi \geqslant 3,$$

donc : $3\sin x \leqslant x(2+\cos x)$.

• Il nous suffit donc d'établir l'inégalité demandée lorsque $x \in [0\,;\pi]$.

On dresse les tableaux de variations :

x	0		π
$f'''(x)$	0	$+$	0
$f''(x)$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

Ceci montre : $\qquad \forall x \in [0\,;\pi],\quad f(x) \geqslant 0$,

d'où l'inégalité demandée, pour $x \in [0\,;\pi]$.

b) On a, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$
$$\iff x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$\iff \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}.$$

De plus :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \iff \ln\frac{x+1}{x} > \frac{1}{x+1}$$
$$\iff \ln\frac{x}{x+1} < -\frac{1}{x+1} \iff \ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right) < -\frac{1}{x+1}.$$

Ainsi, pour prouver les deux inégalités demandées, il suffit d'établir l'inégalité :

$$\forall t \in\,]-1\,;+\infty[-\{0\},\quad \ln(1+t) < t.$$

Cette inégalité est connue. Redémontrons-la. L'application $f : t \longmapsto \ln(1+t) - t$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et :

$$\forall t \in]-1\,;+\infty[,\quad f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t},$$

d'où le tableau de variations de f :

t	-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	<0	$\nearrow$	0	$\searrow$	<0

On a donc : $\quad \forall t \in]-1\,;+\infty[-\{0\},\quad f(t) < 0,$

c'est-à-dire : $\quad \forall t \in]-1\,;+\infty[-\{0\},\quad \ln(1+t) < t.$

En remplaçant t par $\dfrac{1}{x}$ pour $x \in]0\,;+\infty[$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x},$$

et, en remplaçant t par $-\dfrac{1}{x+1}$ pour $x \in]0\,;+\infty[$, on obtient :

$$\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right) < -\frac{1}{x+1},$$

d'où les inégalités demandées.

5.11

1) Inégalité

En notant $u = \ln a$, $v = \ln b$, l'inégalité, notée (1) de l'énoncé se re-écrit :

$$(1) \iff \alpha\,\mathrm{e}^{\frac{u}{\alpha}} + \beta\,\mathrm{e}^{\frac{v}{\beta}} \geqslant (\alpha+\beta)\,\mathrm{e}^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}}.$$

Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad v \longmapsto f(v) = \alpha\,\mathrm{e}^{\frac{u}{\alpha}} + \beta\,\mathrm{e}^{\frac{v}{\beta}} - (\alpha+\beta)\,\mathrm{e}^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}}.$$

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $v \in \mathbb{R}$: $f'(v) = \mathrm{e}^{\frac{v}{\beta}} - \mathrm{e}^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}}$.

On a donc : $\quad f'(v) > 0 \iff \dfrac{v}{\beta} > \dfrac{u+v}{\alpha+\beta} \iff \alpha v > \beta u.$

On en déduit le tableau des variations de f :

v	$-\infty$		$\frac{\beta u}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(v)$		$-$	0	$+$	
$f(v)$		$\searrow$		$\nearrow$	

De plus :

$$f\left(\frac{\beta u}{\alpha}\right) = \alpha\,\mathrm{e}^{\frac{u}{\alpha}} + \beta\,\mathrm{e}^{\frac{u}{\alpha}} - (\alpha+\beta)\,\mathrm{e}^{\frac{u+\frac{\beta u}{\alpha}}{\alpha+\beta}}$$

$$= \alpha\,\mathrm{e}^{\frac{u}{\alpha}} + \beta\,\mathrm{e}^{\frac{u}{\alpha}} - (\alpha+\beta)\,\mathrm{e}^{\frac{u}{\alpha}} = 0.$$

On conclut : $\forall v \in \mathbb{R},\quad f(v) \geqslant 0,$ d'où l'inégalité demandée.

2) Étude du cas d'égalité

D'après le tableau précédent, il y a égalité dans l'inégalité (1) si et seulement si $v = \dfrac{\beta u}{\alpha}$. Et :

$$v = \frac{\beta u}{\alpha} \iff \ln b = \frac{\beta}{\alpha}\ln a \iff \alpha \ln b = \beta \ln a$$
$$\iff b^{\alpha} = a^{\beta}.$$

Ainsi, il y a égalité dans (1) si et seulement si $b^{\alpha} = a^{\beta}$.

3) Exemple

En prenant $\alpha = 2$, $\beta = 3$, on obtient :

$$\forall (a,b) \in]0\,;+\infty[^2,\quad 2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{3}} \geqslant 5(ab)^{\frac{1}{5}}.$$

5.12

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n, \psi_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par :

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = (-1)^{n+1}\big(\cos x - C_n(x)\big) \\ \psi_n(x) = (-1)^{n+1}\big(\sin x - S_n(x)\big). \end{cases}$$

Montrons, par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \varphi_n \geqslant 0 \;$ et $\; \psi_n \geqslant 0.$

- Pour $n = 0$, on tombe sur des inégalités connues :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \begin{cases} \varphi_0(x) = -(\cos x - 1) = 1 - \cos x \geqslant 0 \\ \psi_0(x) = -(\sin x - x) = x - \sin x \geqslant 0. \end{cases}$$

- Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$: $\varphi_n \geqslant 0$ et $\psi_n \geqslant 0$.

On remarque : $C'_{n+1} = -S_n$ et $S'_{n+1} = C_{n+1}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$C'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$\underset{p=k-1}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{p+1} x^{2p+1}}{(2p+1)!} = -S_n(x)$$

$$S'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (2k+1) x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = C_{n+1}(x).$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi'_{n+1}(x) = (-1)^{n+2}\big(-\sin x - C'_{n+1}(x)\big)$$

$$= (-1)^n\big(-\sin x + S_n(x)\big) = (-1)^{n+1}\big(\sin x - S_n(x)\big) = \psi_n(x)$$

$$\psi'_{n+1}(x) = (-1)^{n+2}\big(\cos x - S'_{n+1}(x)\big)$$
$$= (-1)^{n+2}\big(\cos x - C_{n+1}(x)\big) = \varphi_{n+1}(x).$$

Comme $\varphi'_{n+1} = \psi_n \geqslant 0$, φ_{n+1} est croissante.
De plus, $\varphi_{n+1}(0) = 0$, donc $\varphi_{n+1} \geqslant 0$.

Alors, $\psi'_{n+1} = \varphi_{n+1} \geqslant 0$, donc ψ_{n+1} est croissante.
De plus, $\psi_{n+1}(0) = 0$, donc $\psi_{n+1} \geqslant 0$.

Ceci montre que la propriété est vraie pour $n+1$.

Finalement, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence sur n.

5.13

Considérons l'application $f : \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, par :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - x^3 &= \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x} - x^3 \\ &= \tan x - \sin x \cos x - x^3 = \tan x - \frac{1}{2}\sin 2x - x^3. \end{aligned}$$

L'application f est de classe C^∞ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+\tan^2 x) - \cos 2x - 3x^2, \\ f''(x) &= 2\tan x(1+\tan^2 x) + 2\sin 2x - 6x \\ &= 2\tan x + 2\tan^3 x + 2\sin 2x - 6x, \\ f'''(x) &= (2+6\tan^2 x)(1+\tan^2 x) + 4\cos 2x - 6 \\ &= 8\tan^2 x + 6\tan^4 x + 4\cos 2x - 4 \\ &= 8\tan^2 x + 6\tan^4 x - 8\sin^2 x \\ &= 8(\tan^2 x - \sin^2 x) + 6\tan^4 x. \end{aligned}$$

On sait : $\forall x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\quad 0 < \sin x < x < \tan x,$

d'où : $\forall x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\quad f'''(x) > 0.$

On remonte alors les tableaux de variations :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'''(x)$	0 $+$	
$f''(x)$	0 $\nearrow$	
$f'(x)$	0 $\nearrow$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	

On obtient : $\forall x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\quad f(x) > 0,$

et on conclut : $\forall x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x.$

5.14

Considérons l'application

$$f : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

L'inégalité proposée est équivalente à : $f(x) < f(y) + f(z)$.

L'application f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et :

$$\forall t \in [0\,;\,+\infty[,\quad f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0,$$

donc f est (strictement) croissante.

Puisque $x \leqslant y+z$, on a donc : $f(x) \leqslant f(y+z)$.

Il suffit donc de prouver : $f(y+z) < f(y) + f(z)$.

Pour $z \in]0\,;\,+\infty[$ fixé, l'application

$$g : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto f(t) + f(z) - f(t+z)$$

est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$:

$$g'(t) = f'(t) - f'(t+z) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t+z)^2} > 0,$$

donc g est strictement croissante.

De plus : $g(0) = f(z) - f(z) = 0$.

On a donc : $\forall t \in]0\,;\,+\infty[,\quad g(t) > 0,\quad$ d'où : $g(y) > 0$.

Ceci montre : $f(y+z) < f(y) + f(z)$.

On a donc : $f(x) < f(y) + f(z)$,

et on conclut : $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{y}{1+y} + \dfrac{z}{1+z}.$

5.15

a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.

L'application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x\ln x + \mathrm{e}^{\,y-1} - xy$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f'(x) = 1 + \ln x - y$,

d'où le tableau des variations de f :

x	0	e^{y-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Et : $f(\mathrm{e}^{\,y-1}) = \mathrm{e}^{\,y-1}(y-1) + \mathrm{e}^{\,y-1} - \mathrm{e}^{\,y-1}y = 0.$

Il en résulte : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f(x) \geqslant 0$,

d'où l'inégalité voulue.

On conclut : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\quad xy \leqslant x\ln x + \mathrm{e}^{\,y-1}$.

b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On a, en appliquant *a)* à (xy, z) à la place de (x,y) : $xyz = (xy)z \leqslant xy\ln(xy) + \mathrm{e}^{\,z-1}$.

Et : $xy\ln(xy) = xy\ln x + xy\ln y = y(x\ln x) + x(y\ln y)$.

En appliquant *a)* à $(y, x\ln x)$ et à $(x, y\ln y)$ à la place de (x,y), on a :

$y(x\ln x) \leqslant y\ln y + \mathrm{e}^{\,x\ln x-1}$ et $x(y\ln y) \leqslant x\ln x + \mathrm{e}^{\,y\ln y-1}$.

On conclut :

$$xyz \leqslant \underbrace{\left(x\ln x + \mathrm{e}^{\,x\ln x-1}\right)}_{\text{noté } f(x)} + \underbrace{\left(y\ln y + \mathrm{e}^{\,y\ln y-1}\right)}_{\text{noté } g(y)} + \underbrace{\mathrm{e}^{\,z-1}}_{\text{noté } h(z)}.$$

5.16

Considérons l'application

$$f : \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{x}{y} < \frac{\sin x}{\sin y} < \frac{\pi}{2}\frac{x}{y} \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin y}{y} < \dfrac{\sin x}{x} \\[2mm] \dfrac{\sin y}{y} > \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin x}{x} \end{array}\right.$$

$$\iff \frac{2}{\pi}f(x) < f(y) < f(x).$$

Étudions les variations de f.

L'application f est dérivable sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\forall t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\quad f\,'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}.$$

L'application $A : \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ t \longmapsto t\cos t - \sin t$ est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$A'(t) = -t\sin t \leqslant 0 \quad (\text{et } < 0 \text{ si } t \neq 0),$$

donc A est strictement décroissante. Comme $A(0) = 0$, il en résulte $\forall t \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[,\ A(t) < 0$, puis : $\forall t \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[,\ f\,'(t) < 0$,

et donc f est strictement décroissante.

De plus, $f(t) = \dfrac{\sin t}{t} \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$	$\Vert$	$-$
$f(t)$	$\Vert$	$1 \searrow \frac{2}{\pi}$

Puisque f est strictement décroissante, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$:

$$1 > f(x) > f(y) \geqslant \frac{2}{\pi}.$$

D'une part, on obtient : $f(y) < f(x)$.

D'autre part : $\dfrac{f(y)}{f(x)} > f(y)$ car $0 < f(x) < 1$,

donc : $\dfrac{f(y)}{f(x)} > \dfrac{2}{\pi}$.

D'où les inégalités demandées.

5.17

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0\,;+\infty[$ fixés. Considérons l'application $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ y \longmapsto (n-1)x + \dfrac{y^n}{x^{n-1}} - ny$.

Il est clair que f est dérivable et :

$$\forall y \in]0\,;+\infty[,\quad f\,'(y) = \frac{ny^{n-1}}{x^{n-1}} - n = \frac{n}{x^{n-1}}(y^{n-1} - x^{n-1}).$$

De plus : $\qquad f(x) = (n-1)x + x - nx = 0.$

D'où le tableau des variations de f :

y	0	x	$+\infty$
$f'(y)$	$-$	0	$+$
$f(y)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Il en résulte : $\quad \forall y \in]0\,;+\infty[,\quad f(y) \geqslant 0,$

d'où l'inégalité demandée.

b) Remarquons d'abord que l'inégalité envisagée est évidente lorsque l'un des nombres $x_1, ..., x_n$ est nul, puisqu'alors la moyenne géométrique est nulle et la moyenne arithmétique est $\geqslant 0$. On peut donc se restreindre, comme le fait l'énoncé, au cas où les nombres $x_1, ..., x_n$ sont tous > 0.

Récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, l'inégalité voulue est triviale, c'est une égalité.

• Pour $n = 2$, l'inégalité $\sqrt{x_1x_2} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ est connue.

En effet :

$$2\sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{x_1+x_2}{2} \iff 4x_1x_2 \leqslant (x_1+x_2)^2$$
$$\iff x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geqslant 0 \iff (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0.$$

• Supposons l'inégalité vraie à l'ordre $n-1$, pour tous nombres > 0.

Soit $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Notons :

$$x = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1},\quad y = \left[x_n\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1/n},$$

de sorte que : $\dfrac{y^n}{x^{n-1}} = x_n$.

D'après *a)*, on a alors :

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &= (x_1 + \cdots + x_{n-1}) + x_n = (n-1)x + x_n \\ &= (n-1)x + \frac{y^n}{x^{n-1}} \geqslant ny = n\left[x_n\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\Big)^{n-1}\right]^{1/n} \\ &\underset{\text{H.R.}}{\geqslant} n\big[x_n(x_1\cdots x_{n-1})\big]^{1/n} = n(x_1\cdots x_n)^{1/n}, \end{aligned}$$

d'où : $\qquad \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}.$

Vrai ou Faux ?

5.1 Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable sur I telle que **V F**

$$\forall x \in I, \quad f'(x) > 0,$$

alors f est strictement croissante sur I.

5.2 Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable sur I et strictement croissante sur I, alors : **V F**

$$\forall x \in I, \quad f'(x) > 0.$$

5.3 Si une application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et si $f' = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}^*$. **V F**

5.4 Si une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors f admet un maximum global en 0. **V F**

5.5 Si une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et bijective, alors f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. **V F**

5.6 Si des applications $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v'$. **V F**

5.7 Si des applications $u, v, w : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors uvw est dérivable sur I et : **V F**

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

5.8 Si : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : **V F**

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

5.9 Si une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point a de l'intervalle I, alors la tangente en le point de coordonnées $\big(a,\, f(a)\big)$ à la courbe représentative de f admet pour équation cartésienne : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. **V F**

5.10 L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{|x|^3}$ n'est pas dérivable en 0. **V F**

Vrai ou Faux, les réponses

5.1 C'est un résultat du cours. **V**

5.2 Contrexemple : $I = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto x^3$. **F**
Cette application f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

5.3 Contrexemple : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$ **F**

Le résultat devient exact si on remplace, dans l'hypothèse, $\mathbb{R}^*$ par un intervalle de $\mathbb{R}$.

5.4 On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant f(0)$, donc f admet un maximum global en 0. **V**

5.5 Contrexemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$. **F**
Cette application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et bijective, mais $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto \sqrt[3]{y}$ n'est pas dérivable en 0.

5.6 Contrexemple : $u : x \longmapsto x$, $v : x \longmapsto x$. **F**
La formule correcte est : $(uv)' = u'v + uv'$.

5.7 $(uvw)' = \big((uv)w\big)' = (u'v + uv')w + (uv)w' = u'vw + uv'w + uvw'$. **V**

5.8 C'est un résultat du cours, dérivée de la composée de deux fonctions dérivables. **V**

5.9 C'est un résultat du cours. **V**

5.10 On a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{|x|^3}}{x} = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, car $\dfrac{|x|}{x}$ est borné et $\sqrt{|x|} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$. **F**

Chapitre 6

Fonctions usuelles

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Résolution d'équations ou d'inéquations à une ou plusieurs inconnues réelles
- Calculs de certaines sommes $\sum$ et de certains produits $\prod$
- Obtention d'égalités ou d'inégalités à une ou plusieurs variables réelles
- Étude et représentation graphique de fonctions faisant intervenir les fonctions usuelles.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des fonctions usuelles : $\ln$, $\exp$, $\ln_a$, $\exp_a$, puissances, fonction hyperboliques directes, fonctions circulaires directes, fonctions circulaires réciproques
- Étude et représentation de chaque fonction usuelle
- Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles
- Formulaire de trigonométrie circulaire, à savoir par cœur
- Déduction du formulaire de trigonométrie hyperbolique à partir du formulaire de trigonométrie circulaire, en remplaçant $\cos$ par ch et $\sin$ par $\mathrm{i\,sh}$.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour manipuler des logarithmes de base quelconque

On peut se ramener à des logarithmes népériens par la formule :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

➟ **Exercice 6.1**

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2},$$

d'inconnue $x \in]1\,;\,+\infty[$.

On a, pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, en notant $t = \dfrac{\ln x}{\ln 2} \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2} \quad &\iff \quad \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{\ln x} = \frac{5}{2}\\
&\iff \quad t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}\\
&\iff \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0\\
&\iff \quad t \in \left\{\frac{1}{2},\, 2\right\}\\
&\iff \quad \ln x \in \left\{\frac{\ln 2}{2},\, 2\ln 2\right\}\\
&\iff \quad \ln x \in \left\{\ln\sqrt{2},\, \ln 4\right\}\\
&\iff \quad x \in \{\sqrt{2},\, 4\}.
\end{aligned}$$

On conclut : $\mathcal{S} = \{\sqrt{2},\, 4\}$.

Méthode

Pour manipuler des fonctions hyperboliques directes, ch, sh, th

On peut quelquefois essayer de se ramener à des exponentielles (mais ce n'est pas toujours nécessaire ni utile).

➟ **Exercice 6.2**

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{sh} x = y,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, de paramètre fixé $y \in \mathbb{R}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\operatorname{sh} x = y \iff \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = y$$

$$\iff \mathrm{e}^{x} - 2y - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0.$$

Notons $X = \mathrm{e}^{x}$. On a alors :

$$\operatorname{sh} x = y \iff X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré (d'inconnue X).

Le discriminant est $\Delta = 4(y^2+1) > 0$, donc les solutions sont

$$X_1 = y - \sqrt{1+y^2}, \quad X_2 = y + \sqrt{1+y^2}.$$

Comme $X = \mathrm{e}^{x} > 0$ et que $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$, on obtient :

$$X = y + \sqrt{1+y^2}.$$

On conclut :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(\operatorname{sh} x = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right).$$

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{ch} x = y,$$

d'inconnue $x \in [0\,;+\infty[$, de paramètre fixé $y \in [1\,;+\infty[$.

Soit $(x,y) \in [0\,;+\infty[\times[1\,;+\infty[$. On a :

$$\operatorname{ch} x = y \iff \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = y$$

$$\iff \mathrm{e}^{x} - 2y + \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} + 1 = 0.$$

Notons $X = \mathrm{e}^{x}$. On a alors :

$$\operatorname{ch} x = y \iff X^2 - 2yX + 1 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré (d'inconnue X).
Le discriminant est $\Delta = 4(y^2-1) \geqslant 0$, donc les solutions sont :

$$X_1 = y - \sqrt{y^2-1}, \quad X_2 = y + \sqrt{y^2-1}.$$

Le cas $y = 1$ est d'étude immédiate.
Supposons $y > 1$. On a : $X = \mathrm{e}^{x} > 1$.
Comme $0 < X_1 < X_2$ et $X_1X_2 = 1$, on a nécessairement $X_1 < 1 < X_2$, donc $X = X_2$.
On conclut :

$$\forall (x,y) \in [0\,;+\infty[\times[1\,;+\infty[, \quad \left(\operatorname{ch} x = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)\right).$$

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{th} x = y,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, de paramètre fixé $y \in]-1\,;1[$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times]-1\,;1[$. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th} x = y &\iff \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = y \\
&\iff \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = y \\
&\iff \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = y \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 = y\,\mathrm{e}^{2x} + y \\
&\iff (1-y)\,\mathrm{e}^{2x} = 1 + y \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]-1\,;1[, \quad \left(\operatorname{th} x = y \iff x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\right).$$

On a ainsi obtenu les fonctions hyperboliques réciproques (qui ne sont pas au programme) :

$$\text{Argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

$$\text{Argch} : [1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),$$

$$\text{Argth} :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

Méthode

Pour manipuler les fonctions circulaires directes $\sin$, $\cos$

- Se rappeler que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad |\sin x| \leqslant 1, \quad |\cos x| \leqslant 1, \quad |\sin x| \leqslant |x|.$$

- Penser à utiliser le formulaire de trigonométrie circulaire.

➟ **Exercices 6.3, 6.4, 6.6, 6.7, 6.13**

Exemple

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \\
\iff\quad & \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1}(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{1}{4} \\
\iff\quad & \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1}{}^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4} \\
\iff\quad & \sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4} \\
\iff\quad & \sin^2 2x = 1 \\
\iff\quad & \sin 2x = \pm 1 \\
\iff\quad & 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\iff\quad & x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exemple

Soit $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{1}{2}$.

Calculer $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$.

On a, par formules de trigonométrie, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) \\
&= \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\
&= \cos x(4\cos^2 x - 3),
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{et} & \sin 3x & = & \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\ & & = & 2\sin x \cos^2 x + \sin x(2\cos^2 x - 1) \\ & & = & \sin x(4\cos^2 x - 1), \end{array}$$

d'où, pour tout $x \in]0\,;\,\pi/2[$:

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos^2 x - 3 \quad \text{et} \quad \frac{\sin 3x}{\sin x} = 4\cos^2 x - 1.$$

On déduit : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} = \dfrac{\cos 3x}{\cos x} + 2 = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$.

Méthode

Pour résoudre une équation (ou un système d'équations) dans laquelle interviennent des fonctions usuelles

Faire tout passer dans le premier membre et étudier les variations d'une fonction, avec souplesse, c'est-à-dire en remplaçant éventuellement l'équation par une équation équivalente.

➟ **Exercices 6.8, 6.10, 6.11**

Exemple

Résoudre l'équation :

$$2x \ln x + 3(x-1) = 0,$$

d'inconnue $x \in]0\,;\,+\infty[$.

L'application $f :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto 2x\ln x + 3(x-1)$ est dérivable (donc continue) sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = 2(\ln x + 1) + 3 = 2\ln x + 5,$$

d'où le tableau de variations de f :

x	0		$e^{-5/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	<0	$\searrow$		$\nearrow$	>0

On a : $x \ln x \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, donc $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} -3$,

et : $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de f par intervalles, f s'annule une fois et une seule dans $]0\,;\,+\infty[$.

On remarque : $f(1) = 0$.

On conclut : $\mathcal{S} = \{1\}$.

Méthode

Pour l'étude et la représentation graphique d'une fonction f faisant intervenir des fonctions circulaires réciproques

- Essayer un changement de variable qui pourrait permettre de simplifier la fonction circulaire réciproque avec une fonction circulaire directe.

➟ **Exercices 6.10, 6.12**

- Calculer la dérivée de f et essayer, dans certains cas, de reconnaître la dérivée d'une fonction plus simple.

Exemple

Simplifier, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \text{Arccos}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

L'application f est 2π-périodique et paire.

On a, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arccos}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2}} = \text{Arccos}\left|\sin\frac{x}{2}\right| \\ &= \text{Arccos}\left(\sin\frac{x}{2}\right) \qquad \text{car } \frac{x}{2} \in [0\,;\,\pi/2] \subset [0\,;\,\pi] \\ &= \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} \qquad \text{car } \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} \in [0\,;\,\pi/2] \subset [0\,;\,\pi]. \end{aligned}$$

Méthode

Pour montrer que deux fonctions sont égales sur un intervalle

Montrer que les dérivées sont égales (si les fonctions sont dérivables sur un intervalle) et que les fonctions prennent la même valeur en au moins un point.

➟ **Exercice 6.11**

Exemple

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\,\frac{1}{x} = \varepsilon\frac{\pi}{2},$$

où : $\varepsilon = -1$ si $x < 0$, $\varepsilon = 1$ si $x > 0$.

• L'application

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\,\frac{1}{x}$$

est impaire, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0, \end{aligned}$$

donc f est constante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

On a : $f(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

• Puisque f est impaire, on déduit :

$$\forall x \in]-\infty\,;0[, \quad f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Méthode

Pour résoudre une équation dans laquelle interviennent des fonctions circulaires réciproques

Essayer de composer par une fonction circulaire directe, de façon à faire disparaître les fonctions circulaires réciproques. On essaiera de maintenir des équivalences logiques, ou bien on raisonnera par implication et réciproque (lorsque la ou les valeurs obtenues sont assez simples).

➟ **Exercice 6.12**

Exemple

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{15}\,x) = \frac{\pi}{2}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$ est solution, alors on a $\sqrt{15}\,x \in [-1\,;\,1]$, donc $x \in [-1/\sqrt{15}\,;\,1/\sqrt{15}]$, et, d'autre part, si $x < 0$, alors le premier membre est < 0, contradiction, donc $x \geqslant 0$.

Ainsi, $x \in [0\,;\,1/\sqrt{15}]$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{15}\,x) = \frac{\pi}{2} \\
\iff\ & \underbrace{\operatorname{Arcsin}(\sqrt{15}\,x)}_{\in[0\,;\,\pi/2]} = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x}_{\in[0\,;\,\pi/2]} \\
\iff\ & \sin\big(\operatorname{Arcsin}(\sqrt{15}\,x)\big) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right) \\
\iff\ & \sqrt{15}\,x = \sqrt{1-x^2} \\
\underset{x\geqslant 0}{\iff}\ & 15x^2 = 1 - x^2 \\
\iff\ & 16x^2 = 1 \\
\iff\ & x^2 = \frac{1}{16} \\
\underset{x\geqslant 0}{\iff}\ & x = \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

et on a bien $1/4 \in [0\,;\,1/\sqrt{15}]$.

On conclut : $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

Méthode

Pour calculer une limite se présentant sous une forme indéterminée et faisant intervenir des fonctions usuelles

Essayer de :

- transformer l'écriture de la fonction
- utiliser les prépondérances classiques des puissances sur les logarithmes, des exponentielles sur les puissances, c'est-à-dire plus précisément les limites suivantes du cours :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \text{pour } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ fixé}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0, \quad \text{pour } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ fixé}$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\lambda^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \text{pour } (\lambda, \alpha) \in]1\,;\,+\infty[\times\mathbb{R} \text{ fixé}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \lambda^x |x|^\alpha = 0, \quad \text{pour } (\lambda, \alpha) \in]1\,;\,+\infty[\times\mathbb{R} \text{ fixé}$$

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(\ln x)^3}{x^4}$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^2\big(\ln(x^3)\big)^3$

c) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^3\,\mathrm{e}^{x}\big(\ln(-x)\big)^2$

a) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(\ln x)^3}{x^4} = \underbrace{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^4}}_{\longrightarrow +\infty}\ \underbrace{(\ln x)^3}_{\longrightarrow +\infty} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

b) $x^2\big(\ln(x^3)\big)^2 = x^2(3\ln x)^3 = 27x^2(\ln x)^3 \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$

c) $x^3\,\mathrm{e}^{x}\big(\ln(-x)\big)^2 = \underbrace{x^4\,\mathrm{e}^{x}}_{\longrightarrow 0}\underbrace{\dfrac{\big(\ln(-x)\big)^2}{x}}_{\longrightarrow 0} \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} 0.$

Énoncés des exercices

6.1 Exemple d'équation à une inconnue réelle, faisant intervenir des logarithmes dans diverses bases

Résoudre dans $]0\,;+\infty[$: $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \dfrac{11}{2}$.

6.2 Exemple de système de deux équations à deux inconnues réelles, faisant intervenir ch et sh

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: (S) $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 4 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 1. \end{cases}$

6.3 Exemple de résolution d'une équation à une inconnue réelle, faisant intervenir cos et sin

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos^{11} x - \sin^{11} x = 1$.

6.4 Exemple de résolution d'un système de deux d'équations à deux inconnues réelles, faisant intervenir des sinus

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \sin(x+y) = 2x \\ \sin(x-y) = 2y. \end{cases}$

6.5 Calcul d'une limite faisant intervenir des cosinus en produit

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^5 x - \operatorname{sh}^5 x = 1$.

6.6 Calcul d'un produit de cosinus

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2^k \pi}{2^n - 1}$.

6.7 Un calcul de $\cos \dfrac{\pi}{5}$

a) On considère l'application

$$f :]-\pi\,;\,\pi[-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x}.$$

Montrer que f admet un prolongement continu g à $]-\pi\,;\,\pi[$ et exprimer g (sans fraction).

b) En déduire la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{5}$.

6.8 Exemple d'équation portant sur des exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3^x + 4^x = 5^x$.

6.9 Exemple de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues réelles, faisant intervenir des exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x + \mathrm{e}^{\,x} = y + \mathrm{e}^{\,y} \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$

6.10 Exemple d'étude de fonction faisant intervenir Arccos

Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \mathrm{Arccos}\,(2x^2 - 1).$$

6.11 Une égalité entre fonctions composées de fonctions circulaires et hyperboliques, directes et réciproques

Montrer : $\quad \forall x \in [0\,;\,+\infty[, \quad \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\,x) = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right).$

6.12 Exemple de résolution d'une équation à une inconnue réelle, faisant intervenir des Arcsin

Résoudre dans $\mathbb{R}$: (1) $\quad \mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}.$

6.13 Lien entre $\tan\theta$ **et** $\dfrac{1}{\cos\theta}$

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) P est pair

(ii) $\exists\, Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \forall \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[, \quad P(\tan\theta) = Q\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right).$

6.14 Exemple d'inégalités faisant intervenir des logarithmes

a) Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$: $\dfrac{y-x}{\ln y - \ln x} < \dfrac{x+y}{2}.$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}.$

6.15 Exemple d'inégalité à une variable réelle, faisant intervenir un logarithme

Montrer : $\quad \forall x \in]0\,;\,+\infty[, \quad \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$

6.16 Exemple d'équation à une inconnue réelle, faisant intervenir des puissances

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2}$.

6.17 Une fonction de deux variables réelles qui se simplifie

Simplifier, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = \operatorname{Arccos} \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.

6.18 Sommes d'Arctan

a) Montrer, pour tout $(a,b) \in [0\,;1[^2$: $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab}$.

b) En déduire la valeur de : $S = 5 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{8} + 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{18} + 3 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{57}$.

Du mal à démarrer ?

6.1 Utiliser la formule : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

6.2 Se ramener à des exponentielles et faire le changement d'inconnues $X = \mathrm{e}^{x}$, $Y = \mathrm{e}^{y}$.

6.3 Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude, et comparer avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

6.4 Élever au carré et utiliser l'inégalité classique : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t| \leqslant |t|$, ou encore : $\sin^2 t \leqslant t^2$.

6.5 Montrer $x \geqslant 0$, puis utiliser $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

6.6 Remarquer, pour tout $a \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\cos a = \dfrac{\sin 2a}{2 \sin a}$ et effectuer un télescopage multiplicatif.

6.7 *a)* Développer $\sin 3x$ et $\sin 2x$, puis simplifier la fraction obtenue.

b) Remplacer x par $\pi/5$.

6.8 Remarquer une solution particulière.

En divisant par 5^x, amener la stricte monotonie d'une fonction.

6.9 Remarquer que $t \longmapsto t + \mathrm{e}^{t}$ est injective, d'où $x = y$.

6.10 Transformer l'écriture de $f(x)$ en utilisant :
$$2\cos^2 t - 1 = \cos 2t.$$

6.11 Montrer que les deux membres sont dérivables, ont la même dérivée, et prennent la même valeur en au moins un point.

6.12 Faire passer un terme de l'autre côté, situer les deux membres dans certains intervalles, et composer par sin.

6.13 Séparer clairement les deux sens de l'équivalence logique.

Pour (i) $\Longrightarrow$ (ii), exprimer la forme d'un polynôme pair et exprimer $\tan^2\theta$ à l'aide de $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

6.14 *a)* En posant $t = \dfrac{y}{x}$, se ramener à l'étude des variations d'une fonction.

b) Remarquer : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$.

6.15 Étudier les variations d'une fonction, après divers changements de variable éventuellement.

6.16 Montrer $x > 0$, puis poser $t = x^{\frac{1}{2}}$ pour se ramener à une équation plus simple, pour la résolution de laquelle on pourra étudier les variations d'une fonction.

6.17 La présence de $1 + x^2$ fait penser à une formule de trigonométrie contenant $1 + \tan^2 t$. En notant $t = \operatorname{Arctan} x$, $u = \operatorname{Arctan} y$, exprimer $\dfrac{1-xy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$ en fonction de t et u. Séparer ensuite en cas selon la situation de $t+u$.

6.18 *a)* Montrer que les deux membres sont dans $[0\,;\pi/2[$ et ont la même tan.

b) Grouper les termes de façon à appliquer *a)* plusieurs fois.

Corrigés des exercices

6.1

On a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} & \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2} \\ \iff\ & \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 4} + \frac{\ln x}{\ln 8} = \frac{11}{2} \\ \iff\ & \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{2\ln 2} + \frac{\ln x}{3\ln 2} = \frac{11}{2} \\ \iff\ & \frac{\ln x}{\ln 2}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{11}{2} \\ \iff\ & \frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{11}{2} \cdot \frac{6}{11} = 3 \\ \iff\ & \ln x = 3\ln 2 = \ln 8 \iff x = 8. \end{aligned}$$

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule, qui est 8.

6.2

On a, par addition et par soustraction :

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} \mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,y} = 5 \\ \mathrm{e}^{\,-x} + \mathrm{e}^{\,-y} = 3. \end{cases}$$

Notons $X = \mathrm{e}^{\,x}$, $Y = \mathrm{e}^{\,y}$. On a :

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ X + Y = 3XY \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

L'équation du second degré $t^2 - 5t + \dfrac{5}{3} = 0$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 4\dfrac{5}{3} = \dfrac{55}{3}$, donc admet pour solutions $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{\dfrac{55}{3}}}{2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{165}}{6}$, qui sont tous les deux > 0.

On obtient X et Y, à l'ordre près, puis x et y par

$$x = \ln X,\ y = \ln Y.$$

On conclut que le système proposé a deux solutions exactement, le couple $\left(\ln \dfrac{15 - \sqrt{165}}{6}, \ln \dfrac{15 + \sqrt{165}}{6}\right)$ et le couple renversé de celui-ci.

6.3

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution. Notons $t = -x$.

On a alors : $\cos^{11} t + \sin^{11} t = 1$.

Comme $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on déduit :

$$\underbrace{(\cos^2 t - \cos^{11} t)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(\sin^2 t - \sin^{11} t)}_{\geqslant 0} = 0,$$

d'où $\begin{cases} \cos^2 t - \cos^{11} t = 0 \\ \sin^2 t - \sin^{11} t = 0 \end{cases}$, puis $\begin{cases} \cos t \in \{0, 1\} \\ \sin t \in \{0, 1\} \end{cases}$,

donc $t \equiv 0 \quad [2\pi]$ ou $t \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$,

puis $x \equiv 0 \quad [2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

2) La réciproque est immédiate.

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation proposée est : $\mathcal{S} = \Big(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\Big) \cup 2\pi\mathbb{Z}$.

6.4

1) Soit (x, y) une solution.

On a alors : $\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) = 4x^2 + 4y^2$.

Mais, d'autre part, on sait : $\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin t| \leqslant |t|$, d'où :

$$\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) \leqslant (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

On déduit : $4(x^2 + y^2) \leqslant 2(x^2 + y^2)$,

d'où $x^2 + y^2 = 0$, puis $x = y = 0$.

2) Réciproque évidente.

On conclut que le système proposé admet une solution et une seule : $(0, 0)$.

6.5

Il est clair que $x = 0$ convient.

Soit $x \in \mathbb{R}$ convenant, tel que $x \neq 0$.

On a alors : $\mathrm{sh}^5 x = \mathrm{ch}^5 x - 1 > 0$, donc $\mathrm{sh}\, x > 0$, puis $x > 0$.

On a : $\begin{cases} \mathrm{ch}^5 x - \mathrm{sh}^5 x = 1 \\ \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \end{cases}$

d'où, par soustraction : $\mathrm{ch}^5 x - \mathrm{ch}^2 x = \mathrm{sh}^5 x - \mathrm{sh}^2 x$,

donc : $\mathrm{ch}^2 x(\mathrm{ch}^3 x - 1) = \mathrm{sh}^2 x(\mathrm{sh}^3 x - 1)$.

On a : $\mathrm{sh}^3 x - 1 = \dfrac{\mathrm{ch}^2 x(\mathrm{ch}^3 x - 1)}{\mathrm{sh}^2 x} > 0$.

Ainsi : $\begin{cases} \mathrm{ch}^2 x > \mathrm{sh}^2 x > 0 \\ \mathrm{ch}^3 x - 1 > \mathrm{sh}^3 x - 1 > 0, \end{cases}$

donc, par produit : $\mathrm{ch}^2 x(\mathrm{ch}^3 x - 1) > \mathrm{sh}^2 x(\mathrm{sh}^3 x - 1)$, contradiction.

On conclut : $\mathcal{S} = \{0\}$.

6.6

On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$,

donc, pour tout $a \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\cos a = \dfrac{\sin 2a}{2 \sin a}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

On a : $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$, $\dfrac{2^k \pi}{2^n - 1} \in]0\,;\pi[\subset \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.

D'où, par télescopage :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2^k\pi}{2^n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \dfrac{2^{k+1}\pi}{2^n-1}}{2\sin \dfrac{2^k\pi}{2^n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \dfrac{2^{k+1}\pi}{2^n-1}}{\sin \dfrac{2^k\pi}{2^n-1}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \dfrac{2^n\pi}{2^n-1}}{\sin \dfrac{\pi}{2^n-1}}.$$

Comme $\dfrac{2^n\pi}{2^n-1} = \pi + \dfrac{\pi}{2^n-1}$,

on a : $\sin \dfrac{2^n\pi}{2^n-1} = -\sin \dfrac{\pi}{2^n-1}$, et donc : $A_n = -\dfrac{1}{2^n}$.

D'autre part : $A_1 = \cos \pi = -1$.

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ -\dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$

6.7

a) On dispose des formules de trigonométrie :

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

d'où :

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$$

$$= 2\sin x \cos^2 x + \sin x(2\cos^2 x - 1) = \sin x(4\cos^2 x - 1).$$

On en déduit, pour tout $x \in]-\pi\,;\pi[-\{0\}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1) - 2\sin x \cos x}{\sin x} \\ &= 4\cos^2 x - 2\cos x - 1. \end{aligned}$$

L'application

$$g :]-\pi\,;\pi[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x - 1$$

est continue et prolonge f à $]-\pi\,;\pi[$, ce qui montre le résultat demandé.

b) Notons $a = \dfrac{\pi}{5}$.

On a : $a \in]-\pi\,;\pi[-\{0\}$ et $f(a) = \dfrac{\sin \dfrac{3\pi}{5} - \sin \dfrac{2\pi}{5}}{\sin \dfrac{\pi}{5}} = 0$,

car $\sin \dfrac{3\pi}{5} = \sin\left(\pi - \dfrac{3\pi}{5}\right) = \sin \dfrac{2\pi}{5}$.

D'où, d'après *a)* : $g(a) = f(a) = 0$,

donc : $4\cos^2 a - 2\cos a - 1 = 0$.

On résout cette équation du second degré. Le discriminant Δ est : $\Delta = 4 + 16 = 20$, donc $\cos a = \dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Mais $\cos a \geqslant 0$, et on conclut : $\cos \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \simeq 0,809...$

6.8

• On remarque que 2 est solution :

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$3^x + 4^x = 5^x \iff \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Considérons l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = \mathrm{e}^{\,x \ln \frac{3}{5}} + \mathrm{e}^{\,x \ln \frac{4}{5}} - 1.$$

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \underbrace{\left(\ln \frac{3}{5}\right)}_{<0} \underbrace{\mathrm{e}^{\,x \ln \frac{3}{5}}}_{>0} + \underbrace{\left(\ln \frac{4}{5}\right)}_{<0} \underbrace{\mathrm{e}^{\,x \ln \frac{4}{5}}}_{>0} < 0.$$

Il en résulte que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc injective, et donc l'équation proposée admet au plus une solution.

Finalement, l'équation proposée admet une solution et une seule, 2.

6.9

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto t + \mathrm{e}^{\,t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 1 + \mathrm{e}^{\,t} > 0$, donc f est strictement croissante, donc injective. D'où :

$$x + \mathrm{e}^{\,x} = y + \mathrm{e}^{\,y} y \iff x = y.$$

Puis :

$$x^2 + xy + y^2 = 27 \iff 3x^2 = 27 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3.$$

On conclut que l'ensemble des solutions du système proposé est $\{(-3,\,-3),\ (3,\,3)\}$.

6.10

1) Ensemble de définition

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2 \iff x^2 \leqslant 1 \iff x \in [-1\,;1],$$

donc $\text{Déf}(f) = [-1\,;1]$.

On remarque que f est paire, et on peut donc restreindre l'étude à $x \in [0\,;1]$.

2) Transformation de l'écriture de $f(x)$

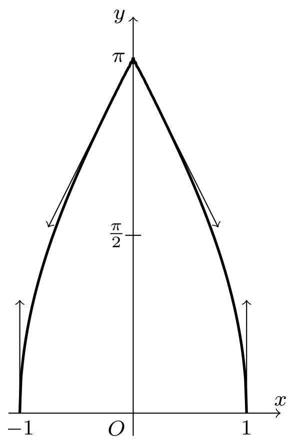
Soit $x \in [0\,;1]$. Notons $t = \operatorname{Arccos} x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a :

$$f(x) = \operatorname{Arccos}(2x^2 - 1) = \operatorname{Arccos}(2\cos^2 t - 1) = \operatorname{Arccos}(\cos 2t).$$

Comme $2t \in [0\,;\pi]$, on obtient : $f(x) = 2\operatorname{Arccos} x$.

3) Tracé de la représentation graphique de f

Pour $x \in [0\,;1]$, on trace la représentation graphique de Arccos, puis on multiplie les ordonnées par 2 (affinité d'axe $x'x$, de direction $y'y$, de rapport 2), puis on effectue la symétrie par rapport à $y'y$.



6.11

Notons $f, g : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x), \qquad g(x) = \operatorname{Arccos}\Big(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\Big).$$

Par composition, f et g sont continues sur $[0\,;+\infty[$, dérivables sur $]0\,;+\infty[$, et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

$$g(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \cdot \frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

donc $f' = g'$.

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ f(x) = g(x) + C$.

En remplaçant x par 0, comme $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, on déduit $C = 0$ et on conclut : $f = g$.

6.12

On a, pour tout $x \in [-1\,;1]$:

$$(1) \iff \operatorname{Arcsin}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x.$$

Comme le premier membre de cette équation est dans $\Big[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$ et que le second est dans $[0\,;\pi]$, on a :

$$(1) \iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\Big] & (2) \\ \sin\Big(\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{2}\Big) = \sin\Big(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\Big) & (3). \end{cases}$$

On a :

$$(3) \iff \frac{x}{2} = \cos(\operatorname{Arcsin} x) \iff \frac{x}{2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 = 4(1-x^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 5x^2 = 4 \end{cases} \iff x = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ainsi, l'équation (3) a une solution et une seule, $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, et on a alors, pour cette valeur de x :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \in \Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big] \subset \Big[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\Big],$$

donc x est aussi solution de (2).

Finalement, l'équation proposée a une solution et une seule, $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

6.13

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

On suppose P pair. Il existe $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^{2k}$.

On a, pour tout $\theta \in \Big]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\Big[$:

$$P(\tan\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \tan^{2k}\theta = \sum_{k=0}^{n} a_k (\tan^2\theta)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\Big)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\Big)^k.$$

Pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, $\Big(\dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1\Big)^k$ se développe en $Q_k\Big(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\Big)$, où Q_k est un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a alors, en notant $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k Q_k$:

$$P(\tan\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k\Big(\frac{1}{\cos^2\theta}\Big) = Q\Big(\frac{1}{\cos^2\theta}\Big).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall \theta \in \Big]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\Big[, \quad P(\tan\theta) = Q\Big(\frac{1}{\cos^2\theta}\Big).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En notant $\theta = \operatorname{Arctan} x$, on a $x = \tan\theta$ et :

$$P(-x) = P(-\tan\theta) = P\big(\tan(-\theta)\big) = Q\Big(\frac{1}{\cos^2(-\theta)}\Big)$$

$$= Q\Big(\frac{1}{\cos^2\theta}\Big) = P(\tan\theta) = P(x),$$

donc P est pair.

6.14

a) On a, avec les notations de l'énoncé, et en notant (1) l'inégalité voulue :

$$(1) \iff 2(y-x) < (x+y)(\ln y - \ln x)$$

$$\iff 2\Big(\frac{y}{x} - 1\Big) < \Big(1 + \frac{y}{x}\Big)\ln\frac{y}{x}.$$

En notant $t = \dfrac{y}{x} \in]1\,;+\infty[$, on a :

$$(1) \iff 2(t-1) < (t+1)\ln t \iff \ln t > 2\,\frac{t-1}{t+1}.$$

L'application $f : [1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = \ln t - 2\,\dfrac{t-1}{t+1}$. est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout $t \in [1\,;+\infty[$:

$$f'(t) = \frac{1}{t} - 2\,\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{(t+1)^2 - 4t}{t(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geqslant 0 \text{ et } > 0 \text{ si } t \neq 1.$$

Il en résulte que f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

De plus, $f(1)=0$, d'où : $\forall t\in\,]1\,;\,+\infty[,\quad f(t)>0$,

ce qui montre l'inégalité voulue.

b) On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en utilisant *a)* appliqué à $(k,\,k+1)$ à la place de (x,y) :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{(k+1)-k}{\ln(k+1)-\ln k}<\sum_{k=1}^{n}k\frac{k+(k+1)}{2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{12}\big(2(2n+1)+3\big)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{12}.$$

6.15

Par le changement de variable $t=1+\dfrac{1}{x}>1,\ x=\dfrac{1}{t-1}$, on a, en notant (1) l'inégalité demandée :

$$(1)\iff\ln t\leqslant\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t-1}\cdot\dfrac{t}{t-1}}}\iff\ln t\leqslant\frac{t-1}{\sqrt{t}}.$$

Puis, en posant $u=\sqrt{t}>1,\ t=u^2$:

$$(1)\iff\ln(u^2)\leqslant\frac{u^2-1}{u}\iff 2\ln u\leqslant u-\frac{1}{u}.$$

L'application

$$f:[1\,;\,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad u\longmapsto f(u)=u-\frac{1}{u}-2\ln u$$

est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et, pour tout $u\in[1\,;\,+\infty[$:

$$f'(u)=1+\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}=\frac{u^2+1-2u}{u^2}=\frac{(u-1)^2}{u^2}\geqslant 0.$$

Il en résulte que f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

De plus, $f(1)=0$. On a donc $f\geqslant 0$, d'où le résultat demandé.

6.16

Si $x\in\mathbb{R}$ est solution, alors $x^{\frac{1}{2}}$ existe, donc $x\geqslant 0$.

De plus, 0 n'est pas solution, car : $0^{0^{\frac{1}{2}}}=0^0=1\neq\dfrac{1}{2}$.

D'autre part, si $x\geqslant 1$, alors $x^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$, puis $x^{x^{\frac{1}{2}}}\geqslant 1$, donc x n'est pas solution.

On peut donc supposer : $x\in\,]0\,;\,1[$.

Notons $t=x^{\frac{1}{2}}>0$. On a :

$$x^{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\iff x^{\frac{1}{2}}\ln x=\ln\frac{1}{2}$$

$$\iff t\ln(t^2)=-\ln 2\iff t\ln t+\frac{\ln 2}{2}=0.$$

Considérons $f:]0\,;\,1]\longrightarrow\mathbb{R},\quad t\longmapsto f(t)=t\ln t+\dfrac{\ln 2}{2}$.

L'application f est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et :

$$\forall t\in\,]0\,;\,1],\quad f'(t)=1+\ln t,$$

d'où le tableau des variations de f :

t	0		e^{-1}		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{\ln 2}{2}$	$\searrow$	<0	$\nearrow$	$\frac{\ln 2}{2}$

Et : $f(e^{-1})=-e^{-1}+\dfrac{\ln 2}{2}\simeq -0{,}021<0$.

Il en résulte que f s'annule en deux points exactement.

De plus, on remarque :

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{2}=0,\qquad f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{2}=0.$$

Ainsi : $f(t)=0\iff t\in\left\{\dfrac{1}{4},\,\dfrac{1}{2}\right\}$.

Enfin, comme $x=t^2$, on conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\dfrac{1}{16},\,\dfrac{1}{4}\right\}$.

On peut contrôler :

- si $x=\dfrac{1}{16}$, on a : $x^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4},\quad x^{x^{\frac{1}{2}}}=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$
- si $x=\dfrac{1}{4}$, on a : $x^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2},\quad x^{x^{\frac{1}{2}}}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

6.17

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Notons $t=\operatorname{Arctan}x,\ u=\operatorname{Arctan}y$. On a donc : $x=\tan t,\quad y=\tan u,\quad (t,u)\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule :

$$\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}=\frac{1-\tan t\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 t}\sqrt{1+\tan^2 u}}=\frac{1-\tan t\tan u}{\dfrac{1}{|\cos t|}\ \dfrac{1}{|\cos u|}}$$

$$=\frac{1-\tan t\tan u}{\dfrac{1}{\cos t}\ \dfrac{1}{\cos u}}=\cos t\cos u-\sin t\sin u=\cos(t+u).$$

Il en résulte, puisque $\cos(t+u)\in[-1\,;\,1]$ et que Arccos est définie sur $[-1\,;\,1]$, que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

De plus : $t+u\in\,]-\pi\,;\,\pi[$. Séparons en deux cas :

- *1er cas :* $t+u\in[0\,;\,\pi[$

Alors :

$$f(x,y)=\operatorname{Arccos}\big(\cos(t+u)\big)=t+u=\operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}y.$$

- *2è cas :* $t+u\in\,]-\pi\,;\,0]$

Alors, $-(t+u)\in[0\,;\,\pi[$, donc :

$$f(x,y)=\operatorname{Arccos}\big(\cos(t+u)\big)=\operatorname{Arccos}\Big(\cos\big(-(t+u)\big)\Big)$$
$$=-(t+u)=-(\operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}y).$$

Enfin :

$$t+u\geqslant 0\iff\operatorname{Arctan}x\geqslant-\operatorname{Arctan}y$$
$$\iff\operatorname{Arctan}x\geqslant\operatorname{Arctan}(-y)\iff x\geqslant -y\iff x+y\geqslant 0.$$

On conclut :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \operatorname{sgn}(x+y)(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y),$$

où sgn : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction signe, définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad a < 0 \\ 0 & \text{si} \quad a = 0 \\ 1 & \text{si} \quad a > 0. \end{cases}$$

6.18

a) Soit $(a,b) \in [0\,;\,1[^2$.

Notons $u = \operatorname{Arctan} a$, $v = \operatorname{Arctan} b$.

On a alors, par une formule de trigonométrie sur tan :

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Comme $(u,v) \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[^2$, on a $u+v \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

et on déduit : $u + v = \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab}$, d'où le résultat voulu.

b) On applique *a)* de façon répétée :

$$\begin{aligned}
S &= 2\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{8} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{18}\right) \\
&\qquad +3\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{8} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{57}\right) \\
&= 2\operatorname{Arctan}\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{18}}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{18}} + 3\operatorname{Arctan}\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{57}}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{57}} \\
&= 2\operatorname{Arctan}\frac{2}{11} + 3\operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \\
&= 2\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{11} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}\right) + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \\
&= 2\operatorname{Arctan}\frac{\frac{2}{11}+\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{7}} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \\
&= 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \\
&= \left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}\right) + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} \\
&= \operatorname{Arctan}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} \\
&= \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} \\
&= \operatorname{Arctan}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} \\
&= \operatorname{Arctan} 1 \;=\; \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Vrai ou Faux ?

6.1 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2 x - 1.$ V F

6.2 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}^2 x - 1.$ V F

6.3 L'application $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective. V F

6.4 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|.$ V F

6.5 Comme la puissance l'emporte sur le logarithme, on a : $\dfrac{\ln(x + \mathrm{e}^{x})}{\sqrt{x}} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$ V F

6.6 $(\ln x)^3 x^2 \mathrm{e}^{-x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$ V F

6.7 La fonction Arcsin est continue sur $[-1\,;1]$, dérivable sur $]-1\,;1[$, non dérivable en -1 ni en 1. V F

6.8 $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}.$ V F

6.9 $\forall x \in [-1\,;1], \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}.$ V F

6.10 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x.$ V F

Vrai ou Faux, les réponses

6.1 On a : $\operatorname{ch}(2x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \dfrac{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2 - 2}{2} = 2\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)^2 - 1 = 2\operatorname{ch}^2 x - 1.$ **V**

6.2 Pour $x = 0$, on a $\operatorname{sh} 2x = 0$ et $2\operatorname{sh}^2 x - 1 = -1$. **F**

La formule correcte est : $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

6.3 L'application sh est continue, strictement croissante et de limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection monotone, sh est bijective. **V**

6.4 Les applications $f : x \longmapsto x - \sin x$ et $g : x \longmapsto x + \sin x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ et $g'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$, donc f et g sont croissante sur $\mathbb{R}_+$. **V**

Comme $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, on déduit $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |\sin x| \leqslant x = |x|.$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$: $|\sin x| = |\sin(-x)| \leqslant -x = |x|$.

6.5 L'explication donnée et la réponse donnée sont fausses : $\ln(x + \mathrm{e}^{x})$ n'est pas vraiment un logarithme, à cause de la présence de e^{x}. **F**

On a : $$\frac{\ln(x + \mathrm{e}^{x})}{\sqrt{x}} = \frac{\ln\big(\mathrm{e}^{x}(x\,\mathrm{e}^{-x} + 1)\big)}{\sqrt{x}} = \frac{x + \ln(1 + x\,\mathrm{e}^{-x})}{\sqrt{x}}$$
$$= \sqrt{x} + \frac{\ln(1 + x\,\mathrm{e}^{-x})}{\sqrt{x}} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

6.6 On a : $(\ln x)^3 x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \underbrace{\dfrac{(\ln x)^3}{x}}_{\longrightarrow 0} \underbrace{x^3\,\mathrm{e}^{-x}}_{\longrightarrow 0} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$ **V**

6.7 C'est un résultat du cours. **V**

6.8 L'application $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: **V**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\frac{1}{1 + \Big(\dfrac{1}{x}\Big)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

donc f est constante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Comme $f(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = 2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, on conclut au résultat proposé.

6.9 Soient $x \in [-1\,;1]$, $t = \operatorname{Arcsin} x$. **V**

On a alors $x = \sin t$ et $t \in [-\pi/2\,;\pi/2]$, donc $\pi/2 - t \in [0\,;\pi]$ et $\cos(\pi/2 - t) = \sin t$, d'où, par définition de Arccos : $\dfrac{\pi}{2} - t = \operatorname{Arccos} x$, d'où le résultat proposé.

6.10 Contrexemple : $x = \pi$. **F**

Une formule correcte est : $\forall x \in [-\pi/2\,;\pi/2]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$.

Chapitre 7

Calculs de primitives

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de primitives
- Calculs d'intégrales.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Liste des primitives usuelles, à savoir par coeur
- Linéarité, primitivation par parties, changement de variable dans une primitive
- Méthodes du cours pour calculer les primitives de certaines fonctions.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer une primitive du type $I(x) = \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, où f a une primitive simple et g a une dérivée simple

Essayer de primitiver par parties :

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

➟ **Exercices 7.1, 7.5, 7.7**

Exemple

Calculer la primitive :

$$I(x) = \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

(variable $x \in]0\,;\,+\infty[$).

Effectuons une primitivation par parties, avec :

$$\begin{cases} u = \operatorname{Arctan} x \\ v' = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3} \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases}$$

où u, v sont bien de classe C^1 sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{1}{2x^2}\operatorname{Arctan} x - \int -\frac{1}{2x^2}\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan} x\right) + C, \end{aligned}$$

où C est une constante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Méthode

Pour calculer une primitive du produit d'un polynôme par une exponentielle :

$$I(x) = \int P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x,$$

où $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$

D'après le cours, il existe $Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, de même degré que P, tel que : $I(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} + \mathrm{Cte}$. Chercher Q par coefficients indéterminés. On est alors ramené à la résolution d'un système linéaire en cascade.

➟ **Exercice 7.1**

Exemple

Calculer la primitive (variable $x \in \mathbb{R}$) :

$$I(x) = \int x^2 \, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x$$

D'après le cours, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I(x) = (ax^2 + bx + c) \, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C,$$

où C est une constante sur $\mathbb{R}$

Le triplet (a, b, c) convient si et seulement si, en dérivant :

$$\begin{aligned} x^2 \, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} &= \Big(\frac{1}{2}(ax^2 + bx + c) + (2ax + b)\Big) \, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\ &= \Big(\frac{1}{2}ax^2 + \Big(\frac{1}{2}b + 2a\Big)x + \Big(\frac{1}{2}c + b\Big)\Big) \, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Il suffit que :

$$\frac{1}{2}a = 1, \quad \frac{1}{2}b + 2a = 0, \quad \frac{1}{2}c + b = 0.$$

On obtient :

$$a = 2, \quad b = -4a = -8, \quad c = -2b = 16.$$

On conclut :

$$I(x) = (2x^2 - 8x + 16) \, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C,$$

où C est une constante sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour calculer une primitive du produit d'un polynôme par un cosinus ou un sinus :

$$I(x) = \int P(x) \cos \beta x \, \mathrm{d}x,$$

$$J(x) = \int P(x) \sin \beta x \, \mathrm{d}x,$$

où $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\beta \in \mathbb{R}^*$

Considérer $I(x) + \mathrm{i}\, J(x) = \displaystyle\int P(x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta x} \, \mathrm{d}x$.

Calculer cette primitive par coefficients indéterminés (complexes), puis prendre partie réelle et partie imaginaire.

➟ **Exercice 7.1**

Exemple

Calculer la primitive (variable $x \in \mathbb{R}$) :

$$I(x) = \int x \sin x \, \mathrm{d}x$$

Considérons aussi

$$A(x) = \int x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

On a :

$$A(x) + \mathrm{i}\, I(x) = \int x(\cos x + \mathrm{i} \sin x) \, \mathrm{d}x = \int x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x} \, \mathrm{d}x.$$

D'après le cours, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) + \mathrm{i}\, I(x) = (ax + b) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x} + C,$$

où C est une constante (complexe) sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, il faut et suffit, en dérivant, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x} = \big(\mathrm{i}\,(ax + b) + a\big) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x}$$

et il suffit que :

$$1 = \mathrm{i}\, a, \quad 0 = \mathrm{i}\, b + a,$$

c'est-à-dire :

$$a = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\,\mathrm{i}\,, \quad b = -\frac{a}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}\, a = 1.$$

On a donc :

$$\int x\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x = (-\,\mathrm{i}\,x + 1)\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} + C,$$

où C est une constante (complexe) sur $\mathbb{R}$.

En développant, on a :

$$\begin{aligned} A(x) + \mathrm{i}\, I(x) &= (-\,\mathrm{i}\,x + 1)(\cos x + \mathrm{i}\,\sin x) + C \\ &= (\cos x + x \sin x) + \mathrm{i}\,(\sin x - x\cos x) + C, \end{aligned}$$

et on conclut, en prenant la partie imaginaire :

$$I(x) = \sin x - x\cos x + C_1,$$

où C_1 est une constante (réelle) sur $\mathbb{R}$.

On pouvait aussi, plus simplement, effectuer une intégration par parties.

Méthode

Pour calculer une primitive du produit d'un polynôme, d'une exponentielle, et d'un cosinus ou sinus (trois facteurs) :

$$\int P(x)\ \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x\, \mathrm{d}x,$$

$$\int P(x)\ \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x\, \mathrm{d}x,$$

où $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\beta \in \mathbb{R}^*$

Passer par une écriture en nombres complexes : on note

$$I(x) = \int P(x)\ \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x\, \mathrm{d}x,$$

$$J(x) = \int P(x)\ \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x\, \mathrm{d}x,$$

et on a

$$I(x) + \mathrm{i}\, J(x) = \int P(x)\ \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\,\beta)x}\, \mathrm{d}x,$$

calculer cette primitive par coefficients indéterminés, puis prendre partie réelle et partie imaginaire.

➟ **Exercice 7.5**

Méthode

Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle

- La méthode générale consiste à utiliser une décomposition en éléments simples.
- On peut quelquefois faire d'abord un changement de variable qui simplifiera les calculs.

➟ **Exercice 7.2**

Exemple

Calculer la primitive :

$$I(x) = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

(variable $x \in]-1\,;\,+\infty[$).

On a, en utilisant une décomposition en éléments simples facile :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(x+1) - \ln(x+2) + C, \end{aligned}$$

où C est une constante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Méthode

Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$$

- Si R est un polynôme, linéariser.
- Sinon, appliquer les règles de Bioche, suivantes :
  On forme $\omega(x) = R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$.
  Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$ dans $\omega(x)$.
  - Si, pour tout x, $\omega(-x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable $t = \cos x$.
  - Si, pour tout x, $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable $t = \sin x$.
  - Si, pour tout x, $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable $t = \tan x$.
  - Sinon, faire le changement de variable $t = \tan \dfrac{x}{2}$.

➟ **Exercices 7.3, 7.8**

Exemple

Calculer la primitive

$$I(x) = \int \sin^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

(variable $x \in \mathbb{R}$).

Linéarisons :

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x),$$

d'où :

$$I(x) = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C,$$

où C est une constante sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Calculer la primitive

$$I(x) = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

(variable $x \in]-\pi/2\,;\,\pi/2[$).

En notant $\omega(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, on a $\omega(-x) = \omega(x)$, donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable $t = \cos x$ (ce que l'on pouvait aussi intuiter directement) :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1-t^2}{t^2}(-\,\mathrm{d}t) = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = t + \frac{1}{t} + C \\ &= \cos x + \frac{1}{\cos x} + C, \end{aligned}$$

où C est une constante sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$.

Exemple

Calculer la primitive

$$I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

(variable $x \in]-\pi/2\,;\,\pi/2[$).

En notant $\omega(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, on a $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable $t = \sin x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\ &= -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C, \end{aligned}$$

où C est une constante sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$.

Exemple

Calculer la primitive

$$I(x) = \int \frac{1}{3+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

(variable $x \in]-\pi/2\,;\,\pi/2[$).

En notant $\omega(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{3+\cos^2 x}$, on a $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable $t = \tan x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1}{3+\dfrac{1}{1+t^2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{1}{4+3t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}\,\dfrac{t}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\,\frac{t}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\,\frac{\tan x}{2}\right) + C, \end{aligned}$$

où C est une constante sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$.

Méthode

Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$:

$$I(x) = \int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,\mathrm{d}x$$

- Si R est un polynôme, linéariser.
- Sinon, appliquer les règles de Bioche, adaptées aux fonctions hyperboliques, suivantes :

  Considérer $\omega(x) = R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$, obtenu en remplaçant $\operatorname{ch} x$ par $\cos x$, et $\operatorname{sh} x$ par $\sin x$ dans l'énoncé.
  Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$ dans $\omega(x)$.

  - Si, pour tout x, $\omega(-x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable $t = \operatorname{ch} x$.
  - Si, pour tout x, $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable $t = \operatorname{sh} x$.
  - Si, pour tout x, $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable $t = \operatorname{th} x$.
  - Sinon, faire le changement de variable $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$, ou plutôt, ce qui est souvent plus commode, faire le changement de variable $u = \mathrm{e}^{x}$.

➟ **Exercices 7.4, 7.9**

Exemple

Calculer la primitive (variable $x \in \mathbb{R}$) :

$$I(x) = \int \operatorname{th} x \, \mathrm{d}x$$

Pour calculer $\displaystyle\int \tan x \, \mathrm{d}x$, en notant $\omega(x) = \tan x \, \mathrm{d}x$, on a $\omega(-x) = \omega(x)$, donc, d'après les règles de Bioche, on ferait le changement de variable $t = \cos x$, donc on fait ici le changement de variable $t = \operatorname{ch} x$:

$$I(x) = \int \operatorname{th} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln \operatorname{ch} x + C,$$

où C est une constante sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour calculer une primitive

$$I(x) = \int f(x) \, \mathrm{d}x,$$

un même groupement $\varphi(x)$ apparaissant plusieurs fois dans $f(x)$

Essayer le changement de variable $t = \varphi(x)$, surtout si $\varphi'(x)$ apparaît en facteur dans $f(x)$.

➟ **Exercices 7.6, 7.10**

Lors d'un changement de variable dans un calcul de primitive, ne pas oublier de traiter le $\mathrm{d}x$.

Lors d'un changement de variable dans un calcul d'intégrale, ne pas oublier aussi de modifier les bornes.

Exemple

Calculer (variable $x \in]1\,;+\infty[$) :

$$I(x) = \int \frac{2 + \ln x}{x(1 + \ln x)^3} \, \mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable $t = 1 + \ln x$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{1+t}{t^3} \, \mathrm{d}t = \int \left(t^{-3} + t^{-2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{t^{-2}}{-2} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} + C \\
&= -\frac{1}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{1+\ln x} + C = -\frac{3 + 2\ln x}{2(1+\ln x)^2} + C,
\end{aligned}$$

où C est une constante sur $]1\,;+\infty[$.

Méthode

Pour calculer une primitive d'une fonction rationnelle en x et en $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$$

Faire le changement de variable $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.

Exemple

Calculer la primitive
$$I(x) = \int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x$$
(variable $x \in]0\,;\,1[$).

On a :
$$I(x) = \int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x.$$
Effectuons le changement de variable
$$t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$
Alors
$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1}{1-\dfrac{t^2}{1+t^2}}\,t\,\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2(t - \operatorname{Arctan} t) + C \\ &= 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C, \end{aligned}$$
où C est une constante sur $]0\,;\,1[$.

Méthode

Pour calculer une intégrale avec bornes particulières

Essayer de faire un changement de variable qui échange les bornes.

➟ **Exercice 7.10**

Exemple

Calculer
$I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x(\cos^3 x + \sin^3 x)\,\mathrm{d}x.$

On a, par le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, qui échange les bornes :
$$I = \int_{\pi/2}^{0}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(\sin^3 t + \cos^3 t)(-\,\mathrm{d}t) = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(\cos^3 t + \sin^3 t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2}(\cos^3 t + \sin^3 t)\,\mathrm{d}t}_{\text{notée } J} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} t(\cos^3 t + \sin^3 t)\,\mathrm{d}t}_{\text{c'est } I},$$
d'où : $2I = \dfrac{\pi}{2}J.$

Calculons J en décomposant par linéarité et en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ dans la seconde intégrale :
$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2}\cos^3 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos^3 t\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{0}\cos^3 u\,\mathrm{d}u \\ &= 2\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^3 u\,\mathrm{d}u}_{\text{notée } K}. \end{aligned}$$
Enfin, par le changement de variable $y = \sin u$:
$$K = \int_0^{\pi/2}\cos^2 u \cos u\,\mathrm{d}u = \int_0^1 (1-y^2)\,\mathrm{d}y = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$
On déduit $J = 2K = \dfrac{4}{3}$, puis : $I = \dfrac{\pi}{4}J = \dfrac{\pi}{3}.$

Énoncés des exercices

7.1 Primitives par primitivation par parties, ou par connaissance de la forme du résultat

Calculer les primitives suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité

a) $\displaystyle\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int (-x^3 + x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$.

7.2 Primitives de fractions rationnelles

Calculer les primitives suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2+1)} \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^{10}+1} \,\mathrm{d}x$.

7.3 Primitives ou intégrales de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Calculer les primitives suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité (questions *a)* à *e)*), et l'intégrale suivante (question *f)*) :

a) $\displaystyle\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \sin x \sin 2x \sin 3x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{(2+\sin x)^2} \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{4 + \sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x$.

7.4 Primitives de fractions rationnelles en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$

Calculer les primitives suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\displaystyle\int \operatorname{sh}^4 x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x} \,\mathrm{d}x$.

7.5 Primitive du produit d'un polynôme, d'une exponentielle et d'un cosinus

Calculer $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x} \cos x \,\mathrm{d}x$.

7.6 Primitives par changements de variable

Calculer les primitives suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\displaystyle\int \frac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x.$

7.7 Primitives par primitivation par parties et changement de variable

Calculer les primitives suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

7.8 Calcul d'une intégrale de fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$

Calculer l'intégrale $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$.

7.9 Primitive de fraction rationnelle en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$

Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{1}{3+\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$, en indiquant l'ensemble de validité.

7.10 Intégrales avec bornes particulières

Calculer :

a) $\displaystyle I=\int_{1/a}^{a}\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,\mathrm{d}x,\qquad a\in[1\,;+\infty[$ fixé

b) $\displaystyle I=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x,$ puis $\displaystyle J=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle K=\int_0^1\frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

Du mal à démarrer ?

7.1 *a)* Primitiver par parties pour faire disparaître le logarithme.

b) Grouper les deux intégrales pour faire intervenir e^{ix}.

c) On connaît, d'après le cours, la forme du résultat.

7.2 *a)* Décomposer en éléments simples.

b) Décomposer en éléments simples.

c) Effectuer le changement de variable $t = x^5$, puisque l'expression sous l'intégrale contient $(x^5)^2$ et $x^4\,dx$.

7.3 *a)* Linéariser.

b) Linéariser.

c) Les règles de Bioche indiquent le changement de variable $t = \cos x$.

d) Les règles de Bioche indiquent le changement de variable $t = \sin x$.

e) Remarquer que le numérateur est presque la dérivée du dénominateur.

f) Les règles de Bioche indiquent le changement de variable $t = \tan x$.

7.4 *a)* Linéariser.

b) Linéariser.

c) Les règles de Bioche, adaptées aux fonctions hyperboliques, indiquent le changement de variable $t = \operatorname{ch} x$.

7.5 Faire intervenir une exponentielle complexe. Ensuite, faire une primitivation par parties.

7.6 *a)* Effectuer le changement de variable $t = \ln x$, puis reconnaître une dérivée.

b) Effectuer le changement de variable $t = \sqrt{e^{x} + 1}$.

c) Effectuer le changement de variable $t = \sqrt{x}$, puis le changement de variable $u = t^3 + 1$.

7.7 *a)* Primitiver par parties pour faire disparaître $\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}$, puis utiliser le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

b) Primitiver par parties pour faire disparaître Arctan, puis utiliser le changement de variable $t = x^2$.

7.8 Les règles de Bioche indiquent le changement de variable $t = \tan \dfrac{x}{2}$.

7.9 Les règles de Bioche, adaptées aux fonctions hyperboliques, indiquent de faire le changement de variable $t = \operatorname{th} \dfrac{x}{2}$, ou bien le changement de variable $u = e^{x}$, ce dernier étant en général plus simple à mettre en oeuvre.

7.10 *a)* Effectuer un changement de variable qui échange les bornes : $y = \dfrac{1}{x}$.

b) Effectuer un changement de variable qui échange les bornes : $t = \dfrac{\pi}{4} - x$. Pour calculer J, faire le changement de variable $t = \tan x$. Pour calculer K, intégrer par parties.

Corrigés des exercices

7.1

a) La fonction $f\ :\ x \longmapsto x^2 \ln x$ a pour ensemble de définition $D =]0\,;+\infty[$ et f est continue sur D, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in D$.

On a, par une primitivation par parties, pour des fonctions de classe C^1:

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x) = \dfrac{x^3}{3} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x}, \end{cases}$$

$$I(x) = \int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C,$$

où C est une constante.

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par dérivation.

b) Les fonctions $f : x \longmapsto x^2\cos x$ et $g : x \longmapsto x^2 \sin x$ ont pour ensemble de définition $D = \mathbb{R}$ et sont continues sur D, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J(x) = \displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x$ sont définis pour tout $x \in D$.

On a, en faisant intervenir l'exponentielle complexe : $I(x) + \mathrm{i}\,J(x) = \displaystyle\int x^2\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$.

D'après le cours, on connaît la forme de cette primitive : il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\int x^2\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x = (ax^2 + bx + c)\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}.$$

On a alors, par dérivation, pour tout $x \in D$:

$$x^2\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((ax^2+bx+c)\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\big)$$
$$= (ax^2+bx+c)\,\mathrm{i}\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} + (2ax+b)\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$$
$$= \big(\mathrm{i}\,ax^2 + (\mathrm{i}\,b + 2a)x + (\mathrm{i}\,c + b)\big)\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}.$$

Il suffit donc que : $\mathrm{i}\,a = 1,\quad \mathrm{i}\,b + 2a = 0,\quad \mathrm{i}\,c + b = 0.$

On résout ce système en cascade, et on obtient :

$$a = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\,\mathrm{i}\,,\qquad b = -\frac{2a}{\mathrm{i}} = 2,\qquad c = -\frac{b}{\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{i}\,.$$

Ainsi : $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x = (-\,\mathrm{i}\,x^2 + 2x + 2\,\mathrm{i}\,)\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} + C$, où C est une constante (complexe).

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par dérivation.

On développe de façon à pouvoir ensuite séparer la partie réelle et la partie imaginaire :

$$I(x) + \mathrm{i}\,J(x) = (-\,\mathrm{i}\,x^2 + 2x + 2\,\mathrm{i}\,)(\cos x + \mathrm{i}\,\sin x) + C$$
$$= (x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x)$$
$$+\,\mathrm{i}\,(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x) + C,$$

et on conclut :

$$\begin{cases} I(x) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C_1 \\ J(x) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C_2, \end{cases}$$

où C_1, C_2 sont des constantes (réelles).

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par dérivation.

c) La fonction $f\ :\ x \longmapsto (-x^3 + x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{e}^{-x}$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R}$ et est continue sur D, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ existe pour tout $x \in D$.

On connaît la forme du résultat :

il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que, pour tout $x \in D$:

$$I(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{-x} + C,$$

où C est une constante (réelle).

On a, en dérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)\ \mathrm{e}^{-x} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)\ \mathrm{e}^{-x}$$
$$= \big(-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + (c-d)\big)\ \mathrm{e}^{-x}.$$

Il suffit donc de trouver (a,b,c,d) solution du système :

$$-a = -1,\quad 3a - b = 1,\quad 2b - c = -2,\quad c - d = 3.$$

On résout ce système en cascade, et on obtient :

$$a = 1,\quad b = 3a - 1 = 2,\quad c = 2b + 2 = 6,\quad d = c - 3 = 3.$$

On conclut : $I(x) = (x^3 + 2x^2 + 6x + 3)\ \mathrm{e}^{-x} + C$,
où C est une constante (réelle).

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par dérivation.

7.2

a) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R} - \{-2,\,-1,\,0\}$ et f est continue sur D, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in D$.

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)} = \frac{a}{\mathrm{X}} + \frac{b}{\mathrm{X}+1} + \frac{c}{\mathrm{X}+2},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est à calculer.

On multiplie par X puis on remplace X par 0, et on obtient : $a = \dfrac{1}{2}$.

On multiplie par $\mathrm{X}+1$ puis on remplace X par -1, et on obtient : $b = -1$.

On multiplie par $\mathrm{X}+2$ puis on remplace X par -2, et on obtient : $c = \dfrac{1}{2}$.

On a donc :

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{X}} - \frac{1}{\mathrm{X}+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{X}+2},$$

ce que l'on peut d'ailleurs contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

On a donc :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \Big(\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+2}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C(x), \end{aligned}$$

où $C : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application constante sur chaque intervalle de D, c'est-à-dire :

$C : D = \mathbb{R} - \{-2,\,-1,\,0\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si} \quad x < -2 \\ C_2 & \text{si} \quad -2 < x < -1 \\ C_3 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ C_4 & \text{si} \quad 0 < x, \end{cases}$$

où $(C_1,\,C_2,\,C_3,\,C_4) \in \mathbb{R}^4$.

On peut aussi écrire : $I(x) = \ln\sqrt{\dfrac{|x(x+2)|}{(x+1)^2}} + C(x)$.

b) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^5+x^3-x+1}{x^2(x^2+1)}$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R}^*$ et est continue sur D, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in D$.

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{\mathrm{X}^5+\mathrm{X}^3-\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2+1)} = E + \frac{a}{\mathrm{X}^2} + \frac{b}{\mathrm{X}} + \frac{c\mathrm{X}+d}{\mathrm{X}^2+1},$$

où $E \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ sont à calculer.

On calcule E comme quotient de la division euclidienne de $\mathrm{X}^5+\mathrm{X}^3-\mathrm{X}+1$ par $\mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2+1)$, et on obtient : $E = \mathrm{X}$.

On multiplie par X^2 puis on remplace X par 0, et on obtient : $a = 1$.

On multiplie par X^2+1 puis on remplace X par i, et on obtient : $c\,\mathrm{i} + d = \dfrac{\mathrm{i}^5+\mathrm{i}^3-\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}^2} = -1+\mathrm{i}$, d'où $c = 1$, $d = -1$.

On calcule enfin d en remplaçant X par 1, par exemple : $1 = 1+1+b$, d'où $b = -1$.

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{X}^5+\mathrm{X}^3-\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2+1)} = \mathrm{X} + \dfrac{1}{\mathrm{X}^2} - \dfrac{1}{\mathrm{X}} + \dfrac{\mathrm{X}-1}{\mathrm{X}^2+1}$.

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \Big(x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan} x + C(x), \end{aligned}$$

où C est une application constante sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire :

$C : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si} \quad x < 0 \\ C_2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

c) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^4}{x^{10}+1}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a, par le changement de variable $t = x^5$:

$$\begin{aligned} I(x) = \int \frac{x^4\mathrm{d}x}{x^{10}+1} &= \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{5}\operatorname{Arctan} t + C = \frac{1}{5}\operatorname{Arctan}(x^5) + C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

7.3

a) La fonction $f : x \longmapsto \cos^4 x$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Linéarisons :

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \Big(\frac{1+\cos 2x}{2}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x &= \int \Big(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

b) La fonction $f : x \longmapsto \sin x \sin 2x \sin 3x$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Linéarisons :

$$\begin{aligned} \sin x \sin 2x \sin 3x &= \sin 2x(\sin x \sin 3x) \\ &= \sin 2x\Big(\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \cos 4x \\ &= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}(\sin 6x - \sin 2x) \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \Big(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x + C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

c) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin^3 x}{\cos^8 x}$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R} - \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et est continue sur D, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in D$.

En notant $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x$,

on a $\omega(-x) = \omega(x)$, donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable $t = \cos x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1-t^2}{t^8}\,\mathrm{d}t = \int (-t^{-8} + t^{-6})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{-7}}{7} - \frac{t^{-5}}{5} + C_1(t) = \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C(x), \end{aligned}$$

où $C : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application constante sur chaque intervalle de D, c'est-à-dire $C(x) = C_n$ si $x \in]-\pi/2 + n\pi\,;\,\pi/2 + n\pi[,\ n \in \mathbb{Z},\ C_n \in \mathbb{R}$.

d) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\cos^3 x}{(2+\sin x)^2}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En notant $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\cos^3 x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$,

on a $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable $t = \sin x$:

$$I(x) = \int \frac{\cos^2 x}{(2+\sin x)^2} \cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{(2+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons ensuite le changement de variable

$$u = 2+t,\ t = u-2$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1-(u-2)^2}{u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{-u^2+4u-3}{u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \left(-1 + \frac{4}{u} - \frac{3}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= -u + 4\ln|u| + \frac{3}{u} + C_1 \\ &= -(2+t) + 4\ln|2+t| + \frac{3}{2+t} + C_1 \\ &= -\sin x + 4\ln(2+\sin x) + \frac{3}{2+\sin x} + C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

e) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x - \cos x}{4 + \sin x + \cos x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$, et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque que le numérateur est l'opposé de la dérivée du dénominateur, donc :

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{4 + \sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln(4 + \sin x + \cos x) + C,$$

où C est une constante.

f) L'application $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ est continue sur le segment $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, car le dénominateur est alors > 0, donc $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

1re méthode : utilisation des règles de Bioche :

En notant $\omega(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$,

on a $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable

$$t = \tan x,\ x = \operatorname{Arctan} t,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\tan x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{\mathrm{X}}{(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+1)} = \frac{a}{\mathrm{X}+1} + \frac{b\mathrm{X}+c}{\mathrm{X}^2+1},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est à calculer.

On multiplie par $\mathrm{X}+1$ puis on remplace X par -1, et on obtient : $a = -\dfrac{1}{2}$.

On multiplie par X^2+1 puis on remplace X par i, d'où : $b\,\mathrm{i} + c = \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$, donc $b = \dfrac{1}{2},\ c = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{X}}{(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+1)} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mathrm{X}+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^2+1}$,

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{Arctan} t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(-\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{\pi - 2\ln 2}{8}. \end{aligned}$$

2è méthode : utilisation d'une intégrale associée à I :

Considérons $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$.

On a :

$$I + J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

et :

$$J - I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \big[\ln|\sin x + \cos x|\big]_0^{\pi/4} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

On déduit :

$$I = \frac{1}{2}\big((I+J) - (J-I)\big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\Big) = \frac{\pi - 2\ln 2}{8}.$$

7.4

a) La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{sh}^4 x$ admet pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Linéarisons :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}^4 x &= (\mathrm{sh}^2 x)^2 = \Big(\frac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\big(\mathrm{ch}^2 2x - 2\,\mathrm{ch}\,2x + 1\big) \\ &= \frac{1}{4}\frac{\mathrm{ch}\,4x + 1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,2x + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}\mathrm{ch}\,4x - \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,2x + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \mathrm{sh}^4 x\,\mathrm{d}x = \int \Big(\frac{1}{8}\mathrm{ch}\,4x - \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,2x + \frac{3}{8}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{32}\mathrm{sh}\,4x - \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2x + \frac{3x}{8} + C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

b) La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,3x$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Linéarisons. À cet effet, rappelons d'abord la formule analogue en trigonométrie circulaire :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big).$$

On remplace cos par ch et sin par i sh :

$$\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b = \frac{1}{2}\big(\mathrm{ch}\,(a+b) + \mathrm{ch}\,(a-b)\big).$$

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\mathrm{ch}\,4x + \mathrm{ch}\,2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\mathrm{sh}\,4x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2x + C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

c) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}^3 x}$ admet pour ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ et est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

En notant $\omega(x) = \dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$, on a $\omega(-x) = \omega(x)$, donc, d'après les règles de Bioche adaptées aux fonctions hyperboliques, on peut effectuer le changement de variable $t = \mathrm{ch}\,x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1}{\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^3 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)t^3}. \end{aligned}$$

On effectue ensuite le changement de variable $u = t^2$:

$$I(x) = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u-1)u^2}.$$

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(\mathrm{X}-1)\mathrm{X}^2} = \frac{a}{\mathrm{X}-1} + \frac{b}{\mathrm{X}^2} + \frac{c}{\mathrm{X}},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est à calculer.

On multiplie par $\mathrm{X}-1$ puis on remplace X par 1, et on obtient : $a = 1$.

On multiplie par X^2 puis on remplace X par 0, et on obtient : $b = -1$.

On multiplie par X puis on fait tendre X vers l'infini, et on obtient : $a + c = 0$, donc $c = -a = -1$.

Ainsi : $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)\mathrm{X}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{X}-1} - \dfrac{1}{\mathrm{X}^2} - \dfrac{1}{\mathrm{X}},$

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \Big(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\Big)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln|u-1| + \frac{1}{u} - \ln|u|\Big) + C_1(u) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln|t^2-1| - \ln|t^2| + \frac{1}{t^2}\Big) + C_2(t) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln|\mathrm{ch}^2 x - 1| - \ln(\mathrm{ch}^2 x) + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\Big) + C(x) \\ &= \ln|\mathrm{th}\,x| + \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2 x} + C(x), \end{aligned}$$

où $C : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est constante sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire :

$$C : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$x \longmapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x < 0 \\ C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

7.5

La fonction $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{x}\cos x$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Une primitivation par parties ne semble pas commode, car $f(x)$ est le produit de trois facteurs.

Considérons aussi $J(x) = \int x\,\mathrm{e}^{x} \sin x \,\mathrm{d}x$ et passons par l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} I(x) + \mathrm{i}\,J(x) &= \int x\,\mathrm{e}^{x}(\cos x + \mathrm{i}\,\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On peut maintenant faire une primitivation par parties, pour des applications de classe C^1 (ou utiliser la méthode des coefficients indéterminés) :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(x) + \mathrm{i}\,J(x) &= x\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} - \int \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{(1+\mathrm{i})^2} + C, \end{aligned}$$

où C est une constante (complexe).

On a :

$$\begin{aligned} I(x) + \mathrm{i}\,J(x) &= x\frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \frac{(1-\mathrm{i})^2}{4}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + C \\ &= \frac{x}{2}(1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{x}(\cos x + \mathrm{i}\,\sin x) \\ &\qquad + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{x}(\cos x + \mathrm{i}\,\sin x) + C \\ &= \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x}\big((\cos x + \sin x) + \mathrm{i}\,(\sin x - \cos x)\big) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}(-\sin x + \mathrm{i}\,\cos x) + C. \end{aligned}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on conclut :

$$\begin{cases} I(x) = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x}(\cos x + \sin x) - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}\sin x + C_1 \\ J(x) = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x}(\sin x - \cos x) + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}\cos x + C_2, \end{cases}$$

où C_1, C_2 sont des constantes (réelles).

On peut contrôler ces deux résultats par dérivation.

7.6

a) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}$ a pour ensemble de définition

$$D =]0\,;+\infty[-\{\mathrm{e}^{-4}\} =]0\,;\,\mathrm{e}^{-4}[\cup]\,\mathrm{e}^{-4}\,;+\infty[$$

et est continue sur D, donc $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in D$.

On effectue le changement de variable

$$t = \ln x,\ x = \mathrm{e}^{t},\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$$

$$I(x) = \int \frac{3+t}{(4+t)^2}\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t.$$

On remarque que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{e}^{t}}{4+t}\Big) = \Big(\frac{1}{4+t} - \frac{1}{(4+t)^2}\Big)\,\mathrm{e}^{t} = \frac{3+t}{(4+t)^2}\,\mathrm{e}^{t}.$$

On a donc : $I(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{4+t} + C_1(t) = \dfrac{x}{4+\ln x} + C(x)$,

où $C : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application constante sur tout intervalle de D, c'est-à-dire :

$$C : D \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x \in]0\,;\,\mathrm{e}^{-4}[\\ C_2 & \text{si } x \in]\,\mathrm{e}^{-4}\,;+\infty[. \end{cases}$$

b) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On effectue le changement de variable

$$t = \sqrt{\mathrm{e}^{x}+1},\ \mathrm{e}^{x} = t^2 - 1,\ x = \ln(t^2-1),\ \mathrm{d}x = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{(t^2-1)^2}{t}\,\frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\int (t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big(\frac{t^3}{3} - t\Big) + C = \frac{2}{3}t(t^2-3) + C \\ &= \frac{2}{3}(\mathrm{e}^{x}-2)\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1} + C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

c) La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2\sqrt{x}+x}$ a pour ensemble de définition $D = [0\,;+\infty[$ et est continue sur D, donc $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in D$.

Effectuons, pour $x \in]0\,;+\infty[$, le changement de variable

$$t = \sqrt{x},\ x = t^2,\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

$$I(x) = \int \sqrt{t^5+t^2}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\int t^2\sqrt{t^3+1}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons ensuite le changement de variable

$$u = t^3+1,\ 3t^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{2}{3}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{9}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{4}{9}(t^3+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{9}\big(x^{\frac{3}{2}}+1\big)^{\frac{3}{2}} + C, \end{aligned}$$

où C est une constante.

Ce résultat est encore valable pour $x = 0$, par continuité de I en 0.

7.7

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ a pour ensemble de définition $D = [0\,;1[$ et est continue sur D, donc $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in D$.

Effectuons une primitivation par parties pour faire disparaître $\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}$:

$$\begin{cases} u(x) = \operatorname{Arcsin}\sqrt{x} \\ v'(x) = (1-x)^{-\frac{3}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \\ v(x) = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} \end{cases}$$

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}}\operatorname{Arcsin}\sqrt{x} - \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\,\mathrm{d}x}_{\text{notée } J(x)}.$$

On a, par le changement de variable

$$y = \sqrt{x},\ x = y^2,\ \mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$$

$$J(x) = \int \frac{1}{y(1-y^2)}2y\,\mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C_1 = \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + C_1,$$

où C_1 est constante.

On conclut : $I(x) = \dfrac{2\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + C$,

où C est une constante sur $[0\,;\,1[$.

b) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R}^*$ et est continue sur D, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in D$.

Effectuons une primitivation par parties pour faire disparaître $\operatorname{Arctan} x$:

$$\begin{cases} u(x) = \operatorname{Arctan} x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$I(x) = -\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} + \underbrace{\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x}_{\text{notée } J(x)}.$$

On a, par le changement de variable $y = x^2$:

$$J(x) = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1+y)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right)\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\big(\ln|y| - \ln|1+y|\big) + C_1(y) = \frac{1}{2}\big(\ln(x^2) - \ln(1+x^2)\big) + C(x),$$

et on conclut :

$$I(x) = -\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C(x),$$

où C est une application constante sur chaque intervalle de D, c'est-à-dire :

$$C : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x < 0 \\ C_2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

7.8

L'application $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3+\cos x}$ est continue sur le segment $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc I existe.

En notant $\omega(x) = \dfrac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$, on n'a pas, pour tout x, $\omega(-x) = \omega(x)$, ni $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, ni $\omega(\pi + x) = \omega(x)$.

Les règles de Bioche nous indiquent donc de faire le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$, $x = 2\operatorname{Arctan} t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} = \int_0^1 \frac{\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{3 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{4+2t^2}$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7.9

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3+\operatorname{ch} x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, donc $I(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a, par le changement de variable

$$t = \mathrm{e}^{\,x},\ x = \ln t,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$I(x) = \int \frac{1}{3 + \dfrac{t+\frac{1}{t}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{2}{t^2+6t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Le discriminante du trinôme t^2+6t+1 est $\Delta = 32 > 0$, donc ce trinôme admet deux zéros réels

$$t_1 = \frac{-6-\sqrt{32}}{2} = -3-2\sqrt{2},\ t_2 = -3+2\sqrt{2}.$$

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{2}{\mathrm{X}^2+6\mathrm{X}+1} = \frac{2}{(\mathrm{X}-t_1)(\mathrm{X}-t_2)} = \frac{a}{\mathrm{X}-t_1} + \frac{b}{\mathrm{X}-t_2}.$$

On multiplie par $\mathrm{X} - t_1$ puis on remplace X par t_1, et on obtient : $a = \dfrac{2}{t_1-t_2} = \dfrac{2}{-4\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

De même : $b = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ainsi : $\dfrac{2}{\mathrm{X}^2+6\mathrm{X}+1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\dfrac{1}{\mathrm{X}-t_1} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\dfrac{1}{\mathrm{X}-t_2}$,

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$I(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1}{t-t_1},\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1}{t-t_2}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|t-t_1| + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln|t-t_2| + C$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\mathrm{e}^{\,x}+3-2\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\,x}+3+2\sqrt{2}} + C,$$

où C est une constante.

7.10

a) L'application $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$ est continue sur le segment $\left[\dfrac{1}{a}\,;\,a\right]$, donc I existe.

Effectuons un changement de variable qui échange les bornes, $t = \dfrac{1}{x},\ x = \dfrac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$:

$$I = \int_a^{1/a} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} \left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \int_{1/a}^{a} \frac{1}{t} \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

d'où, par addition :

$$2I = \int_{1/a}^{a} \frac{1}{x}\left(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{1/a}^{a} \frac{\pi}{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}[\ln x]_{1/a}^{a} = \frac{\pi}{2}\left(\ln a - \ln \frac{1}{a}\right) = \pi \ln a.$$

On conclut : $I = \dfrac{\pi}{2} \ln a$.

b) 1) L'application $f : x \longmapsto \ln(1 + \tan x)$ est continue sur le segment $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, donc I existe.

Effectuons un changement de variable qui échange les bornes, $t = \dfrac{\pi}{4} - x,\ x = \dfrac{\pi}{4} - t$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi/4}^{0} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)(-\mathrm{d}t)\\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\pi/4} \big(\ln 2 - \ln(1 + \tan t)\big)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.
\end{aligned}$$

Ainsi, $2I = \dfrac{\pi}{4}\ln 2$, et on conclut : $I = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

2) Par le changement de variable (dans I) :

$$u = \tan x,\ x = \operatorname{Arctan} u,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2},$$

on obtient : $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + u)\frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = J$,

et on conclut : $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

3) Par une intégration par parties, pour des fonctions de classe C^1 :

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^1 \operatorname{Arctan} x \frac{1}{1 + x}\,\mathrm{d}x\\
&= \big[\operatorname{Arctan} x \ln(1 + x)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\ln(1 + x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{4}\ln 2 - J = \frac{\pi}{8}\ln 2.
\end{aligned}$$

Vrai ou Faux ?

7.1 On a, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$, où C est constante sur $\mathbb{R}^*$. V F

7.2 On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^{x} + C$, où C est constante sur $\mathbb{R}$. V F

7.3 On a, pour $x \in]-1\,;1[$, $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$, où C est constante sur $]-1\,;1[$. V F

7.4 On a, pour $a \in]0\,;+\infty[$ fixé et pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+ax^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Arctan}(\sqrt{a}\,x) + C$, où C est constante sur $\mathbb{R}$. V F

7.5 On a, pour $x \in]-1\,;1[$, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Arcsin} x + C$, où C est constante sur $]-1\,;1[$. V F

7.6 On a, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé et pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha} + C$, où C est constante (complexe) sur $\mathbb{R}$. V F

7.7 On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Arctan}(\cos x) + C$, où C est constante sur $\mathbb{R}$. V F

7.8 On a, pour $x \in]0\,;+\infty[$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}(3+\ln x)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(3+\ln x)^4 + C$, où C est constante sur $]0\,;+\infty[$. V F

7.9 On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$, où C est constante sur $\mathbb{R}$. V F

7.10 Par le changement de variable $t = \operatorname{Arctan} x$, on obtient : V F

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{t}{2+\tan^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Vrai ou Faux, les réponses

7.1 Il manque une valeur absolue sur x et C n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$. **F**

La réponse correcte est : $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C(x)$,

où : $C : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \begin{cases} C_1 & \text{si} \quad x < 0 \\ C_2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ $\qquad (C_1,\, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

7.2 La formule s'obtient par une intégration par parties. **V**

7.3 La formule s'obtient en décomposant $\dfrac{1}{1-x^2}$ en $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$ puis en primitivant chacun des deux termes obtenus. **V**

7.4 Il manque un facteur $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. **F**

La formule correcte est : $\displaystyle\int \frac{1}{1+ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{a}\,x) + C$.

7.5 C'est un résultat du cours. **V**

7.6 Le résultat est faux pour $\alpha = 0$, et vrai si $\alpha \neq 0$. **F**

7.7 La dérivée de $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\cos x)$ est $x \longmapsto \dfrac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$, par dérivation d'une fonction composée, et non $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$. **F**

7.8 Il suffit d'effectuer le changement de variable $t = \ln x$, ou de remarquer que la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{4}(3+\ln x)^4$ est bien $x \longmapsto \dfrac{1}{x}(3+\ln x)^3$, par dérivation d'une fonction composée. **V**

7.9 On linéarise $\sin^2 x$: $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$. **V**

7.10 Dans le changement de variable $t = \operatorname{Arctan} x$, il y a eu oubli du calcul de $\mathrm{d}x$. **F**

La formule correcte est : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{t}{2+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Chapitre 8

Équations différentielles linéaires

Plan

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :

ED pour :
équation différentielle

EDL pour :
équation différentielle linéaire

EDL1 pour :
équation différentielle linéaire du premier ordre

EDL2 pour :
équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

Thèmes abordés dans les exercices

- Résolution d'EDL1, avec ou sans second membre
- Étude des raccords éventuels
- Résolution d'EDL2 à coefficients constants
- Résolution de certaines équations fonctionnelles.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Résolution des EDL1 normalisées, sans second membre (formule du cours), puis avec second membre (solution évidente ou méthode de variation de la constante)
- Définition d'une dérivée, théorème limite de la dérivée, pour l'étude des raccords
- Résolution d'EDL2 à coefficients constants, sans second membre (formule du cours, plusieurs cas), puis avec second membre du type exponentielle-polynôme.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour résoudre une EDL1 normalisée, sans second membre, sur un intervalle :

$$(\mathrm{E}_0) \quad y' + ay = 0$$

Appliquer la formule du cours donnant la solution générale :

$$y : x \longmapsto \lambda \exp\Big(-\int a(x)\,\mathrm{d}x\Big), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple

Résoudre l'EDL1 $(\mathrm{E}_0)\ \ y' - xy = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto y(x)$.

D'après le cours, la solution générale de (E_0) est donnée par :

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lambda \exp\Big(\int x\,\mathrm{d}x\Big) = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Pour résoudre une EDL1 normalisée, avec second membre, sur un intervalle :

$$(\mathrm{E}) \quad y' + ay = b$$

Résoudre d'abord l'EDL1 sans second membre associée $(\mathrm{E}_0)\ \ y' + ay = 0$.

Chercher une solution particulière de (E) par l'une des méthodes suivantes :

- ∗ solution évidente
- ∗ principe de superposition des solutions
- ∗ méthode de variation de la constante.

Enfin, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

➟ **Exercices 8.1, 8.4**

Exemple

Résoudre l'EDL1 $(\mathrm{E})\ \ y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x^3}$, d'inconnue $y :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

• D'après le cours, la solution générale de l'EDL1 $(\mathrm{E}_0)\ \ y' + \dfrac{2}{x}y = 0$ sans second membre, associée à (E), est donnée par :

$$y : x \longmapsto \lambda \exp\Big(-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\Big) = \lambda \exp(-2\ln x) = \frac{\lambda}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

• Cherchons une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante : $y(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x^2}$, où λ est une fonction inconnue, supposée dérivable.

$$\begin{array}{lll}\text{On a :} & & \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = \dfrac{1}{x^3}\\ & \iff & \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \dfrac{\lambda'(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^3}\\ & \iff & \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \lambda'(x) = \dfrac{1}{x}\\ & \Longleftarrow & \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \lambda(x) = \ln x.\end{array}$$

Une solution particulière de (E) est donc : $y : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$.
D'après le cours, la solution générale de (E) est donc :

$$y : x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2} + \frac{\lambda}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Pour résoudre une EDL1 non normalisée, avec ou sans second membre :

(e) $\alpha y' + \beta y = \gamma$

Résoudre l'équation $\alpha(x) = 0$, d'inconnue x.
Sur chaque intervalle sur lequel α ne s'annule pas, résoudre (e) en la normalisant Étudier ensuite le raccord des solutions en chaque point en lequel α s'annule, par continuité, par dérivabilité.

➟ **Exercices 8.4 à 8.7**

Exemple

Résoudre l'EDL1 (e) $xy' - y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

L'EDL1 (e) n'est pas normalisée, mais est normalisable sur chacun des deux intervalles $I_1 =]-\infty\,;0[$, $I_2 =]0\,;+\infty[$, en (E) $y' - \dfrac{1}{x}y = 0$.
La solution générale de (E) sur $I = I_1$ ou I_2 est donnée par :

$$y : x \longmapsto \lambda \exp\Big(\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\Big) = \lambda \exp\big(\ln|x|\big) = \lambda|x|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la solution générale de (E) sur I_1 est $y_1 : x \longmapsto \lambda_1 x, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}$
et la solution générale de (E) sur I_2 est $y_2 : x \longmapsto \lambda_2 x, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 x & \text{si} \quad x < 0 \\ \lambda_2 x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on a : $y(x) \underset{x \longrightarrow 0^\pm}{\longrightarrow} 0$.

Considérons donc $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \lambda_2 x & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$

qui est donc continue en 0.

On a : $\dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lambda_1 \underset{x \longrightarrow 0^-}{\longrightarrow} \lambda_1 \\ \lambda_2 \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \lambda_2. \end{cases}$

Ainsi, y est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$.
Considérons donc $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lambda_1 x$.
Il est clair que y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de (e) sur $\mathbb{R}$.

On conclut : $\quad \mathcal{S} = \big\{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lambda x\,; \quad \lambda \in \mathbb{R}\big\}$.

Méthode

Pour résoudre une EDL2 à coefficients constants et sans second membre :

$$(\mathrm{E}_0) \quad y'' + ay' + by = 0$$

Former l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{K}$, et calculer son discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

1er cas : si l'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ deux solutions r_1, r_2 distinctes, c'est-à-dire si :

$$(\mathbb{K} = \mathbb{R} \ \text{ et } \ \Delta > 0) \quad \text{ou} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C} \ \text{ et } \ \Delta \neq 0),$$

alors la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est :

$$y : x \longmapsto \lambda_1 \,\mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \,\mathrm{e}^{r_2 x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

2è cas : si l'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ une solution double, $r_0 = -\dfrac{a}{2}$, c'est-à-dire si $\Delta = 0$, alors la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est :

$$y : x \longmapsto (\lambda x + \mu) \,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2} x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

3è cas : si l'équation caractéristique n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, alors la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est :

$$y : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{a}{2} x}\left(A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right)\right), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

➟ **Exercice 8.2**

Exemple

Résoudre les EDL2 suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Il s'agit d'EDL2 à coefficients constants et sans second membre.

a) L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, donc la solution générale est :

$$y : x \longmapsto \lambda \,\mathrm{e}^{x} + \mu \,\mathrm{e}^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

b) L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double réelle $r_0 = 2$, donc la solution générale est :

$$y : x \longmapsto (\lambda x + \mu) \,\mathrm{e}^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

c) L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées non réelles, $r_1 = -1 - \mathrm{i}$, $r_2 = -1 + \mathrm{i}$, donc la solution générale est :

$$y : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}(A \cos x + B \sin x), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Méthode

Pour résoudre une EDL2 à coefficients constants et avec second membre :

(E) $y'' + ay' + by = g,$

où g est une exponentielle-polynôme

Résoudre l'EDL2 sans second membre associée

(E$_0$) $y'' = ay' + by = 0.$

Chercher une solution particulière de (E) du même type que le second membre g de (E).

Plus précisément, si $g : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{m_k x} P_k(x)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $m_1, ..., , m_n \in \mathbb{K}$, $P_1, ..., P_n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, chercher une solution particulière de (E) de la forme $y : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{m_k x} Q_k(x)$, où $Q_1, ..., Q_n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sont inconnus et où Q_k est de degré :

deg (P_k) si m_k n'est pas solution de l'équation caractéristique
deg $(P_k) + 1$ si m_k est solution simple de l'équation caractéristique
deg $(P_k) + 2$ si m_k est solution double de l'équation caractéristique.

Enfin, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E$_0$).

➟ **Exercices 8.3, 8.10**

Exemple

Résoudre l'EDL2

(E) $y'' - 3y' + 2y = x \,\mathrm{e}^x,$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

• L'EDL2 associée sans second membre (E$_0$) $y'' - 3y' + 2y = 0$ admet pour solution générale $y_0 : x \longmapsto \lambda \,\mathrm{e}^x + \mu \,\mathrm{e}^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ comme on l'a vu ci-dessus.

• Puisque le second membre de (E) est le produit d'un polynôme par e^x et que 1 est solution simple de l'équation caractéristique associée à (E$_0$), on cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

On a :

$$y' = \big((ax^2 + bx + c) + (2ax + b)\big)\,\mathrm{e}^x = \big(ax^2 + (b + 2a)x + (c + b)\big)\,\mathrm{e}^x,$$

$$\begin{aligned} y'' &= \Big(\big(ax^2 + (b + 2a)x + (c + b)\big) + 2ax + (b + 2a)\Big)\,\mathrm{e}^x \\ &= \big(ax^2 + (b + 4a)x + (c + 2b + 2a)\big)\,\mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= \Big(\big(ax^2 + (b + 4a)x + (c + 2b + 2a)\big) \\ &\quad - 3\big(ax^2 + (b + 2a)x + (c + b)\big) + 2(ax^2 + bx + c)\Big)\,\mathrm{e}^x \\ &= \big(-2ax + (-b + 2a)\big)\,\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si $\begin{cases} -2a = 1 \\ -b + 2a = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -1$. Une solution particulière de (E) est donc :

$$y : x \longmapsto \Big(-\frac{1}{2}x^2 - x\Big)\,\mathrm{e}^x.$$

Finalement, d'après le cours, la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto -\Big(\frac{1}{2}x^2 + x\Big)\,\mathrm{e}^x + \lambda \,\mathrm{e}^x + \mu \,\mathrm{e}^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Méthode

Pour résoudre une EDL avec conditions supplémentaires, par exemple conditions aux bords

Résoudre l'EDL puis traduire, sur la solution générale de l'EDL, les conditions imposées.

Exemple

Trouver toutes les applications deux fois dérivables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que :

$$f'' + f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(\pi) = 1.$$

La solution générale de l'EDL2 $f'' + f = 0$ est

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A\cos x + B\sin x, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

On a :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(\pi) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ -B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = -1. \end{cases}$$

On conclut : $\mathcal{S} = \big\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -\sin x \big\}$.

Méthode

Pour résoudre une équation fonctionnelle ou une équation intégrale

Essayer de se ramener à une ED, par dérivation.

On pourra être amené à appliquer l'hypothèse, par exemple, à x et à $-x$, à x et à $\dfrac{1}{x}$, ou à d'autres expressions.

On raisonnera souvent par condition nécessaire, et on n'oubliera donc pas de traiter la réciproque.

➟ **Exercices 8.9, 8.11 à 8.13**

Exemple

Trouver toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) + x.$$

D'abord, si f convient, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $x \longmapsto f(x) + x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On a, en dérivant d'une part et en prenant d'autre part la valeur en 0 :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) + x \right) \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f'(x) + 1 \\ 0 = f(0). \end{cases}$$

La solution générale de l'EDL1 sans second membre $y' = y$ est

$$y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de l'EDL1 avec second membre $y' = y - 1$ est : $\quad y : x \longmapsto 1$.

D'après le cours, la solution générale de l'EDL1 avec second membre $y' = y - 1$ est : $\quad y : x \longmapsto 1 + \lambda\,\mathrm{e}^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

De plus : $\quad y(0) = 0 \iff 1 + \lambda = 0 \iff \lambda = -1$.

On conclut : $\quad \mathcal{S} = \big\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^x \big\}$.

Exemple

Trouver toutes les applications dérivables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

1) Soit f convenant.

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition l'application $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On déduit, en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f'(-x)$.
Mais, en remplaçant x par $-x$ dans l'hypothèse de l'énoncé, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) = f(x),$$

d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f(x)$.
Ainsi :

$$f'' + f = 0.$$

Par résolution de cette EDL2 à coefficients constants et sans second membre, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A \cos x + B \sin x.$$

2) Réciproquement, soient $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A \cos x + B \sin x.$$

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x) \\
\iff \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad -A \sin x + B \cos x = A \cos x - B \sin x \\
\iff \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad (A - B)(\cos x + \sin x) = 0 \\
\iff \quad & A - B = 0 \\
\iff \quad & A = B.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$\mathcal{S} = \big\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(\cos x + \sin x) \,;\, A \in \mathbb{R} \big\}.$$

Énoncés des exercices

8.1 Exemples d'EDL1 normalisées

Résoudre les ED suivantes, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée dérivable :

a) $y' - xy = x, \quad I = \mathbb{R}$

b) $y' + 2y = 4\,\mathrm{e}^{x} + \sin x + \cos x, \quad I = \mathbb{R}.$

8.2 Exemples d'EDL2 à coefficients constants et sans second membre

Résoudre les ED suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable :

a) $y'' - 4y' + 3y = 0,$

b) $y'' - 6y' + 9y = 0,$

c) $y'' + y' + y = 0.$

8.3 Exemples d'EDL2 à coefficients constants et avec second membre

Résoudre les ED suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable :

a) $y'' + y = \mathrm{e}^{x}$

b) $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 4x + 1)\,\mathrm{e}^{x}$

c) $y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x$

d) $y'' - 3y' + 2y = x(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-2x}).$

8.4 Exemples d'EDL1 normalisées

Résoudre les ED suivantes, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée dérivable :

a) $y' = y\tan x + \sin x, \quad I = \left] -\dfrac{\pi}{2} \,;\, \dfrac{\pi}{2} \right[$

b) $xy' - 2y = -\ln x, \quad I =]0\,;+\infty[.$

8.5 Exemple d'EDL1 avec étude de raccord

Résoudre l'ED $(x^3 - x)y' - (x^2 - x + 1)y = 0$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

8.6 Exemple d'EDL1 avec étude de raccord

Résoudre l'ED $xy' + (1 - x)y = \mathrm{e}^{2x}$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

8.7 Exemple d'EDL1 avec étude de raccord

Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des applications $f :]-\infty\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in]-\infty\,;1[,\quad x(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base et la dimension.

8.8 Exemple d'équation intégrale se ramenant à une EDL1

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\displaystyle\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t = f(x) \\ f(-1) = 0, \quad f(1) = 1. \end{cases}$$

8.9 Exemple d'équation fonctionnelle se ramenant à une EDL2

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big).$$

8.10 Équation différentielle d'Euler

a) Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$, $k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue. Montrer que l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x^2y'' + axy' + by = k$$

se ramène, par le changement de variable $t = \ln|x|$, à une EDL2 à coefficients constants.

b) Exemple : Résoudre l'ED (E) $x^2y''+xy'+y = x^2+x+1$, d'inconnue $y :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, supposée deux fois dérivable.

8.11 Exemple d'équation fonctionnelle se ramenant à une EDL2

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\text{(E)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f'(x) + 1.$$

8.12 Exemple d'équation fonctionnelle se ramenant à une EDL2 d'Euler

Trouver toutes les applications $f :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right).$$

8.13 Exemple d'équation intégrale se ramenant à une EDL1

Trouver toutes les applications $f : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in [0\,;\,+\infty[, \quad \int_0^x (x - 3t)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

8.14 Exemple d'EDL2 à coefficients constants et avec second membre

Résoudre l'ED $y'' + 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$, d'inconnue $y :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Du mal à démarrer ?

8.1 Il s'agit d'EDL1 normalisées, avec second membre.

Notons (E) l'ED proposée et (E_0) l'EDL1 sans second membre associée.

D'après le cours, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

Commencer par résoudre (E_0) par la formule du cours : la solution générale de (E_0) $y' + ay = 0$ est $y : x \longmapsto \lambda \exp\left(-\int a(x)\,\mathrm{d}x\right),\ \lambda \in \mathbb{K}$.

Ensuite, chercher une solution particulière de (E) :

• il se peut qu'il y ait une solution évidente (*a)*)

• si le second membre de (E) est de la forme exponentielle-polynôme, chercher une solution particulière du même genre (*b)*)

• sinon, la méthode de variation de la constante s'applique toujours.

8.2 Il s'agit d'EDL2 à coefficients constants et sans second membre, donc on dispose d'une méthode et de formules de résolution dans le cours, faisant intervenir l'équation caractéristique.

8.3 Il s'agit d'EDL2 à coefficients constants, avec second membre du type exponentielle-polynôme.

Notons (E) l'ED proposée et (E_0) l'EDL2 sans second membre associée.

Former l'équation caractéristique de (E_0), résoudre cette équation caractéristique, et en déduire la solution générale de (E_0).

Chercher ensuite une solution particulière de (E), du même genre que le second membre, avec une condition sur les degrés.

La solution générale de (E) est alors la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

8.4 Il s'agit d'EDL1 normalisées, avec second membre.

Notons (E) l'ED proposée et (E_0) l'EDL1 sans second membre associée.

D'après le cours, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

Commencer par résoudre (E_0) par la formule du cours : le solution générale de (E_0) $y' + ay = 0$ est $y : x \longmapsto \lambda \exp\left(-\int a(x)\,\mathrm{d}x\right),\ \lambda \in \mathbb{K}$.

Ensuite, chercher une solution particulière de (E) :

• il se peut qu'il y ait une solution évidente

• si le second membre de (E) est de la forme exponentielle-polynôme, chercher une solution particulière du même genre

• sinon, la méthode de variation de la constante s'applique toujours (*a), b)*).

8.5 Il s'agit d'une EDL1 non normalisée.

En notant (e) l'ED proposée, considérer l'ED (E) normalisée associée, obtenue en divisant par le coefficient $x^3 - x$ de y' dans (e).

Résoudre (E) sur tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant pas un point d'annulation -1, 0, 1 de ce coefficient, puis étudier les raccords des solutions de (e) en ces points.

8.6 Il s'agit d'une EDL1 non normalisée.

En notant (e) l'ED proposée, considérer l'ED (E) normalisée associée, obtenue en divisant par le coefficient x de y' dans (e).

Résoudre (E) sur tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant pas le point d'annulation 0 de ce coefficient, puis étudier les raccords des solutions de (e) en ce point.

8.7 L'ED (e_0) $x(x-1)y' - (x-2)y = 0$ est une EDL1 non normalisée.

Résoudre (e_0) sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;1[$, puis étudier le raccord en 0.

8.8 *1)* Soit f convenant. Montrer, en utilisant les hypothèses de l'énoncé, que f est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f vérifie une EDL1. Résoudre celle-ci et en déduire f.

2) Étudier la réciproque.

8.9 *1)* Soit f convenant. Montrer qu'alors f est deux fois dérivable et que $f'' = 0$. En déduire la forme de f.

2) Étudier la réciproque.

8.10 Noter $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x),\ t = \ln|x| = \ln(\varepsilon x),\ z(t) = y(x)$. Montrer que l'ED d'Euler (E) (portant sur y) se ramène à une EDL2 à coefficients constants (portant sur z), en calculant la dérivée première et la dérivée seconde de y, par composition.

8.11 Montrer que, si f convient, alors f est de classe C^2. Traduire (E) par l'égalité des dérivées et l'égalité des fonctions en un point. Résoudre l'EDL2 ainsi apparue.

8.12 *1)* Soit f convenant. Montrer qu'alors f est deux fois dérivable et vérifie une EDL2 d'Euler, sans second membre. Noter $t = \ln x,\ g(t) = f(x)$ et se ramener à une EDL2 à coefficients constants (portant sur g). En déduire la forme de $f(x)$ pour $x \in]0\,;+\infty[$.

2) Étudier la réciproque.

8.13 *1)* Soit f convenant. En utilisant les hypothèses de l'énoncé, montrer que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que f satisfait une EDL1. Résoudre cette EDL1 et en déduire $f = -1$.

2) Vérifier la réciproque.

8.14 Il s'agit d'une EDL2 à coefficients constants, mais avec second membre qui n'est pas de la forme exponentielle-polynôme.

Remarquer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{x}(y'+y)\big) = \mathrm{e}^{x}(y''+2y'+y)$ et que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x}y) = \mathrm{e}^{x}(y'+y)$.

Corrigés des exercices

8.1

a) La solution générale de (E_0) $y' - xy = 0$ sur $\mathbb{R}$ est

$$y_0 : x \longmapsto \lambda \exp\left(\int x\,\mathrm{d}x\right) = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$, évidente, est

$$y : x \longmapsto -1.$$

On conclut que la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$y : x \longmapsto -1 + \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) La solution générale de (E_0) $y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ est

$$y_0 : x \longmapsto \lambda \exp\left(-\int 2\,\mathrm{d}x\right) = \lambda\,\mathrm{e}^{-2x},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vu la forme du second membre, on cherche une solution particulière de (E) de la forme :

$$y : x \longmapsto a\,\mathrm{e}^{x} + b\cos x + c\sin x,\quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y' + 2y &= (a\,\mathrm{e}^{x} - b\sin x + c\cos x) + 2(a\,\mathrm{e}^{x} + b\cos x + c\sin x)\\ &= 3a\,\mathrm{e}^{x} + (2c-b)\sin x + (c+2b)\cos x. \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si :

$$3a = 4,\quad 2c - b = 1,\quad c + 2b = 1,$$

c'est-à-dire : $a = \dfrac{4}{3},\quad b = \dfrac{1}{5},\quad c = \dfrac{3}{5}.$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y : x \longmapsto \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x + \lambda\,\mathrm{e}^{-2x},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

8.2

a) L'equation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$ admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$, donc la solution générale de l'ED est :

$$y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{3x},\quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

b) L'équation caractéristique $r^2 - 6r + 9 = 0$ admet une solution réelle double $r_0 = 3$, donc la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{3x},\quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

c) L'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$

admet deux solutions complexes non réelles

$$r_1 = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2},\quad r_2 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2},$$

donc la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

8.3

a) • L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ admet deux solutions complexes non réelles, $r_1 = -\mathrm{i}$, $r_2 = \mathrm{i}$, donc la solution générale de (E_0) est

$$y : x \longmapsto A\cos x + B\sin x,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

• Une solution particulière de (E), évidente, est

$$y : x \longmapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} + A\cos x + B\sin x,\quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

b) • L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. La solution générale de (E_0) est donc :

$$y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{2x} + \mu\,\mathrm{e}^{3x},\quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

• Puisque le second membre de (E) est de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ où $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $m = 1$ (donc $m \neq 2$ et $m \neq 3$), une solution particulière de (E) est de la forme $y : x \longmapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{x}$, où $Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $\deg(Q) = \deg(P)$. Notons $Q = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est à trouver. On a :

$$y(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^{x},$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \big((ax^2 + bx + c) + (2ax + b)\big)\,\mathrm{e}^{x}\\ &= \big(ax^2 + (b+2a)x + (c+b)\big)\,\mathrm{e}^{x}, \end{aligned}$$

$$y''(x) = \Big(\big(ax^2+(b+2a)x+(c+b)\big)+\big(2ax+(b+2a)\big)\Big)\,\mathrm{e}^{\,x}$$
$$= \big(ax^2+(b+4a)x+(c+2b+2a)\big)\,\mathrm{e}^{\,x},$$

d'où :

$$y''(x)-5y'(x)+6y(x)$$
$$= \big(2ax^2+(2b-6a)x+(2c-3b+2a)\big)\,\mathrm{e}^{\,x}.$$

Pour que y soit solution de (E), il suffit que :

$$2a=2, \qquad 2b-6a=-4, \qquad 2c-3b+2a=1.$$

On résout ce système en cascade, et on obtient :

$$a=1,\ b=1,\ c=1.$$

Ainsi, $y : x \longmapsto (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{\,x}$ est une solution particulière de (E).

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{\,x} + \lambda\,\mathrm{e}^{\,2x} + \mu\,\mathrm{e}^{\,3x},$$
$$(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

On peut contrôler ce résultat par report dans l'énoncé.

c) • L'équation caractéristique $r^2-4r+4=0$ admet une solution réelle double $r_0=2$. La solution générale de (E_0) est donc $y : x \longmapsto (\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{\,2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

• Vu le second membre, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y : x \longmapsto a\sin x + b\cos x,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ à calculer.}$$

On a alors :

$$y''-4y'+4y = (3a+4b)\sin x + (3b-4a)\cos x.$$

Pour que y soit solution de (E), il suffit que :

$$\begin{cases} 3a+4b=7 \\ 3b-4a=-1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1. \end{cases}$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$y : x \longmapsto \sin x + \cos x.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto \sin x + \cos x + (\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{\,2x},\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

On peut contrôler ce résultat par report dans l'énoncé.

d) • L'équation caractéristique $r^2-3r+2=0$ admet deux solutions réelles distinctes, $r_1=1,\ r_2=2$. La solution générale de (E_0) est donc :

$$y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\,x} + \mu\,\mathrm{e}^{\,2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

• Puisque le second membre est $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\,x} + x\,\mathrm{e}^{\,-2x}$, somme d'exponentielles-polynômes, que 1 (coefficient de x dans $\mathrm{e}^{\,x}$) est solution simple de l'équation caractéristique et que -2 (coefficient de x dans $\mathrm{e}^{\,-2x}$) n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de (E) de la forme

$$y : x \longmapsto (ax^2+bx+c)\,\mathrm{e}^{\,x} + (ux+v)\,\mathrm{e}^{\,-2x},$$

où $(a,b,c,u,v)\in\mathbb{R}^5$ est à calculer.

On a, par un calcul immédiat :

$$y'(x) = \big(ax^2+(b+2a)x+(c+b)\big)\,\mathrm{e}^{\,x}$$
$$+\big(-2ux+(u-2v)\big)\,\mathrm{e}^{\,-2x},$$

$$y''(x) = \big(ax^2+(b+4a)x+(c+2b+2a)\big)\,\mathrm{e}^{\,x}$$
$$+\big(4ux+(4v-4u)\big)\,\mathrm{e}^{\,-2x},$$

d'où, après report :

$$y''-3y'+2y$$
$$= \big(-2ax+(2a-b)\big)\,\mathrm{e}^{\,x} + \big(12ux+(12v-7u)\big)\,\mathrm{e}^{\,-2x}.$$

Pour que y soit solution de (E), il suffit que :

$$-2a=1, \quad 2a-b=0 \quad 12u=1 \quad 12v-7u=0,$$

c'est-à-dire : $\quad a=-\dfrac{1}{2},\quad b=-1,\quad u=\dfrac{1}{12},\quad v=\dfrac{7}{144}.$

Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$y : x \longmapsto \Big(-\frac{1}{2}x^2-x\Big)\,\mathrm{e}^{\,x} + \Big(\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}\Big)\,\mathrm{e}^{\,-2x}.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto \Big(-\frac{1}{2}x^2-x\Big)\,\mathrm{e}^{\,x} + \Big(\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}\Big)\,\mathrm{e}^{\,-2x}$$
$$+\lambda\,\mathrm{e}^{\,x}+\mu\,\mathrm{e}^{\,2x},\qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

8.4

a) La solution générale de (E_0) $\quad y' - y\tan x = 0\quad$ sur $\Big]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\Big[$ est :

$$y : x \longmapsto \lambda\exp\Big(-\int -\tan x\,\mathrm{d}x\Big) = \lambda\,\mathrm{e}^{\,-\ln|\cos x|}$$
$$= \lambda\,\mathrm{e}^{\,-\ln\cos x} = \frac{\lambda}{\cos x},\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y : x \longmapsto \lambda(x)\dfrac{1}{\cos x}$, où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue, supposée dérivable.

On a alors :

$$\begin{aligned}
& \forall x\in I,\quad y'(x) = y(x)\tan x + \sin x \\
\iff\quad & \forall x\in I,\quad \frac{\lambda'(x)}{\cos x} = \sin x \\
\iff\quad & \forall x\in I,\quad \lambda'(x) = \sin x\cos x \\
\Longleftarrow\quad & \forall x\in I,\quad \lambda(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x.
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda(x)}{\cos x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto \frac{\sin^2 x}{2\cos x} + \frac{\lambda}{\cos x},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

b) La solution générale de (E_0) $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$ sur $]0\,;+\infty[$ est :

$$y : x \longmapsto \lambda \exp\Big(\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\Big) = \lambda\,\mathrm{e}^{\,2\ln|x|} = \lambda x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y : x \longmapsto \lambda(x)x^2$, où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue, supposée dérivable.

On a alors :
$$\begin{aligned} & \forall x \in I,\quad xy' - 2y = -\ln x \\ \iff\ & \forall x \in I,\quad \lambda'(x)x^3 = -\ln x \\ \iff\ & \forall x \in I,\quad \lambda'(x) = -\frac{\ln x}{x^3} \\ \iff\ & \forall x \in I,\quad \lambda(x) = \int -\frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties :

$$\int -x^{-3}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{2}\ln x - \int \frac{x^{-2}}{2}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{2} = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \text{Cte}.$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$y : x \longmapsto \lambda(x)x^2 = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4},$$

ce que l'on peut d'ailleurs contrôler.

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \longmapsto \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + \lambda x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}^2.$$

8.5

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) = 0 \iff x \in \{-1,\,0,\,1\}.$$

1) Résolution de (e) sur un intervalle ouvert ne contenant ni -1, *ni* 0, *ni* 1

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant ni -1, ni 0, ni 1, c'est-à-dire :

$$I \subset]-\infty\,;-1[\quad \text{ou} \quad I \subset]-1\,;0[\quad \text{ou} \quad I \subset]0\,;+\infty[.$$

Sur cet intervalle : (e) $\iff$ (E) $\quad y' - \dfrac{x^2-x+1}{x^3-x}y = 0.$

L'ED (E) est une EDL1 normalisée et sans second membre.

La solution générale de (E) sur I est donc :

$$y : x \longmapsto \lambda \exp\Big(\int \frac{x^2-x+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x\Big), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On effectue un calcul de primitive, en utilisant une décomposition en éléments simples :

$$\frac{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^3-\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}{(\mathrm{X}+1)\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)} = \frac{a}{\mathrm{X}+1} + \frac{b}{\mathrm{X}} + \frac{c}{\mathrm{X}-1},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est à calculer.

En multipliant par $\mathrm{X}+1$ puis en remplaçant X par -1, on obtient : $a = \dfrac{3}{2}$.

En multipliant par X puis en remplaçant X par 0, on obtient : $b = -1$.

En multipliant par $\mathrm{X}-1$ puis en remplaçant X par 1, on obtient : $c = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $\quad \dfrac{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^3-\mathrm{X}} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\mathrm{X}+1} - \dfrac{1}{\mathrm{X}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mathrm{X}-1},$

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

On a donc, pour tout $x \in I$:

$$y(x) = \lambda \exp\Big(\frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x\Big)$$
$$= \lambda \exp\Big(\frac{3}{2}\ln|x+1| - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1|\Big) = \lambda\frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|}.$$

2) • *Raccord en* -1

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant -1 et ne contenant ni 0 ni 1.

La solution générale de (e) sur $I - \{-1\}$ est :

$$y : I - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{|x+1|^{\frac{3}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} & \text{si } x < -1 \\[2ex] \lambda_2 \dfrac{|x+1|^{\frac{3}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$
$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On a, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$y(x) \underset{x \longrightarrow -1^-}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad y(x) \underset{x \longrightarrow -1^+}{\longrightarrow} 0.$$

On prolonge donc y par continuité en -1 en posant $y(-1) = 0$.

À cause de l'exposant $\dfrac{3}{2}$ sur $|x+1|$ dans l'écriture de $y(x)$,

on a : $\quad \dfrac{y(x) - y(-1)}{x - (-1)} \underset{x \longrightarrow -1^\pm}{\longrightarrow} 0,$

donc y est dérivable en -1 et $y'(-1) = 0$.

De plus, (e) est alors clairement satisfaite en $x = -1$.

• *Raccord en* 0

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et ne contenant ni -1 ni 1.

La solution générale de (e) sur $I - \{0\}$ est :

$$y : x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{|x+1|^{\frac{3}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \lambda_2 \dfrac{|x+1|^{\frac{3}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Il est clair que y admet une limite finie en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, et on a alors $y = 0$, fonction nulle.

• *Raccord en* 1

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 1 et ne contenant ni -1 ni 0.

La solution générale de (e) sur $I - \{1\}$ est :

$$y : x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{|x+1|^{\frac{3}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} & \text{si} \quad x < 1 \\ \lambda_2 \dfrac{|x+1|^{\frac{3}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On a, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$: $y(x) \underset{x \longrightarrow 1^{\pm}}{\longrightarrow} 0$.

On prolonge donc y par continuité en 1 en posant $y(1) = 0$.

À cause de l'exposant $\dfrac{1}{2}$ sur $|x-1|$ dans l'écriture de $y(x)$, on a, si $\lambda_1 \neq 0$ ou si $\lambda_2 \neq 0$: $\dfrac{y(x) - y(1)}{x-1} \underset{x \longrightarrow 1^{\pm}}{\longrightarrow} \pm\infty$,

donc y n'est pas dérivable en 1.

Et, si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors $y = 0$, fonction nulle.

Finalement, on conclut que l'ensemble des solutions de l'ED proposée sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{ y : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lambda \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{si} \quad 0 \notin I \text{ et } 1 \notin I$$

$$\{0\} \qquad \text{si} \quad 0 \in I \text{ ou } 1 \in I.$$

8.6

1) Résolution de l'EDL normalisée (E) associée à (e)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \notin I$.

• La solution générale de l'EDL1 sans second membre associée (E_0) $\ y' + \dfrac{1-x}{x} y = 0$ sur I est :

$$y : x \longmapsto \lambda \exp\left(-\int \frac{1-x}{x}\, \mathrm{d}x \right) = \lambda \exp\left(\int \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) \mathrm{d}x \right)$$
$$= \lambda \exp\left(-\ln|x| + x \right) = \frac{\lambda\, \mathrm{e}^{x}}{|x|}.$$

Comme $0 \notin I$, x ne change pas de signe sur I, donc, quitte à changer λ en $-\lambda$, la solution générale de (E_0) sur I est :

$$y : x \longmapsto \lambda \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

• Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y : x \longmapsto \lambda(x) \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$, où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est inconnue, supposée dérivable.

On a, pour tout $x \in I$:

$$xy'(x) + (1-x)y(x) = \mathrm{e}^{2x}$$
$$\iff x\lambda'(x) \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = \mathrm{e}^{2x} \iff \lambda'(x) = \mathrm{e}^{x}.$$

Il suffit donc de choisir $\lambda : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$.

Une solution particulière de (E) sur I est donc :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda(x)\,\mathrm{e}^{x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}.$$

Ensuite, la solution générale de (E) sur I est :

$$y : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} + \lambda \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Étude du raccord en 0

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$.

La solution générale de (e) sur $I - \{0\}$ est :

$$y : I - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x} + \lambda_1 \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x} + \lambda_2 \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On a : $\quad \mathrm{e}^{2x} + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} \underset{x \longrightarrow 0^-}{\longrightarrow} 1 + \lambda_1$,

donc, si $\lambda_1 \neq -1$ alors $y(x) \underset{x \longrightarrow 0^-}{\longrightarrow} \pm\infty$.

De même, si $\lambda_2 \neq -1$, alors y n'a pas de limite finie en 0^+.

Supposons $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

On a alors :

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 1)}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \frac{1 \cdot x}{x} = 1,$$

donc $y(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, y peut être prolongée par continuité en 0 en posant $y(0) = 1$.

On a donc : $y : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

et y est continue en 0.

On étudie la dérivabilité de y en 0, en formant, par exemple, un taux d'accroissement :

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{x} - 1 \right) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x}{x^2}.$$

Pour trouver la limite (si elle existe) de ce taux d'accroissement, lorsque $x \longrightarrow 0$, utilisons des développements limités :

$$\frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\Big[\Big(1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + o(x^2) \Big) - \Big(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) \Big) - x \Big]$$
$$= \frac{1}{x^2}\Big(\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \Big) = \frac{3}{2} + o(1) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

Ceci montre que y est dérivable en 0 et que $y'(0) = \dfrac{3}{2}$.

Enfin, il est alors clair que l'ED de l'énoncé est satisfaite par y au point 0.

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}_I$ des solutions de l'ED proposée sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est :

$$\Big\{y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{2x} + \lambda\,\mathrm{e}^{x}}{x}\ ;\ \ \lambda \in \mathbb{R}\Big\}\ \text{ si }\ 0 \notin I$$

$$\left\{y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}\right\}\ \text{ si }\ 0 \in I.$$

8.7

L'ensemble $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions, sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$, de l'EDL1 sans second membre (non normalisée) $(\mathrm{e}_0)\ \ x(x-1)y' - (x-2)y = 0$, donc, d'après le cours, $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) Notons $I =]-\infty\,;0[$ ou $I =]0\,;1[$.

L'ED (e_0) est normalisable sur I, équivalente sur I à :

$$(\mathrm{E}_0)\ \ y' - \frac{x-2}{x(x-1)}y = 0.$$

La solution générale de (E_0) sur I est :

$$y : x \longmapsto \lambda \exp\Big(\int \frac{x-2}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x\Big),\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{\mathrm{X}-2}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)} = \frac{a}{\mathrm{X}} + \frac{b}{\mathrm{X}-1},\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

En multipliant par X puis en remplaçant X par 0, on obtient : $a = 2$.

En multipliant par $\mathrm{X}-1$ puis en remplaçant X par 1, on obtient : $b = -1$.

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{X}-2}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)} = \dfrac{2}{\mathrm{X}} - \dfrac{1}{\mathrm{X}-1}$,

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$y(x) = \lambda \exp\Big(\int \Big(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\Big)\,\mathrm{d}x\Big)$$
$$= \lambda \exp\big(2\ln|x| - \ln|x-1|\big) = \lambda\frac{x^2}{|x-1|} = \lambda\frac{x^2}{1-x}.$$

Quitte à remplacer λ par $-\lambda$, la solution générale de (E_0) sur I est : $\ y : x \longmapsto \lambda\dfrac{x^2}{x-1},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$

2) Étude du raccord en 0

La solution générale de (e_0) sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;1[$ est :

$$y : \longmapsto \begin{cases} \lambda_1\dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2\dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}\qquad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Il est clair que, pour tout $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $y(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

On prolonge donc y par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$.

On a alors : $\ \dfrac{y(x) - y(0)}{x} = \lambda_{1,2}\dfrac{x}{x-1} \underset{x \to 0^{\pm}}{\longrightarrow} 0,$

donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$.

Enfin, l'ED (e) est alors satisfaite par y en 0.

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{y :]-\infty\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1\dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2\dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}\quad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

En notant :

$$f_1 :]-\infty\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$f_2 :]-\infty\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

il est clair que :

$$\mathcal{S} = \big\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\ ;\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\big\} = \mathrm{Vect}\,(f_1,f_2).$$

Enfin, la famille (f_1,f_2) est libre, car, pour tout couple $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;0[,\ \ \lambda_1\dfrac{x^2}{x-1} = 0 \\ \forall x \in]0\,;1[,\ \ \lambda_2\dfrac{x^2}{x-1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Finalement, $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une base de $\mathcal{S}$ est (f_1,f_2), et $\dim(\mathcal{S}) = 2$.

8.8

1) Soit f convenant.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, par le changement de variable $u = tx$:

$$\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u,\ \text{ donc : }\ f(x) = \frac{2}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Comme f est C^0 sur $\mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, puis, par produit par $x \longmapsto \dfrac{2}{x}$, il en résulte que f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Comme : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ xf(x) = 2\displaystyle\int_0^x f$, on déduit alors, en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ xf'(x) + f(x) = 2f(x)$.

Ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'ED : $xy' - y = 0$.

Par résolution de cette EDL1 sans second membre, il en résulte qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;0[,\ \ f(x) = \lambda x \\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ f(x) = \mu x. \end{cases}$$

De plus, comme f est continue en 0, on a, en prenant la limite lorsque x tend vers 0 : $f(0) = 0$.

Ensuite : $\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1. \end{cases}$

On obtient : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

2) Réciproquement, considérons l'application f obtenue ci-dessus.

Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f(-1) = 0$ et $f(1) = 1$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en séparant en deux cas selon le signe de x :

$$2\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t \begin{cases} \underset{\text{si } x \leqslant 0}{=} 2\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0 = f(x) \\ \underset{\text{si } x > 0}{=} 2\displaystyle\int_0^1 tx\,\mathrm{d}t = 2x\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = x = f(x). \end{cases}$$

On conclut que f convient.

Finalement, il y a une application, f et une seule convenant, l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

8.9

1) Soit f convenant.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant l'hypothèse à x et à $-x$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big) \qquad \text{et} \qquad f'(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x)+f(x)\big),$$

donc : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f'(-x) = f'(x)$.

D'autre part, puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par opérations, $f' : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On obtient alors, en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f''(x) = \frac{1}{2}\big(f'(x) - f'(-x)\big) = 0.$$

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = ax + b$.

2) Réciproquement, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \iff a = \frac{1}{2}\big((ax + b) + (-ax + b)\big) \iff a = b.$$

On conclut que l'ensemble des applications f cherché est :

$$\big\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto a(x + 1)\,;\ a \in \mathbb{R}\big\}.$$

8.10

a) On va effectuer le changement de variable $t = \ln|x|$ dans l'ED d'Euler (E) de l'énoncé.

On note donc

$$t = \ln|x|,\ J = \{\ln|x|\,;\, x \in I\},\ \varepsilon = \operatorname{sgn}(x),\ z(t) = y(x).$$

On a alors $x = \varepsilon\,\mathrm{e}^{t}$, z est deux fois dérivable sur J, et, pour tout $x \in I$:

$$y(x) = z(t), \qquad y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = z'(t)\frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(y'(x)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(z'(t)\frac{1}{x}\Big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(z'(t)\big)\frac{1}{x} + z'(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x}\Big) \\ &= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(z'(t)\big)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\Big)\frac{1}{x} + z'(t)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = z''(t)\frac{1}{x^2} - z'(t)\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{(E)} &\iff x^2\Big(\frac{z''(t)}{x^2} - \frac{z'(t)}{x^2}\Big) + ax\frac{z'(t)}{x} + bz(t) = k(x) \\ &\iff z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = k(\varepsilon\,\mathrm{e}^{t}). \end{aligned}$$

Ainsi, (E) se ramène à une EDL2 à coefficients constants.

b) On applique la méthode de *a)*.

Faisons le changement de variable

$$t = \ln x,\quad x = \mathrm{e}^{t},\quad z(t) = y(x).$$

On a :

$$y(x) = z(t),\ y'(x) = z'(t)\frac{1}{x},\ y''(x) = z''(t)\frac{1}{x^2} - z'(t)\frac{1}{x^2},$$

donc :

$$\begin{aligned} &\text{(E)}\quad x^2y'' + xy' + y = x^2 + x + 1 \\ \iff &\quad (z'' - z') + z' + z = \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{t} + 1 \\ \iff &\quad z'' + z = \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{t} + 1 \quad \text{(F)}. \end{aligned}$$

La solution générale de l'EDL2 sans second membre associée (F_0) $\ z'' + z = 0$ est $x \longmapsto A\cos t + B\sin t,\quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Puisque 2, 1, 0 ne sont pas solutions de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, on cherche une solution particulière de (F) sous la forme $z : t \longmapsto a\,\mathrm{e}^{2t} + b\,\mathrm{e}^{t} + c,\quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à calculer. On a :

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R},\quad z''(t) + z(t) = \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{t} + 1 \\ \iff &\forall t \in \mathbb{R},\quad (4a\,\mathrm{e}^{2t} + b\,\mathrm{e}^{t}) + (a\,\mathrm{e}^{2t} + b\,\mathrm{e}^{t} + c) = \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{t} + 1 \\ \iff &\forall t \in \mathbb{R},\quad (5a - 1)\,\mathrm{e}^{2t} + (2b - 1)\,\mathrm{e}^{t} + (c - 1) = 0 \\ \Longleftarrow &\ \big(5a - 1 = 0,\ \ 2b - 1 = 0,\ \ c - 1 = 0\big) \\ \iff &\ \Big(a = \frac{1}{5},\ \ b = \frac{1}{2},\ \ c = 1\Big). \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (F) est :

$$t \longmapsto \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t} + 1.$$

La solution générale de (F) est donc :

$$z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\,t} + 1 + A\cos t + B\sin t,\qquad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

On en déduit la solution générale de (E) :

$$y :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x),\qquad (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

8.11

Si f convient, alors f est dérivable, donc continue, donc $x \longmapsto \int_0^x f$ est de classe C^1, donc comme $f'(x) = -1 + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, f' est C^1, donc f est C^2 sur $\mathbb{R}$.

Soit donc $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2.

On a, par dérivation et prise de valeur en un point :

$$\text{(E)}\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f'(x)+1 \iff \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = f''(x)\\ 0 = f'(0)+1.\end{cases}$$

Par résolution de cette EDL2 à coefficients constants et sans second membre, f est de la forme :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto A\,\mathrm{ch}\,x + B\,\mathrm{sh}\,x,\quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

On a alors : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = A\,\mathrm{sh}\,x + B\,\mathrm{ch}\,x$,

donc : $f'(0)+1 = 0 \iff B+1=0 \iff B=-1$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\big\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto A\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x\,;\ \ A\in\mathbb{R}\big\}.$$

8.12

1) Soit f convenant.

Comme f est dérivable, par composition, $x \longmapsto f\Big(\dfrac{1}{4x}\Big)$ est dérivable, donc f' est dérivable, et, pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$:

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^2}f'\Big(\frac{1}{4x}\Big) = -\frac{1}{4x^2}f\Bigg(\frac{1}{4\frac{1}{4x}}\Bigg) = -\frac{1}{4x^2}f(x).$$

Ainsi, f est solution de l'EDL2 d'Euler : (E) $4x^2y''+y=0$.

On effectue le changement de variable $t=\ln x$, et donc aussi le changement de fonction inconnue, $g(t)=f(x)$. On a alors :

$$f(x) = g(t)\qquad f'(x) = g'(t)\frac{1}{x},\qquad f''(x) = g''(t)\frac{1}{x^2} - g'(t)\frac{1}{x^2}.$$

Alors : (E) $\iff \forall t\in\mathbb{R},\quad 4\big(g''(t)-g'(t)\big)+g(t)=0$.

Il s'agit d'une EDL2 à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique $4r^2-4r+1=0$ admet une solution double $r_0 = \dfrac{1}{2}$. Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad g(t) = (\lambda t+\mu)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}.$$

On obtient : $\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad f(x) = g(t) = (\lambda\ln x+\mu)\sqrt{x}$.

2) Réciproquement, soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x\longmapsto (\lambda\ln x+\mu)\sqrt{x}.$$

L'application f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) = f\Big(\frac{1}{4x}\Big) &\iff \frac{\lambda}{x}\sqrt{x} + (\lambda\ln x+\mu)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \Big(\lambda\ln\frac{1}{4x}+\mu\Big)\sqrt{\frac{1}{4x}}\\ &\iff \lambda+\lambda\ln x+\lambda\ln 2 = 0.\end{aligned}$$

Ainsi : $\Big(\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad f'(x) = f\Big(\dfrac{1}{4x}\Big)\Big) \iff \lambda = 0.$

On conclut que l'ensemble des applications f demandé est :

$$\big\{f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x\longmapsto \mu\sqrt{x}\,;\ \ \mu\in\mathbb{R}\big\},$$

et on peut contrôler que ces applications conviennent.

8.13

1) Soit f convenant. On a donc :

$$\forall x\in[0\,;+\infty[,\quad x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Puisque f est continue, les applications f et $t\longmapsto tf(t)$ sont continues, donc les applications $x\longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $t\longmapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ sont de classe C^1, d'où, en dérivant :

$$\forall x\in[0\,;+\infty[,\quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - 3xf(x) = x,$$

c'est-à-dire : $\forall x\in[0\,;+\infty[,\quad -2xf(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x$.

Il en résulte : $\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad f(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}$.

Comme le second membre de cette dernière égalité est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$, on déduit que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.

On peut alors à nouveau dériver, d'où :

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad -2xf'(x) - 2f(x) + f(x) = 1,$$

c'est-à-dire : $\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad 2xf'(x)+f(x) = -1$.

Ainsi, f est solution, sur $]0\,;+\infty[$, d'une EDL1 avec second membre.

La solution générale de l'EDL1 sans second membre associée, $2xy'+y=0$, est :

$$x\longmapsto \lambda\exp\Big(\int -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Une solution particulière évidente de l'EDL1 avec second membre est $x\longmapsto -1$.

La solution générale de l'EDL1 avec second membre est donc :

$$y : x\longmapsto -1+\frac{\lambda}{\sqrt{x}},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\ f(x) = -1+\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$.

Comme f est continue en 0, on a nécessairement $\lambda=0$ et donc $f=-1$.

2) Réciproquement, pour $f = -1$ (fonction constante égale à -1), on a, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\int_0^x (x-3t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (-x+3t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \Big[-xt + \frac{3}{2}t^2\Big]_0^x = -x^2 + \frac{3}{2}x^2 = \frac{x^2}{2},$$

donc f convient.

Finalement, il y a une application f et une seule convenant, l'application constante égale à -1.

8.14

On a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad y'' + 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

$$\iff \quad \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \mathrm{e}^{x}(y''+2y'+y) = \frac{1}{x}$$

$$\iff \quad \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{x}(y'+y)\big) = \frac{1}{x}$$

$$\iff \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \mathrm{e}^{x}(y'+y) = \ln x + \lambda$$

$$\iff \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x}y) = \ln x + \lambda$$

$$\iff \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \exists\,\mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \mathrm{e}^{x}y = \int (\ln x + \lambda)\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + \lambda x + \mu.$$

En notant $\alpha = \lambda - 1,\ \beta = \mu$, on conclut que l'ensemble des solutions de l'ED proposée est :

$$\big\{y :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (x\ln x + \alpha x + \beta)\ \mathrm{e}^{-x},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\big\}.$$

Vrai ou Faux ?

8.1 La solution générale de l'EDL1 $y' - \dfrac{1}{x}y = 0$, d'inconnue $y :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, est $y : x \longmapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}$. **V F**

8.2 La solution générale de l'EDL1 $xy' - 2y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est $y : x \longmapsto \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$. **V F**

8.3 L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'EDL1 $xy' - 3y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. **V F**

8.4 Une solution particulière de l'EDL1 $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2$, d'inconnue $y :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, est $y : x \longmapsto x^3$. **V F**

8.5 La solution générale de l'EDL2 $y'' - 3y' + 2y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est $y : x \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. **V F**

8.6 La solution générale de l'EDL2 $y'' + y' = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto A\cos x + B\sin x,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$. **V F**

8.7 La solution générale de l'EDL2 $y'' - 5y' + 6y = x^2$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est $y : x \longmapsto x + \lambda_1 \mathrm{e}^{2x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{3x},\quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. **V F**

8.8 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$, $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues sur I. Il existe une application dérivable $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et une seule telle que : **V F**

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

8.9 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $(y_0, z_0) \in \mathbb{K}^2$, $a, b \in \mathbb{K}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue sur I. Il existe une application deux fois dérivable $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et une seule telle que : **V F**

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0. \end{cases}$$

8.10 Une solution particulière de l'EDL2 $y'' + y = \operatorname{sh} x$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, peut être cherchée sous la forme $y : x \longmapsto A\cos x + B\sin x,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$. **V F**

Vrai ou Faux, les réponses

8.1 On applique la formule du cours donnant la solution générale d'une EDL1 normalisée et sans second membre : $y : x \longmapsto \lambda \exp\left(\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \lambda \exp(\ln x) = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$ **V**

8.2 L'EDL1 $xy' - 2y = 0$ n'est pas normalisée. **F**
La solution générale sur $]-\infty\,;0[$ est $y_1 : x \longmapsto \lambda_1 x^2, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}.$
La solution générale sur $]0\,;+\infty[$ est $y_2 : x \longmapsto \lambda_2 x^2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, l'application $y : x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de l'EDL1 proposée sur $\mathbb{R}$.

8.3 L'ensemble $\mathcal{S}$ est bien un $\mathbb{R}$-ev, mais sa dimension est 2 et non 1, car la solution générale de l'EDL1 sur $\mathbb{R}$ est : $y : x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ **F**

8.4 Pour $y : x \longmapsto x^3$, on a bien : $y' - \frac{2}{x}y = 3x^2 - \frac{2}{x}x^3 = 3x^2 - 2x^2 = x^2.$ **V**

8.5 Il s'agit d'une EDL2 à coefficients constants et sans second membre. **V**

L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, qui sont 1 et 2.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ est donc $y : x \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$

8.6 Il s'agit d'une EDL2 à coefficients constants et sans second membre. **F**

L'équation caractéristique $r^2 + r = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, qui sont 0 et -1.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ est donc : $y : x \longmapsto \lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{-x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$

Il y a eu confusion avec l'EDL2 $y'' + y = 0$.

8.7 La fonction $y : x \longmapsto x$ n'est pas solution de l'EDL2 proposée. **F**

8.8 C'est un résultat du cours : théorème d'existence et d'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy pour une EDL1. **V**

8.9 C'est un résultat du cours : théorème d'existence et d'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy pour une EDL2. **V**

8.10 Les fonctions $x \longmapsto A\cos x + B\sin x$ vérifient $y'' + y = 0$, donc ne vérifient pas l'EDL2 proposée $y'' + y = \operatorname{sh} x$. **F**

Une solution est $x \longmapsto \frac{1}{2}\operatorname{sh} x.$

Nombres réels, suites numériques

Chapitre 9

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Utilisation de la fonction partie entière
- Convergence d'une suite, divergence d'une suite, détermination de l'éventuelle limite d'une suite
- Séparation d'une suite en termes d'indices pairs, termes d'indices impairs, et, plus généralement, étude de suites extraites
- Montrer que deux suites réelles sont adjacentes
- Calcul du terme général pour une suite usuelle, en particulier le cas des suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants et sans second membre
- Étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de la fonction partie entière
- Notions de borne supérieure et de borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et le théorème : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$
- Propriétés des suites convergentes et des suites de limite infinie, pour les opérations algébriques et pour l'ordre usuel, en particulier le théorème d'encadrement
- Calcul du terme général pour les suites usuelles : suites arithmétiques, suites géométriques, suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants et sans second membre
- Définition et propriétés des suites extraites, en particulier le cas des suites formées par les termes d'indices pairs, d'indices impairs
- Définition et propriétés des suites réelles monotones, des suites adjacentes
- Plan d'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour résoudre une question portant sur une ou des parties entières

Utiliser essentiellement la définition de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

ou encore : $$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

➟ **Exercices 9.1, 9.4**

Exemple

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \alpha \in \mathbb{Z},\quad \lfloor x + \alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

On a, par définition de $\lfloor x \rfloor$: $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

D'où, puisque $\alpha \in \mathbb{Z}$:

$$\lfloor x \rfloor + \alpha \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor + \alpha \leqslant x + \alpha < \big(\lfloor x \rfloor + \alpha\big) + 1.$$

Par définition de $\lfloor x + \alpha \rfloor$, on conclut : $\lfloor x + \alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

Méthode

Pour établir une propriété faisant intervenir une entier n quelconque

Essayer de faire une récurrence sur n. Pour y arriver, il faut que la propriété à l'ordre $n+1$ s'exprime simplement en faisant intervenir la propriété à l'ordre n.

➟ **Exercices 9.3, 9.10**

Exemple

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} > \frac{1}{n+1}.$$

Récurrence sur n.

• Pour $n = 2$, on a $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{4!}{2^4(2!)^2} = \dfrac{3}{8}$ et $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{3}$,

et on a bien $\dfrac{3}{8} > \dfrac{1}{3}$.

• Supposons l'égalité vraie pour un $n \geqslant 2$ fixé. On a :

$$\frac{\big(2(n+1)\big)!}{2^{2(n+1)}\big((n+1)!\big)^2} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^{2n}4(n!)^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} > \frac{1}{n+1}\,\frac{2n+1}{2n+2}$$

et :

$$\frac{1}{n+1}\,\frac{2n+1}{2n+2} \geqslant \frac{1}{n+2} \iff (2n+1)(n+2) \geqslant (n+1)(2n+2)$$

$$\iff 2n^2 + 5n + 2 \geqslant 2n^2 + 4n + 2,$$

et cette dernière inégalité est vraie, donc l'inégalité voulue est vraie pour $n+1$.

On a montré l'inégalité voulue, par récurrence sur n..

Méthode

Pour montrer qu'un nombre réel α est irrationnel

Raisonner par l'absurde : supposer $\alpha \in \mathbb{Q}$ et déduire une contradiction.

➟ **Exercices 9.15, 9.16, 9.20**

Exemple

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Raisonnons par l'absurde : supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Il existe alors $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$.

On déduit : $2q^2 = p^2$.

L'exposant de 2 dans la décomposition de $2q^2$ en produit de facteurs premiers est impair et l'exposant de 2 dans la décomposition de p^2 en produit de facteurs premiers est pair, contradiction.

On conclut : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Méthode

Pour montrer qu'une suite converge et trouver sa limite

Essayer d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux (théorème d'encadrement, opérations sur les suites convergentes).

➟ **Exercices 9.1 à 9.7**

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{n\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+n^2}{k^2+n^3}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{1, ..., n\}$:

$$\frac{0+n^2}{n^2+n^3} \leqslant \frac{k+n^2}{k^2+n^3} \leqslant \frac{n+n^2}{0+n^3},$$

donc, en sommant de $k = 1$ à $k = n$:

$$n\frac{1}{1+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n^2}{k^2+n^3} \leqslant n\frac{1+n}{n^2},$$

c'est-à-dire : $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+n^2}{k^2+n^3} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$.

Comme $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{n+1}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, on déduit, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+n^2}{k^2+n^3} = 1$.

Méthode

Pour étudier la convergence d'une suite

De manière générale, privilégier l'application des théorèmes du cours.

Ne revenir aux « epsilons » que dans les cas où les énoncés des théorèmes du cours ne s'appliquent pas directement.

➟ **Exercices 9.10, 9.13**

Exemple

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $u_n^2 + v_n^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrer : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n^2 + v_n^2.$$

Comme $u_n^2 + v_n^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, il en résulte, par théorème d'encadrement : $u_n^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, puis : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

De même : $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Méthode

Pour étudier la convergence d'une suite dans laquelle apparaît une distinction entre les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs

Examiner le comportement des deux suites extraites, indices pairs, indices impairs.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$u_{2p} \underset{p\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{et} \quad u_{2p+1} \underset{p\infty}{\longrightarrow} b.$$

Montrer : $u_n + u_{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a + b$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + u_{n+1}$.

On a : $\begin{cases} v_{2p} = u_{2p} + u_{2p+1} \underset{p\infty}{\longrightarrow} a + b \\ v_{2p+1} = u_{2p+1} + u_{2p+2} \underset{p\infty}{\longrightarrow} b + a. \end{cases}$

Il en résulte : $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a + b$,

et on conclut : $u_n + u_{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a + b$.

Méthode

Pour montrer qu'une suite diverge

Essayer de :

- trouver deux suites extraites et ayant des limites différentes
- montrer que le terme général tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$
- raisonner par l'absurde : supposer que la suite converge et obtenir une contradiction.

➟ **Exercice 9.21**

Exemple

Montrer la divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\big(2 + (-1)^n\big)(n+3)}{\big(3 + (-1)^n\big)(n+2)}.$$

On a :

$$u_{2p} = \frac{3(2p+3)}{4(2p+2)} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4} \text{ et } u_{2p+1} = \frac{1(2p+4)}{2(2p+3)} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Comme $\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{1}{2}$, on conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exemple

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geqslant 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + 1}.$$

Montrer : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'abord, par récurrence facile, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 0$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + (u_n + 1)} \geqslant \sqrt{u_n^2} = u_n$,

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers un réel noté ℓ, alors, d'une part, $\ell \geqslant 0$, et d'autre part, en passant à la limite dans l'égalité de définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell + 1}$, d'où $\ell + 1 = 0$, $\ell = -1$, contradiction.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et divergente, donc, d'après le cours : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Méthode

Pour étudier une suite extraite

Appliquer le résultat du cours :

- Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et a la même limite que la suite donnée. ➟ **Exercice 9.17**
- Par contraposition, si deux suites extraites d'une même suite sont convergentes vers des limites différentes, alors la suite donnée diverge.

Exemple

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0\,;2]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^n u_n}$$

diverge.

• D'abord, montrons, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0\,;2]$.

La propriété est vraie pour $n = 0$, par hypothèse.

Si, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, u_n existe et $u_n \in [0\,;2]$, alors, comme $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ ou $u_n = \sqrt{2 + u_n}$, u_{n+1} existe, $u_{n+1} \geqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant \sqrt{2+2} = 2$, donc $u_{n+1} \in [0\,;2]$.

• Raisonnons par l'absurde : supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Par suites extraites, on a donc : $u_{2p} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2p+1} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \ell$.

On déduit : $\begin{cases} u_{2p+2} = \sqrt{2 - u_{2p+1}} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2-\ell} \\ u_{2p+3} = \sqrt{2 + u_{2p+2}} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2+\ell}. \end{cases}$

Par suites extraites, on a alors : $\sqrt{2-\ell} = \ell$ et $\sqrt{2+\ell} = \ell$,

d'où $\sqrt{2-\ell} = \sqrt{2+\ell}$, donc $\ell = 0$, puis $\sqrt{2} = 0$, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Méthode

Pour montrer que deux suites réelles $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ sont adjacentes

Établir que :

- l'une est croissante
- l'autre est décroissante
- la différence $v_n - u_n$ tend vers 0 lorsque l'entier $n \longrightarrow +\infty$.

➟ **Exercice 9.8**

Exemple

Montrer que les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$,

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 0, \end{aligned}$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• On a : $\qquad v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

On conclut, par définition, que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Méthode

Pour calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre

Former l'équation caractéristique et appliquer les formules du cours.

➟ **Exercice 9.9**

Exemple

Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, , donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2 2^n.$$

On a : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)1^n + 1 \cdot 2^n = 2^n - 1.$

Exemple

Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant :

$$\begin{cases} u_0 = -1, \ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double réelle $r_0 = 2$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu)2^n.$$

On a : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -1 \\ (\lambda + \mu)2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = 1. \end{cases}$

On conclut : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n-1)2^n.$

Exemple

Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ admet deux solutions complexes non réelles, conjuguées, distinctes :

$$r_1 = -1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,\pi/4},\ r_2 = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,\pi/4},$$

donc il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = (\sqrt{2})^n\Big(A\cos\frac{3n\pi}{4} + B\sin\frac{3n\pi}{4}\Big).$$

On a : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ \sqrt{2}\Big(-\dfrac{A}{\sqrt{2}} + \dfrac{B}{\sqrt{2}}\Big) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 2. \end{cases}$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \sqrt{2}^{\,n}\Big(\cos\dfrac{3n\pi}{4} + 2\sin\dfrac{3n\pi}{4}\Big).$

Méthode

Pour calculer le terme général u_n d'une suite récurrente linéaire du premier ou du second ordre, à coefficients constants et avec second membre

Chercher une suite particulière $(v_n)_n$ satisfaisant la même relation de récurrence que $(u_n)_n$ et de la même forme (à peu près) que le second membre. Former $w_n = u_n - v_n$, qui est le terme général d'une suite récurrente linéaire du premier ordre ou du second ordre à coefficients constants et sans second membre, calculer w_n et en déduire u_n par $u_n = v_n + w_n$.

➟ **Exercice 9.11**

Exemple

Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2. \end{cases}$$

• Cherchons une suite constante $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la même relation de récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a, en notant $v_n = \lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \lambda = 5\lambda - 6\lambda + 2 \iff \lambda = 1.$

• Notons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = u_n - v_n = u_n - 1.$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} - v_{n+2} = (5u_{n+1} - 6u_n + 2) - (5v_{n+1} - 6v_n + 2) \\ &= 5(u_{n+1} - v_{n+1}) - 6(u_n - v_n) = 5w_{n+1} - 6w_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.

L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 2,\ r_2 = 3$, donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad w_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n.$$

On a donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n + 1.$

Enfin : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = -2^{n+1} + 3^n + 1.$

Méthode

Pour étudier une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$

S'inspirer des exemples traités dans le cours.

- Souvent, on pourra trouver la ou les valeurs nécessaires de l'éventuelle limite ℓ de la suite $(u_n)_n$. En, effet, si $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.
- Il se peut que $(u_n)_n$ soit croissante et majorée, ou décroissante et minorée, donc convergente. En particulier, si f est croissante et si l'intervalle d'étude est stable par f, alors $(u_n)_n$ est monotone.
- Un dessin permet souvent de prévoir le comportement de la suite $(u_n)_n$ et guide la marche à suivre.
- Une séparation en cas, selon la position du premier terme u_0 de la suite par rapport aux points fixes de f, peut être nécessaire, suivie de l'étude de la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
- On peut essayer d'utiliser une majoration de type géométrique.

➟ **Exercice 9.12**

Exemple

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 + 2}{3u_n}. \end{cases}$$

• Considérons $f : [1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{2x^2+2}{3x}$.

L'application f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in [1\,;+\infty[, \quad f'(x) = \frac{4x \cdot 3x - (2x^2+2)3}{(3x)^2} = \frac{2(x^2-1)}{3x^2} \geqslant 0,$$

donc f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

De plus : $f(1) = \dfrac{4}{3}$. On a donc : $f([1\,;+\infty[) \subset [4/3\,;+\infty[\subset [1\,;+\infty[$.

Ceci montre que l'intervalle $[1\,;+\infty[$ est stable par f.

• Puisque $u_0 = 1 \in [1\,;+\infty[$ et que $[1\,;+\infty[$ est stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1\,;+\infty[$.

• Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté ℓ, alors $\ell \in [1\,;+\infty[$ et, comme f est continue en ℓ, on a : $\ell = f(\ell)$, d'où $\dfrac{2\ell^2+2}{3\ell} = \ell$, donc $\ell^2 = 2$ puis $\ell = \sqrt{2}$.

• Puisque f est croissante et que $f(1) = \dfrac{4}{3} \geqslant 1$ et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, l'intervalle $[1\,;\sqrt{2}]$ est stable par f.

Puisque $u_0 = 1 \in [1\,;\sqrt{2}]$ et que $[1\,;\sqrt{2}]$ est stable par f, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1\,;\sqrt{2}].$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\sqrt{2}$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n^2+2}{3u_n} - u_n = \dfrac{2-u_n^2}{3u_n} \geqslant 0$,

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{2}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que la seule limite possible est $\sqrt{2}$, on conclut : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

Méthode

Pour étudier deux suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ définies simultanément par des relations de récurrence les combinant

Essayer de :

- calculer les termes généraux u_n et v_n
- étudier la monotonie éventuelle des suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$
- raisonner sur les valeurs nécessaires des limites éventuelles

➟ **Exercice 9.19**

Exemple

Étudier les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $v_0 = \dfrac{1}{3}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 v_n \\ v_{n+1} = u_n v_n^2. \end{cases}$$

• Montrons, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et $(u_n, v_n) \in]0\,;1[^2$.

C'est vrai pour $n = 0$.

Si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :

$$u_{n+1} = u_n^2 v_n \in]0\,;1[\quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n v_n^2 \in]0\,;1[^2$$

donc c'est vrai pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et $(u_n, v_n) \in]0\,;1[^2$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} 0 \leqslant u_{n+1} = u_n^2 v_n = u_n(u_n v_n) \leqslant u_n \\ 0 \leqslant v_{n+1} = u_n^2 v_n \leqslant v_n, \end{cases}$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes.

Puisque ces deux suites sont décroissantes et minorées par 0, elles convergent et leurs limites respectives λ et μ vérifient : $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$.

De plus : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_0 = \dfrac{1}{2}$,

donc, en faisant tendre n vers l'infini : $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

De même : $0 \leqslant \mu \leqslant \dfrac{1}{3}$.

En faisant tendre n vers l'infini dans les égalités de définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\lambda = \lambda^2\mu$ et $\mu = \lambda\mu^2$,

d'où : $\quad \lambda(1-\lambda\mu) = 0$ et $\mu(1-\lambda\mu) = 0$.

Comme $1 - \lambda\mu \geqslant 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} > 0$, on déduit : $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

Finalement, les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Méthode

Pour étudier une suite ressemblant aux types usuels de suites

Essayer de se ramener aux types usuels de suites, souvent par changement d'inconnue, en ramenant l'étude de u_n à celle, par exemple, de nu_n, de $\ln u_n$,...

➟ **Exercice 9.13**

Exemple

Calculer u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n + (n+1)!.$$

En divisant par $(n+1)!$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{u_n}{n!} + 1.$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + 1.$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 + n = n,$$

d'où : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n!\, v_n = n \cdot n!\,.$

Énoncés des exercices

9.1 Exemples de calcul de limites de suites réelles

Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont on donne le terme général u_n, converge et calculer sa limite :

a) $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor, \quad x \in \mathbb{R}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k+n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$.

9.2 Exemple de calcul de limite d'une suite complexe

Étudier la convergence de la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - \overline{u_n}}{3}.$$

9.3 Une inégalité portant sur une sommation

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1.$

9.4 Somme de parties entières

Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n+4}{4} \right\rfloor = n.$

9.5 Étude de limite pour une suite construite à partir de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites à termes dans $\mathbb{R}_+^*$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{u_n^3 + v_n^3}{u_n^2 + v_n^2}$. Montrer : $\begin{cases} u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \\ v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \iff w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

9.6 Limites de trois suites

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ trois suites réelles, $a \in \mathbb{R}$. On suppose :

$$u_n + v_n + w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 3a \quad \text{et} \quad u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 3a^2.$$

Montrer : $\quad u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a, \quad v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a, \quad w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a.$

9.7 Limites de deux suites réelles à partir des limites de leur somme et de leur produit

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose :

$$x_n + y_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} S \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_n y_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} P \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer : $S^2 - 4P \geqslant 0$.

b) Si $S^2 - 4P > 0$, montrer qu'on ne peut pas conclure que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

c) Si $S^2 - 4P = 0$, montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

9.8 Exemple de deux suites adjacentes

On note, pour tout $n \geqslant 1$: $\quad u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k\,k!}\right) \quad$ et $\quad v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n\,n!}\right) u_n,$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

9.9 Suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre

Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = \lambda$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n,$$

vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 1$.

9.10 Suite de Fibonacci et coefficients binomiaux

Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$.

a) Calculer ϕ_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2} = (-1)^n$.

c) Établir que la suite $\left(\dfrac{\phi_{n+1}}{\phi_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et trouver sa limite.

d) Montrer : *1)* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_k = \phi_{2n} \qquad$ *2)* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \phi_k = -\phi_n$.

9.11 Suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre

Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n.$$

9.12 Trois exemples de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} u_0 \in \left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[\\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - \dfrac{2}{9}}. \end{cases}$

9.13 Exemple de suite réelle pour laquelle u_{n+1} est donné en fonction de u_n et de n

Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{nu_n}}{n+1}$.

9.14 Un entier caché sous des radicaux

Montrer que le réel $A = \dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ est un entier et le calculer.

9.15 Étude d'irrationnalité pour une somme de deux racines carrées

Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.
Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

9.16 Étude d'irrationnalité pour la racine carrée d'un entier

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n ne soit le carré d'aucun entier. Montrer : $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
b) Établir : $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

9.17 Utilisation de plusieurs suites extraites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que les suites extraites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$, $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$, $(u_{3p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

9.18 Caractérisation de la convergence des suites à termes dans $\mathbb{Z}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est constante.

9.19 Exemple de deux suites récurrentes simultanées

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n+\sqrt{u_nv_n}+v_n}{3}.$
Montrer qu'elles convergent, ont la même limite et que cette limite ℓ vérifie : $v_1 \leqslant \ell \leqslant u_1$.

9.20 Un exemple surprenant de rationnel issu d'irrationnels par exponentiation

Montrer qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{Q})^2$ tel que $a^b \in \mathbb{Q}$.

9.21 Suites de termes généraux $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ fixé

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Montrer que l'existence d'une des deux limites $\lim\limits_{n\infty} \sin n\alpha$, $\lim\limits_{n\infty} \cos n\alpha$ entraîne celle de l'autre, et que l'existence des deux limites entraîne une contradiction.
Conclure que ces deux suites divergent.

9.22 Moyenne de Césaro, lemme de l'escalier, applications

a) **Moyenne de Césaro**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{C}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un complexe ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.

b) **Lemme de l'escalier**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$. Montrer : $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell > 0$, alors $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.

d) Déterminer les limites, quand l'entier n tend vers l'infini, de :

$$\binom{2n}{n}^{1/n}, \quad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)}, \quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}, \quad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

Du mal à démarrer ?

9.1 *a)* Utiliser l'encadrement de définition de la partie entière pour déduire un encadrement de u_n.

b) Le terme u_n ressemble à $v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{n^2}$, car k semble négligeable devant n^2 dans $k + n^2$.

c) Isoler les termes d'indices $k = 0,\ 1,\ n-1,\ n$.

9.2 Vu que la définition de u_{n+1} en fonction de u_n est essentiellement additive, on peut essayer de passer aux parties réelles et imaginaires.

9.3 Récurrence sur n.

9.4 Chacune des trois fractions intervenant dans l'énoncé se simplifie si l'on connaît la forme de n modulo 4.

9.5 Essayer d'obtenir des encadrements permettant d'appliquer le théorème d'encadrement. On pourra envisager la suite de terme général $\mathrm{Max}\,(u_n, v_n)$.

9.6 Considérer $S_n = (u_n - a)^2 + (v_n - a)^2 + (w_n - a)^2$.

9.7 *a)* Étudier $(x_n - y_n)^2$.

b) Utiliser des suites formées, alternativement, par les deux solutions de l'équation $t^2 - St + P = 0$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

c) Calculer $(x_n - y_n)^2$.

9.8 Revenir à la définition de deux suites adjacentes.

9.9 Calculer u_n en fonction de n.

9.10 *a)* Il s'agit d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre : appliquer la méthode du cours.

On notera, par exemple, $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Utiliser *a)*, ou bien faire une récurrence sur n.

c) Utiliser *a)*.

d) Utiliser *a)* et le binôme de Newton.

9.11 Chercher une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la forme $v_n = an + b$, satisfaisant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En notant $w_n = u_n - v_n$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre, et on peut donc calculer w_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

On notera l'analogie avec l'étude des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et avec second membre.

9.12 *a)* Étudier le signe et la monotonie de u_n.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, qui a une solution et une seule, notée α, puis majorer $|u_{n+1} - \alpha|$ en faisant intervenir $|u_n - \alpha|$, de façon à amener une suite géométrique convergeant vers 0.

c) Résoudre l'équation $f(x) = x$, qui a deux solutions α, β. Séparer en cas selon la position de u_1 par rapport à α et β.

9.13 Considérer $v_n = nu_n$.

9.14 En notant u et v les deux fractions de l'énoncé, étudier $u + v$, $u^3 + v^3$, u^3v^3, pour obtenir une équation satisfaite par A.

9.15 Raisonner par l'absurde.

9.16 *a)* Raisonner par l'absurde et utiliser un argument d'arithmétique.

b) Raisonner par l'absurde et utiliser le résultat de *a*.

9.17 Considérer les deux suites extraites :

$$(u_{6q})_{q\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{6q+3})_{q\in\mathbb{N}}.$$

9.18 Pour montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à termes dans $\mathbb{Z}$, converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, revenir à la définition en ε, N de la convergence d'une suite réelle.

9.19 Étudier la position relative de u_n et v_n, et la monotonie des deux suites.

9.20 Considérer $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

La notation $\mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}$ désigne $\mathbb{R}_+$ privé de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire : $\mathbb{R}_+ - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}_+ \,;\ x \notin \mathbb{Q}\}$.

9.21 En supposant $\sin n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, utiliser la suite extraite de terme général $\sin(n+1)\alpha$ et déduire : $\cos n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell' = \dfrac{\ell - \ell\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Réitérer le raisonnement sur $\cos n\alpha$ pour déduire $\ell = \dfrac{\ell'\cos\alpha - \ell'}{\sin\alpha}$. Résoudre le système de deux équations à deux inconnues ℓ, ℓ', et déduire $\ell = \ell' = 0$. D'autre part, utiliser la formule fondamentale reliant cos et sin pour déduire une contradiction.

9.22 *a)* Revenir à la définition en ε, N de $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$, et scinder $\sum_{k=1}^{n} u_k$ en utilisant l'indice intermédiaire N.

b) Appliquer *a)* à la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ à la place de u_n.

c) Prendre le logarithme et utiliser *b)*.

d) Appliquer *c)*.

Corrigés des exercices

9.1

a) Puisque: $\forall t \in \mathbb{R},\ \ t-1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx),$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ;\quad \frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} < u_n \leqslant \frac{n+1}{2n}x.$$

On conclut, par le théorème d'encadrement :

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}.$$

b) Puisque $0 \leqslant k \leqslant 2n$, k est négligeable devant n^2, ce qui nous invite à considérer $v_n = \sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{n^2}$ et à essayer de montrer que u_n se comporte comme v_n.

• D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}k = \frac{1}{n^2}\frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{2n+1}{n},$$

donc : $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 2$.

• D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_n - v_n| = \Big|\sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{k+n^2} - \sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{n^2}\Big|$$
$$= \Big|\sum_{k=0}^{2n}\Big(\frac{k}{k+n^2} - \frac{k}{n^2}\Big)\Big| = \sum_{k=0}^{2n}\frac{k^2}{(k+n^2)n^2}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)^2}{n^2n^2} = \frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}1 = \frac{4}{n^2}(2n+1),$$

donc $|u_n - v_n| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $u_n - v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

• Enfin : $u_n = (u_n - v_n) + v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 + 2 = 2$.

c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 5$:

$$u_n = \binom{n}{0}^{-1} + \binom{n}{1}^{-1} + \sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}^{-1} + \binom{n}{n-1}^{-1} + \binom{n}{n}^{-1}$$
$$= 2\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + \sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}^{-1}.$$

Comme : $\forall k \in \{2, ..., n-2\}$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$,

on a : $\quad 0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}^{-1} \leqslant (n-3)\dfrac{2}{n(n-1)}$,

et donc : $\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}^{-1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

On conclut : $\quad u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 2$.

9.2

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_n = \text{Ré}\,(u_n),\ y_n = \text{Im}\,(u_n)$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - \overline{u_n}}{3} \iff \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2x_n - x_n) = \dfrac{1}{3}x_n \\[2ex] y_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2y_n + y_n) = y_n. \end{cases}$$

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \Big(\dfrac{1}{3}\Big)^n x_0$, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à y_0.

On déduit : $\quad u_n = \dfrac{x_0}{3^n} + \mathrm{i}\,y_0 \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{i}\,y_0$,

et on conclut : $\quad u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{i}\ \text{Im}\,(u_0)$.

9.3

Récurrence sur n.

• L'inégalité est évidente pour $n = 1$.

• Supposons l'inégalité vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$\underset{\text{hyp. rec.}}{<} \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Il suffit donc de montrer :

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1 \qquad (1).$$

On a :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \\
&\iff \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\
&\iff \quad \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1} \\
&\iff \quad \big(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\big)^2 \leqslant 4(n+1) \\
&\iff \quad 2n + 2 + 2\sqrt{n(n+2)} \leqslant 4n + 4 \\
&\iff \quad \sqrt{n(n+2)} \leqslant n + 1 \\
&\iff \quad n(n+2) \leqslant (n+1)^2 \iff 0 \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Ceci montre, par équivalences logiques successives, que l'inégalité (1) est vraie, ce qui entraîne l'inégalité voulue pour $n + 1$.

On a démontré l'inégalité demandée, par récurrence sur n.

9.4

Séparons en cas, selon le reste de la division euclidienne de n par 4, et présentons les résultats dans un tableau :

n	$\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor$	$\left\lfloor \dfrac{n+4}{4} \right\rfloor$	Somme
$4k$	$2k-1$	k	$k+1$	$4k$
$4k+1$	$2k$	k	$k+1$	$4k+1$
$4k+2$	$2k$	$k+1$	$k+1$	$4k+2$
$4k+3$	$2k+1$	$k+1$	$k+1$	$4k+3$

Ceci établit le résultat voulu, par examen de tous les cas modulo 4.

9.5

1) Supposons $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. On a :

$$0 \leqslant w_n = \frac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2} \leqslant \frac{u_n^3+v_n^3+u_n^2v_n+u_nv_n^2}{u_n^2+v_n^2} = u_n+v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, par théorème d'encadrement : $w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Réciproquement, supposons $w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_n = \operatorname{Max}(u_n, v_n)$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\quad w_n = \dfrac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2} \geqslant \dfrac{M_n^3}{2M_n^2} = \dfrac{M_n}{2} \geqslant 0,$

car : $u_n^3+v_n^3 \geqslant M^3$ et $u_n^2+v_n^2 \leqslant 2M_n^2$.

D'après le théorème d'encadrement, on déduit : $M_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puis, comme $0 \leqslant u_n \leqslant M_n$ et $0 \leqslant v_n \leqslant M_n$, on déduit, encore par le théorème d'encadrement : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

9.6

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = (u_n-a)^2+(v_n-a)^2+(w_n-a)^2.$$

On a :

$$S_n = u_n^2+v_n^2+w_n^2-2a(u_n+v_n+w_n)+3a^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 3a^2-2a\cdot 3a+3a^2 = 0.$$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant (u_n-a)^2 \leqslant S_n,$

il en résulte, par le théorème d'encadrement :

$(u_n-a)^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ puis : $u_n - a \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,\ u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a.$

De même : $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a,\ w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a.$

9.7

a) On a : $(x_n-y_n)^2 = (x_n+y_n)^2-4x_ny_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} S^2-4P$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n-y_n)^2 \geqslant 0$, on déduit, par passage à la limite : $S^2-4P \geqslant 0$.

b) Puisque $S^2-4P > 0$, l'équation $t^2-St+P=0$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$, admet deux solutions notées t_1, t_2 et on a : $t_1 \neq t_2$.

Considérons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$x_n = \begin{cases} t_1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ t_2 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} t_2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ t_1 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\quad x_n+y_n = S$ et $x_ny_n = P$,

donc : $x_n+y_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} S$ et $x_ny_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} P$.

Cependant, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui alternent deux éléments distincts, divergent.

c) On a :

$$(x_n-y_n)^2 = (x_n+y_n)^2-4x_ny_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} S^2-4P = 0,$$

donc $x_n - y_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puis : $$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\big((x_n+y_n)+(x_n-y_n)\big) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{S}{2} \\ y_n = \dfrac{1}{2}\big((x_n+y_n)-(x_n-y_n)\big) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{S}{2}. \end{cases}$$

On conclut que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont pour limite $\dfrac{S}{2}$.

9.8

1) On a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1}-u_n = \left(1+\frac{1}{(n+1)\,(n+1)!}\right)u_n - u_n = \frac{u_n}{(n+1)\,(n+1)!} \geqslant 0,$$

donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \left(1+\frac{1}{(n+1)\,(n+1)!}\right)u_{n+1} - \left(1+\frac{1}{n\,n!}\right)u_n \\ &= \left(1+\frac{1}{(n+1)\,(n+1)!}\right)^2 u_n - \left(1+\frac{1}{n\,n!}\right)u_n \\ &= \left(\frac{2}{(n+1)\,(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)^2\big((n+1)!\big)^2}-\frac{1}{n\,n!}\right)u_n \\ &= \frac{1}{n(n+1)\,(n+1)!}\left(2n+\frac{n}{(n+1)\,(n+1)!}-(n+1)^2\right)u_n. \end{aligned}$$

Comme, pour tout $n \geqslant 1$:

$$2n+\frac{n}{(n+1)\,(n+1)!}-(n+1)^2 \leqslant 2n+1-(n+1)^2 = -n^2 \leqslant 0,$$

on déduit : $\forall n \geqslant 1,\quad v_{n+1}-v_n \leqslant 0,$

donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

3) On a, pour tout $n \geqslant 1$: $v_n - u_n = \dfrac{u_n}{n\,n!} \geqslant 0$. Il s'ensuit, puisque $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante : $\forall n \geqslant 1,\quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$, puis : $0 \leqslant v_n - u_n = \dfrac{u_n}{n\,n!} \leqslant \dfrac{v_1}{n\,n!}$.

On déduit, par le théorème d'encadrement : $v_n - u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

On conclut, d'après la définition de deux suites adjacentes, que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

9.9

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants, sans second membre. L'équation caractéristique $r^2 - r + \dfrac{1}{4} = 0$, admet une solution double égale $\dfrac{1}{2}$.

D'après le cours, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha n + \beta)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n.$$

De plus : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ (\alpha+\beta)\dfrac{1}{2} = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 2\lambda. \end{cases}$

On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\lambda n\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n = \dfrac{\lambda n}{2^{n-1}}$.

Calculons les premières valeurs de $\dfrac{n}{2^{n-1}}$:

n	0	1	2	3	4	...
$n/2^{n-1}$	0	1	1	3/4	1/2	...

La suite $\Big(\dfrac{n}{2^{n-1}}\Big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, car, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{\dfrac{n+1}{2^n}}{\dfrac{n}{2^{n-1}}} = \frac{n+1}{2n} \leqslant 1.$$

Il en résulte que la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

On a donc : $\big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 1\big) \iff |u_1| \leqslant 1 \iff |\lambda| \leqslant 1$ et on conclut que l'ensemble cherché est $\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ |\lambda| \leqslant 1\}$.

9.10

a) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D'après le cours, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

De plus : $\begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \phi_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{r_1 - r_2} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{r_2 - r_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\bigg(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\bigg).$$

b) 1re méthode, utilisant a) :

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2} \\ &= \frac{1}{5}\big((r_2^{n+1} - r_1^{n+1})^2 - (r_2^n - r_1^n)(r_2^{n+1} - r_1^{n+1})\big) \\ &= \frac{1}{5}(r_1^n r_2^{n+2} - 2r_1^{n+1}r_2^{n+1} + r_1^{n+2}r_2^n) \\ &= \frac{1}{5}(r_1r_2)^n(r_2 - r_1)^2 = (-1)^n, \end{aligned}$$

puisque $r_1r_2 = -1$.

2è méthode, n'utilisant pas a) :

Récurrence sur n.

La propriété est immédiate pour $n = 0$.

Si elle est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :

$$\begin{aligned} &\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+1}\phi_{n+3} \\ &= \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+1}(\phi_{n+2} + \phi_{n+1}) \\ &= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\ &= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie pour $n+1$.

c) On a : $\dfrac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \dfrac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2^n - r_1^n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} r_2$,

car $|r_1| < 1 < r_2$.

On conclut : $\dfrac{\phi_{n+1}}{\phi_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) 1) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\phi_k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{\sqrt{5}}(r_2^k - r_1^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\bigg(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r_2^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r_1^k\bigg) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big((1+r_2)^n - (1+r_1)^n\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big((r_2^2)^n - (r_1^2)^n\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(r_2^{2n} - r_1^{2n}) = \phi_{2n}, \end{aligned}$$

en utilisant $1 + r_2 = r_2^2$ et $1 + r_1 = r_1^2$, car r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$.

2) De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\phi_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{\sqrt{5}}(r_2^k - r_1^k) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-r_2)^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-r_1)^k\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\big((1-r_2)^n - (1-r_1)^n\big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n) = -\phi_n,$$

en utilisant $r_1 + r_2 = 1$, car r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$.

9.11

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec second membre.

1) Cherchons une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $v_n = an + b$, satisfaisant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+2} = 10v_{n+1} - 21v_n + 12n$$

$$\iff \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad a(n+2)+b = 10\big(a(n+1)+b\big) - 21(an+b) + 12n$$

$$\iff \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad (12a-12)n + (12b-8a) = 0$$

$$\iff \begin{cases} 12a - 12 = 0 \\ 12b - 8a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = n + \dfrac{2}{3}$, satisfait la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\quad w_{n+2} = 10w_{n+1} - 21w_n$,

donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.

L'équation caractéristique $r^2 - 10r + 21 = 0$ est de discriminant $\Delta = 10^2 - 4\cdot 21 = 16 > 0$, donc elle admet deux solutions qui sont $\dfrac{10-4}{2} = 3$ et $\dfrac{10+4}{2} = 7$.

D'après le cours, il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad w_n = \lambda 3^n + \mu 7^n,$$

et on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = w_n + v_n = \lambda 3^n + \mu 7^n + n + \dfrac{2}{3}.$

3) Enfin, en utilisant les coefficients indiqués :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \dfrac{2}{3} = 0 \\ 3\lambda + 7\mu + \dfrac{5}{3} = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 7 \\ -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4\lambda + 3 = -1 \\ 4\mu - \dfrac{1}{3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = -3^n + \dfrac{1}{3}7^n + n + \dfrac{2}{3}.$

On peut contrôler les valeurs de u_0 et de u_1, par exemple.

9.12

a) D'abord, il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Puisque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée (par 0), elle converge ; notons $\ell = \lim\limits_{n\infty} u_n$.

On a, en passant aux limites dans l'égalité de définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$: $\ell = \dfrac{\ell}{\ell^2+1}$, d'où $\ell = 0$.

Finalement : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) D'abord, il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 1$.

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel ℓ, alors, en passant aux limites dans l'égalité de définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on a $\ell = \sqrt{1+\ell}$, d'où $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Notons $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| = \big|\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\alpha}\big| = \frac{|u_n - \alpha|}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+\alpha}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}|u_n - \alpha|,$$

d'où, en réitérant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - \alpha| \leqslant \Big(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\Big)^n |u_0 - \alpha|.$$

Comme $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}} < 1$, il en résulte : $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\Big)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$,

puis, par théorème d'encadrement : $|u_n - \alpha| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Considérons l'application

$$f : I = \Big[\frac{1}{3}\,;+\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto f(x) = \sqrt{x - \frac{2}{9}}.$$

• f est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{2}{9}}} > 0,$$

donc f est strictement croissante sur I.

En particulier : $\forall x \in I,\quad f(x) \geqslant f\Big(\dfrac{1}{3}\Big) = \dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{2}{9}$,

donc I est stable par f.

Puisque I est stable par f et que f est croissante sur I, on déduit, par une récurrence immédiate, en séparant en deux cas selon la position relative de u_0 et de u_1, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

• Cherchons les points fixes de f.

On a, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = x \iff \sqrt{x - \frac{2}{9}} = x \iff x - \frac{2}{9} = x^2$$

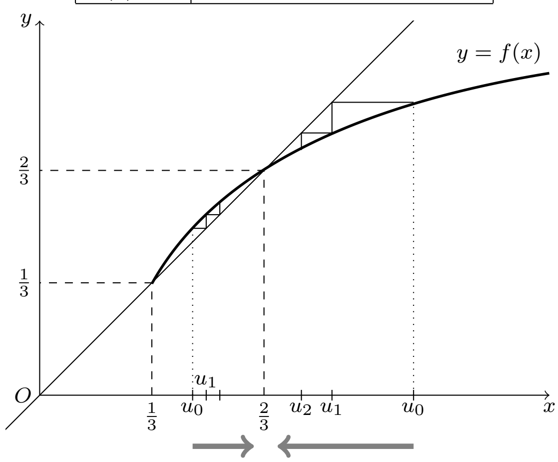
$$\iff x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \iff x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3}.$$

Comme f est continue sur I, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ℓ est nécessairement $\dfrac{1}{3}$ ou $\dfrac{2}{3}$.

Comme f est croissante sur I, les intervalles $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right]$ et $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$ sont stables par f.

De plus, en reprenant ces calculs avec des inégalités, on en déduit le signe de $f(x)-x$ selon la position de x par rapport à $\dfrac{2}{3}$:

x	$1/3$		$2/3$		$+\infty$
$f(x)-x$	0	$+$	0	$-$	



• Si $u_0=\dfrac{1}{3}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\dfrac{1}{3}$, donc converge vers $\dfrac{1}{3}$.

• Si $\dfrac{1}{3}<u_0\leqslant\dfrac{2}{3}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dfrac{2}{3}$, donc converge. Sa limite ℓ vérifie $\dfrac{1}{3}<u_0\leqslant\ell\leqslant\dfrac{2}{3}$ et $\ell\in\left\{\dfrac{1}{3},\,\dfrac{2}{3}\right\}$, donc $\ell=\dfrac{2}{3}$.

• Si $u_0\geqslant\dfrac{2}{3}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\dfrac{2}{3}$, donc converge. Sa limite ℓ vérifie $\ell\geqslant\dfrac{2}{3}$ et $\ell\in\left\{\dfrac{1}{3},\,\dfrac{2}{3}\right\}$, donc $\ell=\dfrac{2}{3}$.

On conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{3}$ si $u_0=\dfrac{1}{3}$, et vers $\dfrac{2}{3}$ si $u_0>\dfrac{1}{3}$.

9.13

D'abord, par une récurrence immédiate sur n, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n>0$.

Considérons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $v_n=nu_n$.

On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1}=(n+1)u_{n+1}=\sqrt{nu_n}=\sqrt{v_n}=v_n^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$v_n=v_{n-1}^{\frac{1}{2}}=v_{n-2}^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\cdots=v_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=u_1^{\frac{1}{2^{n-1}}},$$

d'où : $u_n=\dfrac{1}{n}u_1^{\frac{1}{2^{n-1}}}$.

On déduit : $\ln u_n=-\ln n+\dfrac{1}{2^{n-1}}\ln u_1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} -\infty$,

et on conclut : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

9.14

Notons $u=\dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$, $\quad v=\dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$.

On a alors $A=u+v$ et :

• $u^3+v^3=\dfrac{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}+\dfrac{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}=36$

$$u^3v^3=\frac{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{54^2\cdot3-41^2\cdot5}{3^3}=\frac{343}{27}=\frac{7^3}{3^3}=\left(\frac{7}{3}\right)^3,$$

donc, comme $uv\in\mathbb{R}$: $uv=\dfrac{7}{3}$.

D'où :

$$A^3=(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$$
$$=(u^3+v^3)+3uv(u+v)=36+7A.$$

Ainsi, A vérifie : $A^3-7A-36=0 \qquad (1)$.
Une solution évidente est 4, donc :

$$(1)\iff(A-4)(A^2+4A+9)=0.$$

Le discriminant $\Delta=4^2-4\cdot9=-20$ est <0, donc, comme A est réel, A^2+4A+9 n'est pas nul, et on conclut : $A=4$.

9.15

Raisonnons par l'absurde : supposons $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$.
Comme $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont des irrationnels, ils ne sont pas nuls, donc $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$, puis : $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Comme $x-y\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{Q}_+^*$, et que $\mathbb{Q}$ est un corps, on déduit, du résultat précédent : $\sqrt{x}-\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$.
Ensuite, comme $\mathbb{Q}$ est un corps :

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\big((\sqrt{x}+\sqrt{y})+(\sqrt{x}-\sqrt{y})\big)\in\mathbb{Q},$$

contradiction.
Ce raisonnement par l'absurde établit que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est un irrationnel.

Par exemple, comme $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels, on déduit :

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}.$$

9.16

a) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$.

On a alors : $nq^2 = p^2$.

Par unicité de la décomposition d'un entier $\geqslant 1$ en produit de nombres premiers, il en résulte que les exposants des facteurs premiers figurant dans la décomposition de n sont tous pairs et donc n est le carré d'un entier, contradiction.

On conclut : $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Exemples : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

b) Raisonnons par l'absurde : notons $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$.

On a alors : $\alpha^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$,

d'où $\sqrt{6} = \dfrac{\alpha^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$, contradiction avec *a)*.

Finalement : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

9.17

Notons $\ell_1 = \lim\limits_{p\infty} u_{2p}$, $\ell_2 = \lim\limits_{p\infty} u_{2p+1}$, $\ell_1 = \lim\limits_{p\infty} u_{3p}$.

La suite $(u_{6q})_{q\in\mathbb{N}}$, qui est extraite de $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{3p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et converge vers ℓ_3, donc $\ell_1 = \ell_3$.

La suite $(u_{6q+3})_{q\in\mathbb{N}}$, qui est extraite de $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{3p})_{p\in\mathbb{N}}$, converge vers ℓ_2 et converge vers ℓ_3, donc $\ell_2 = \ell_3$.

On déduit $\ell_1 = \ell_2$, donc, d'après le cours (termes d'indices pairs, termes d'indices impairs), on conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

9.18

1) Il est clair que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, alors elle converge (vers l'élément sur lequel elle stationne).

2) Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, a priori vers un réel noté ℓ.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$.

On a : $|u_n - u_N| \leqslant |u_n - \ell - +|\ell - u_N| \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} < 1$.

Comme u_n et u_N sont dans $\mathbb{Z}$, il en résulte $u_n = u_N$.

Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

9.19

• Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et sont > 0.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + \sqrt{u_n v_n} + v_n}{3}$$
$$= \frac{u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n}{6} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{6} \geqslant 0,$$

ce qui montre, par décalage d'indices : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant v_n$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant 0,$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}\big(u_n + \sqrt{u_n v_n} + v_n\big) - v_n$$
$$= \frac{1}{3}\big(u_n + \sqrt{u_n v_n} - 2v_n\big) = \frac{1}{3}\big(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\big)\big(\sqrt{u_n} + 2\sqrt{v_n}\big) \geqslant 0,$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

• On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_{n-1} \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant u_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant u_2 \leqslant u_1.$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée (par u_1), donc converge vers un réel μ et $v_1 \leqslant \mu \leqslant u_1$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par v_1), donc converge vers un réel λ, et $\lambda \geqslant v_1 > 0$.

• En passant à la limite dans la première égalité de définition des suites, on obtient : $\lambda = \dfrac{\lambda + \mu}{2}$, donc $\lambda = \mu$.

On conclut : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, ont la même limite et cette limite ℓ $(= \lambda = \mu)$ vérifie : $v_1 \leqslant \ell \leqslant u_1$.

9.20

Notons $u = \sqrt{2}$, $v = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

On sait : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}$.

Séparons en deux cas, selon que v est rationnel ou irrationnel.

• Si $v \in \mathbb{Q}$, alors le couple $(a = \sqrt{2},\, b = \sqrt{2})$ convient.

• Si $v \notin \mathbb{Q}$, alors, comme : $v^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\,2} = 2 \in \mathbb{Q}$,

le couple $(a = v = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}},\, b = \sqrt{2})$ convient.

Ceci montre qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{Q})^2$ tel que $a^b \in \mathbb{Q}$: en effet, l'un des deux couples $(\sqrt{2},\, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}},\, \sqrt{2})$ convient. Mais on ne sait pas décider lequel (au moins) convient !

9.21

1) • Supposons $\sin n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos n\alpha$,

d'où, puisque $\sin\alpha \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos n\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Comme $\sin n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$ et donc que, par suite extraite, $\sin(n+1)\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$, il s'ensuit :

$$\cos n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell - \ell\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

• De même, si $\cos n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

$$\sin n\alpha = \frac{\cos n\alpha \cos\alpha - \cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell'\cos\alpha - \ell'}{\sin\alpha}.$$

2) Supposons $\sin n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\cos n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell'$.

D'après *1)*, on a donc :

$$\ell' = \ell\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{et} \quad \ell = \ell'\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

On déduit :
$$\left(1+\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right)\ell' = 0,$$
d'où $\ell' = 0$, puis $\ell = 0$.

Mais : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha = 1$,

d'où, en passant à la limite : $\ell^2 + \ell'^2 = 1$, contradiction.

On conclut que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, les deux suites $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Remarque :

Le résultat de cet exercice est utile dans la résolution d'exercices sur les séries entières en 2è année, souvent sous la forme affaiblie : $\sin n\alpha$ et $\cos n\alpha$ ne tendent pas vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

On peut montrer que chacune $\cos n\alpha$ et $\sin n\alpha$ ne tend pas vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini par un raisonnement analogue, simplifié.

• Si $\cos n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, alors, par suite extraite : $\cos 2n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mais : $\cos 2n\alpha = 2\cos^2 n\alpha - 1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 - 1 = -1$,

contradiction.

• Si $\sin n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, alors : $\sin(n+1)\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où :
$$\cos n\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$$
puis : $\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, contradiction.

9.22

a) Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$\forall n \geqslant N_1,\quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 + 1$. On a :
$$|v_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - \ell|$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|u_k - \ell|.$$
D'une part : $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|u_k - \ell| \leqslant \frac{1}{n}(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, comme $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - \ell| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$,

il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\displaystyle \forall n \geqslant N_2,\ \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

En notant $N = \mathrm{Max}\,(N_1, N_2)$, on a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
et donc : $\qquad v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = u_{n+1} - u_n$.

On a, par hypothèse : $\alpha_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

D'après *a)*, il en résulte : $\displaystyle \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n-1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$:
$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n-1} = \frac{u_n - u_1}{n-1} = \frac{u_n}{n-1} - \frac{u_1}{n-1}.$$
Comme $\displaystyle \frac{u_1}{n-1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$,

on déduit, par différence : $\displaystyle \frac{u_n}{n-1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$,

puis : $\displaystyle \frac{u_n}{n} = \frac{u_n}{n-1}\,\frac{n-1}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

c) On a : $\displaystyle \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln\ell$,

d'où, d'après *b)* : $\displaystyle \frac{\ln u_n}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln\ell$,

et donc : $\displaystyle \sqrt[n]{u_n} = \exp\left(\frac{\ln u_n}{n}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

d) 1) En notant $u_n = \binom{2n}{n}$, on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 4,$$
donc, d'après *c)* : $\displaystyle \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 4$.

2) En notant $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$, on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\big(1 + o(1)\big) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}\,,$$
donc, d'après *c)* : $\displaystyle \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}\,.$

3) En notant $u_n = \dfrac{n(n+1)\cdots(n+n)}{n^n}$, on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{\mathrm{e}},$$
donc, d'après *c)* :
$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)} = \sqrt[n]{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{\mathrm{e}}.$$
4) En notant $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n^n}$, on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\mathrm{e}},$$
donc, d'après *c)* :
$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot s\cdot(2n-1)} = \sqrt[n]{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\mathrm{e}}.$$
5) En notant $u_n = \dfrac{(3n)!}{n^{2n}(n!)}$, on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{27}{\mathrm{e}^2},$$
donc : $\displaystyle \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} = \sqrt[n]{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{27}{\mathrm{e}^2}$.

Vrai ou Faux ?

9.1 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x + x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x^2 \rfloor$. V F

9.2 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$. V F

9.3 En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+2}{(n+1)^2}$. V F

9.4 Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, alors : V F

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ ou } v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9.5 Pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n^4 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. V F

9.6 Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et minorée, alors elle tend vers $+\infty$. V F

9.7 Si une suite réelle ne converge pas vers 0, alors sa limite est différente de 0. V F

9.8 Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, alors $\ell > 0$. V F

9.9 Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si $\ell > 0$, alors, à partir d'un certain rang, $u_n > 0$. V F

9.10 Si une suite réelle admet $+\infty$ pour limite, alors toute suite extraite de celle-ci admet aussi $+\infty$ pour limite. V F

Vrai ou Faux, les réponses

9.1 Pour $x = 0,8$, on a $x + x^2 = 1,44$, donc $\lfloor x + x^2 \rfloor = 1$, alors que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x^2 \rfloor = 0 + 0 = 0$. V **F**

9.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, on a $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$, d'où $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$, puis $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$. **V** F

9.3 On a : V **F**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\,\frac{(n!)^2}{\big((n+1)!\big)^2} = (2n+2)(2n+1)\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Il y a eu oubli du facteur $2n+1$ dans la simplification entre $(2n+2)!$ et $(2n)!$.

9.4 Contrexemple : $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$ $\qquad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$ V **F**

9.5 On a : $u_n^2 = \sqrt{u_n^4} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. **V** F

9.6 Contrexemple : $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. V **F**

Il y a eu confusion entre minorée et non majorée.

Toute suite croissante est minorée.

9.7 Il se peut qu'une suite n'ait pas de limite, par exemple $u_n = (-1)^n$. V **F**

9.8 Contrexemple : $\ell = 0$, $u_n = \dfrac{1}{n}$. La conclusion correcte est $\ell \geqslant 0$. V **F**

9.9 C'est un résultat du cours. **V** F

9.10 C'est un résultat du cours. **V** F

Chapitre 10

Limites, continuité

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Existence et valeur d'une limite
- Étude de la continuité d'une fonction
- Résolution d'équations à une inconnue réelle
- Résolution de certaines équations fonctionnelles
- Existence de majorants, de minorants pour une fonction
- Étude des points fixes d'une fonction.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés des fonctions ayant des limites finies ou des limites infinies, pour les opérations algébriques et pour l'ordre usuel
- Propriétés générales des fonctions continues
- Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de continuité sur un segment, théorème de la bijection monotone
- Définition de la fonction partie entière $\lfloor . \rfloor$.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer la limite d'une fonction se présentant sous une forme indéterminée

Essayer de :

- transformer l'écriture de l'expression proposée, souvent par des factorisations
- utiliser les prépondérances classiques relatives aux fonctions logarithmes, puissances, exponentielles

Voir aussi les méthodes à retenir du chapitre 12, utilisant des équivalents et des développements limités.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3}\right)$.

On a, pour $x \in [0\,;\,+\infty[$, en utilisant une expression conjuguée :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3} &= \frac{(x^2+2x+2)-(x^2+x+3)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+3}} \\
&= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+3}} \\
&= \frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}} \\
&\underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^3(\ln x)^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

On a : $x^3(\ln x)^2\,\mathrm{e}^{-x} = \underbrace{\dfrac{(\ln x)^2}{x}}_{\longrightarrow 0}\ \underbrace{x^4\,\mathrm{e}^{-x}}_{\longrightarrow 0} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f admet une limite finie ℓ en un point a

Essayer de :

- appliquer les théorèmes généraux sur les limites
- montrer que $|f(x)-\ell| \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$.

➟ **Exercice 10.2**

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

$$f(x)\big(1-f(x)\big) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

Montrer : $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Big(f(x)-\frac{1}{2}\Big)^2 = \big(f(x)\big)^2 - f(x) + \frac{1}{4}$$
$$= -f(x)\big(1-f(x)\big) + \frac{1}{4} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 0,$$

donc, en composant par la racine carrée :

$$\Big|f(x)-\frac{1}{2}\Big| \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et on conclut : $\quad f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f n'a pas de limite (ni finie ni infinie) en un point a

Chercher deux suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ dans l'ensemble de départ de f, de limite a, de façon que les suites $\big(f(u_n)\big)_n$, $\big(f(v_n)\big)_n$ aient des limites différentes.

➟ **Exercice 10.1**

Exemple

Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$$

n'a pas de limite, ni finie ni infinie, en $+\infty$.

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = n + \frac{1}{2}$, on a :

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad f(u_n) = 0, \quad f(v_n) = \frac{1}{2}.$$

Si f admettait une limite ℓ en $+\infty$, on aurait

$$f(u_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad f(v_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell,$$

donc $\ell = 0$ et $\ell = \frac{1}{2}$, contradiction.

On conclut que f n'a pas de limite, ni finie ni infinie, en $+\infty$.

Méthode

Pour montrer l'existence d'une solution d'une équation $f(x) = 0$, où f est à variable réelle et à valeurs réelles

Essayer de :

- étudier les variations de f, si $f(x)$ est donné par une formule explicite
- appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, si f est continue sur un intervalle et prend des valeurs négatives ou nulles et des valeurs positives ou nulles.

➟ **Exercices 10.3, 10.8, 10.14**

Exemple

Montrer que l'équation
$$(x^5+x^3+1)(x^6+x^4+2)=3,$$
d'inconnue $x \in [0\,;\,1]$, admet au moins une solution.

L'application
$$f:[0\,;\,1]\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto(x^5+x^3+1)(x^6+x^4+2)-3$$
est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et :
$$f(0)=2-3=-1<0,\qquad f(1)=12-3=9>0,$$
donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f admet au moins un zéro, d'où le résultat demandé.

Méthode

Pour manipuler la fonction partie entière

Se rapporter à la définition de la partie entière d'un réel :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \Big(\lfloor x\rfloor \leqslant x<\lfloor x\rfloor+1 \quad\text{et}\quad \lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}\Big)$$
ou encore : $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \Big(x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x\quad\text{et}\quad\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}\Big).$

➟ **Exercice 10.5**

Exemple

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$.

On a : $\forall x\in[1\,;\,+\infty[,\ 0\leqslant x-\lfloor x\rfloor<1\quad\text{et}\quad x\leqslant x+\lfloor x\rfloor$,

d'où : $\displaystyle\forall x\in[1\,;\,+\infty[,\quad 0\leqslant\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}\leqslant\frac{1}{x}$.

Comme $\displaystyle\frac{1}{x}\underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$, on déduit, par théorème d'encadrement :
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}=0.$$

Méthode

Pour résoudre une équation fonctionnelle

Raisonner clairement par implication puis réciproque, ou exceptionnellement par équivalences logiques.

- Si la fonction inconnue est supposée continue sur un intervalle et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, utiliser le théorème des valeurs intermédiaires
- Essayer d'appliquer l'équation à des valeurs ou des formes particulières de la (les) variable(s), ou passer à une limite

➟ **Exercices 10.12, 10.13, 10.16**

Exemple

Trouver toutes les applications
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
continues sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(f(x)\big)^2 = x^2 + 1.$$

1) Soit f convenant.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in \big\{ -\sqrt{x^2+1}, \sqrt{x^2+1} \big\}$.
Supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$f(a) = -\sqrt{a^2+1} \quad \text{et} \quad f(b) = \sqrt{b^2+1}.$$
L'application f est continue sur le segment S joignant a et b, et $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in S$ tel que $f(c) = 0$, contradiction car f ne prend pas la valeur 0.

Il en résulte :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\sqrt{x^2+1} \quad \text{ou} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

2) Réciproquement, il est clair que les deux applications obtenues ci-dessus conviennent.

Finalement, il y a exactement deux applications convenant :
$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -\sqrt{x^2+1},$$
$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x^2+1}.$$

Exemple

Trouver toutes les applications
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
continues en 0, telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

1) Soit f convenant.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

En appliquant l'hypothèse à $\dfrac{x}{2}$ à la place de x, on a :
$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2}\Big).$$
En réitérant, on déduit, par récurrence immédiate :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f\Big(\frac{x}{2^n}\Big).$$
Comme $\dfrac{x}{2^n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, et que f est continue en 0, on a :
$$f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(0).$$
Il en résulte $f(x) = f(0)$, donc f est constante.

2) Réciproquement, il est clair que toute application constante convient.

Finalement, les applications cherchées sont les applications constantes.

Méthode

Pour étudier les points fixes d'une fonction f

Essayer d'étudier la fonction auxiliaire $g : x \longmapsto f(x) - x$.

➟ **Exercices 10.8 à 10.10**

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty. \end{cases}$$

Montrer que f admet au moins un point fixe.

L'application $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) - x$
est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et, par opérations :

$$g(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

On conclut que f admet au moins un point fixe.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée, est minorée, est bornée

Essayer de :

- revenir à la définition, c'est-à-dire, respectivement :

  $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in X, \quad f(x) \leqslant M$

  $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall x \in X, \quad m \leqslant f(x)$

  $\exists\, C \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X, \quad |f(x)| \leqslant C$

- appliquer le théorème du cours si f est continue et si X est un segment.

➟ **Exercices 10.6, 10.11**

Exemple

Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto \frac{1}{(x-1)^{10} + (x-2)^{12}}$$

est majorée

Remarquons d'abord que f est définie sur $\mathbb{R}$, car le dénominateur ne s'annule pas ; en effet, si ce dénominateur s'annule, il faut que x soit égal à la fois à 1 et à 2, impossible.

On a, pour tout $x \in [2\,; +\infty[$: $\ x - 1 \geqslant 1 \quad$ et $\quad x - 2 \geqslant 0$,

donc : $$f(x) \leqslant \frac{1}{1^{10} + 0^{12}} = 1.$$

On a, pour tout $x \in]-\infty\,; 1]$: $\ 1 - x \geqslant 0 \quad$ et $\quad 2 - x \geqslant 1$,

donc : $$f(x) \leqslant \frac{1}{0^{10} + 1^{12}} = 1.$$

L'application f est continue sur le segment $[1\,; 2]$, donc f est bornée sur ce segment. En particulier, f est majorée sur ce segment, donc il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in [1\,; 2], \quad f(x) \leqslant C.$$

En notant $M = \operatorname{Max}(1, C)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant M,$$

et on conclut que f est majorée.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow J$ est bijective, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$

Essayer de :

- revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :
$$\forall y \in J,\ \exists\,!\, x \in I, \quad y = f(x).$$
On pourra éventuellement exprimer l'application réciproque f^{-1} de f.
- appliquer le théorème de la bijection monotone. Dans ce contexte, souvent, on ne pourra pas exprimer l'application réciproque f^{-1} de f.

Exemple

Montrer que l'application
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{x} + 3x$$
est bijective.

L'application f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{x} + 3 > 0,$$
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a : $\quad f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad$ et $\quad f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'après le théorème de la bijection monotone, on conclut que f est bijective (et que f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$).

Méthode

Pour obtenir une propriété d'une fonction d'une variable réelle, faisant intervenir l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels

Utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(x < y \implies \big(\exists\, r \in \mathbb{Q}, \quad x < r < y\big)\Big),$$
ou, ce qui est équivalent : tout réel est limite d'au moins une suite de rationnels.

➟ **Exercice 10.7**

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $f\,|_{\mathbb{Q}}$ soit croissante. Montrer que f est croissante.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

Il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n \leqslant \frac{x+y}{2} \quad \text{et} \quad r_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$$
et il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n \geqslant \frac{x+y}{2} \quad \text{et} \quad s_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} y.$$
On a alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n \leqslant s_n,$

donc, puisque $f\,|_{\mathbb{Q}}$ est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(r_n) \leqslant f(s_n)$.

Puisque f est continue en x et en y, on déduit, par passage à la limite :
$$f(x) \leqslant f(y).$$
On conclut : f est croissante (sur $\mathbb{R}$).

Énoncés des exercices

10.1 Exemple de fonction n'ayant pas de limite en $+\infty$

Montrer que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

10.2 Obtention d'une limite par une condition sur la fonction

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x)\big(2 - f(x)\big) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer : $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

10.3 Existence d'une solution par théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que l'équation $x^{15} = x^{11} + 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet au moins une solution.

10.4 Exemple d'inéquation fonctionnelle avec utilisation d'une limite

Trouver toutes les applications $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in]0\,;+\infty[^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{x+y}.$$

10.5 Étude de continuité pour une fonction faisant intervenir la partie entière

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est définie par :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2 + \big(\lfloor x \rfloor + 1 - x\big)^2$
est continue sur $\mathbb{R}$.

10.6 Composées bornées

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

10.7 Continuité et densité

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en tout point de $\mathbb{Q}$. Montrer : $f = 0$.

10.8 Étude de point fixe pour une application continue de $[0\,;1]$ dans lui-même

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0\,;1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

10.9 Un lien entre les points fixes de f et ceux de $f \circ f$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f n'a pas de point fixe. Montrer que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

10.10 Étude de point fixe pour une application continue et décroissante

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un point fixe et un seul.

10.11 Une propriété des fonctions continues et périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et périodique. Montrer que f est bornée.

10.12 Équation fonctionnelle avec utilisation d'une itération et de la continuité en un point

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

10.13 Exemple d'équation fonctionnelle avec utilisation de la continuité sur un segment

Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\forall x \in [0\,;\,1], \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3f(x).$$

Montrer : $f = 0$.

10.14 Exemple d'utilisation d'une fonction auxiliaire

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer :

$$\forall a \in \,]0\,;\,+\infty[, \ \exists\, c \in \mathbb{R}, \quad f(c+a) = f(c).$$

10.15 Une propriété de deux fonctions atteignant la même borne supérieure

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f, g : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [a;b]} f(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in [a;b]} g(x).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a\,;\,b]$ tel que : $f(c) = g(c)$.

10.16 Une équation fonctionnelle classique : applications continues conservant l'addition

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

10.17 Minimum d'une fonction continue de limite $+\infty$ aux deux infinis

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\quad f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad$ et $\quad f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$.

Du mal à démarrer ?

10.1 Raisonner par l'absurde et utiliser des suites.

10.2 Considérer $\big(f(x)-1\big)^2$.

10.3 Considérer $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^{15}-x^{11}-2$.

10.4 Pour x fixé, faire tendre y vers $+\infty$.

10.5 Étudier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les limites de f en n^- et en n^+, et la valeur de f en n.

10.6 Pour montrer que $g \circ f$ est bornée, utiliser le théorème sur les applications continues sur un segment.

10.7 Utiliser l'expression séquentielle de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

10.8 Considérer l'application auxiliaire

$$g : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto g(x) = f(x) - x$$

et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

10.9 Considérer l'application auxiliaire

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto f(x) - x.$$

10.10 Considérer l'application auxiliaire

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto f(x) - x.$$

10.11 Se ramener à un segment et utiliser un théorème du cours.

10.12 Considérer l'application $g : x \longmapsto f(x) - f(0)$ et obtenir $g(t) = g\Big(\dfrac{2}{3}t\Big)$, puis réitérer.

10.13 Considérer des points en lesquels f atteint ses bornes.

10.14 Considérer, pour $a \in]0\,;+\infty[$ fixé, l'application auxiliaire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto f(x+a) - f(x)$.

10.15 Considérer des points en lesquels f et g atteignent leur borne supérieure, puis étudier $f - g$.

10.16 Pour f convenant, montrer $f(x) = xf(1)$, successivement pour $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

10.17 Montrer qu'il existe $A \in]-\infty\,;0]$ et $B \in [0\,;+\infty[$ tels que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;A],\quad f(x) \geqslant f(0) \\ \forall x \in [B\,;+\infty[,\quad f(x) \geqslant f(0) \end{cases}$

puis appliquer le théorème de continuité sur le segment $[A\,;B]$.

Corrigés des exercices

10.1

Raisonnons par l'absurde. Supposons que la fonction cos admette une limite ℓ en $+\infty$. Alors, pour toute suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on aurait : $\cos x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Mais : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \cos(2n\pi) = 1$ et $\cos\Big(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\Big) = 0$, d'où $\ell = 0$ et $\ell = 1$, contradiction.

On conclut que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Remarque : De la même façon, la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.

10.2

On a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(f(x)-1\big)^2 = \big(f(x)\big)^2 - 2f(x) + 1 = -f(x)\big(2-f(x)\big) + 1 \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $f(x) - 1 \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, puis : $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

10.3

L'application

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^{15} - x^{11} - 2$$

est continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et on a :

$$f(0) = -2 < 0, \text{ et } \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il en résulte qu'il existe $c \in [0\,;+\infty[$ tel que $f(c) = 0$, d'où la conclusion.

10.4

1) Soit f convenant. Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$ fixé.

On a : $0 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{x+y}$ et $\dfrac{1}{x+y} \underset{y \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$,

d'où, par théorème d'encadrement :

$$|f(x) - f(y)| \underset{y \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ et donc } f(y) \underset{y \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Ceci montre que f admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est $f(x)$. Par unicité de la limite de f en $+\infty$, il s'ensuit que $f(x)$ ne dépend pas de x, et donc f est constante.

2) Réciproque évidente.

On conclut : les applications convenant sont les applications constantes.

10.5

• Puisque $\lfloor . \rfloor$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, par opérations, f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

• Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\forall x \in [n-1\,;\,n], \quad f(x) = \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2 + \big(\lfloor x \rfloor + 1 - x\big)^2 = \big(x - (n-1)\big)^2 + \big((n-1) + 1 - x\big)^2,$$

$$\forall x \in [n\,;\,n+1[, \quad f(x) = \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2 + \big(\lfloor x \rfloor + 1 - x\big)^2 = (x-n)^2 + (n+1-x)^2,$$

d'où : $f(x) \underset{x \longrightarrow n^-}{\longrightarrow} \big(n - (n-1)\big)^2 + (n-n)^2 = 1,$

$f(n) = (n-n)^2 + (n+1-n)^2 = 1,$

$f(x) \underset{x \longrightarrow n^+}{\longrightarrow} (n-n)^2 + (n+1-n)^2 = 1.$

Ainsi : $\lim\limits_{n^-} f = \lim\limits_{n^+} f = f(n)$, donc f est continue en n.

Finalement, f est continue en tout point de $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

10.6

• Puisque f est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Il en résulte : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \big|(f \circ g)(y)\big| = \big|f\big(g(y)\big)\big| \leqslant M,$

donc $f \circ g$ est bornée.

• Puisque f est bornée, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in [a\,;\,b].$$

Comme g est continue sur le segment $[a\,;\,b]$, d'après un théorème du cours, la restriction de g à $[a\,;\,b]$ est bornée. Il existe donc $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall y \in [a\,;\,b], \quad |g(y)| \leqslant C.$

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big|(g \circ f)(x)\big| = \big|g\big(f(x)\big)\big| \leqslant C,$

donc $g \circ f$ est bornée.

10.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \dfrac{1}{n} < r_n < x + \dfrac{1}{n}$.

On a donc : $r_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$.

Comme f est continue en x, il en résulte $f(r_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Mais: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(r_n) = 0$, d'où : $f(x) = 0$.

10.8

L'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) - x$ est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et on a $g(0) = f(0) \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0\,;\,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.

10.9

Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = f(x) - x.$$

Par hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \neq 0$. Comme g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (car f l'est), il en résulte, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $g > 0$ ou $g < 0$, c'est-à-dire :

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) > 0\big) \quad \text{ou} \quad \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) < 0\big).$$

1) Si $g > 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > x$, donc, en appliquant ceci à $f(x)$ et à x : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) > f(x) > x$, et donc $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

2) Si $g < 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < x$, donc, en appliquant ceci à $f(x)$ et à x : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) < f(x) < x$, et donc $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

On conclut finalement que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

10.10

Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = f(x) - x.$$

• g est strictement décroissante, puisque f est décroissante et que $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est strictement décroissante.

• g est continue sur $\mathbb{R}$, car f et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Puisque f est décroissante, f admet en $-\infty$ une limite finie ou la limite $+\infty$, donc $g(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

• Puisque f est décroissante, f admet en $+\infty$ une limite finie ou la limite $-\infty$, donc $g(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

D'après un théorème du cours (théorème de la bijection monotone), on déduit que g admet un zéro et un seul, donc f admet un point fixe et un seul.

10.11

Notons $T \in \mathbb{R}_+^*$ une période de f.

Puisque f est continue sur le segment $[0\,;\,T]$, f est bornée sur ce segment, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in [0\,;\,T], \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nT \in [0\,;\,T]$ et on a : $|f(x)| = |f(x - nT)| \leqslant M$.

Finalement, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

10.12

1) Soit f convenant.

Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = f(x) - f(0).$$

• On a alors $g(0) = 0$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g\Big(\frac{x+y}{3}\Big) = f\Big(\frac{x+y}{3}\Big) - f(0) = \frac{f(x) + f(y)}{2} - f(0) = \frac{1}{2}\Big(\big(f(x) - f(0)\big) + \big(f(y) - f(0)\big)\Big) = \frac{g(x) + g(y)}{2}.$$

• En remplaçant y par x, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g\left(\dfrac{2x}{3}\right) = g(x)$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Par récurrence immédiate, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x) = g\left(\frac{2}{3}x\right) = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 x\right) = \cdots = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right).$$

Comme $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n x \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et que g est continue en 0 (puisque f l'est), on déduit, par passage à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini : $g(x) = g(0)$.

Ceci montre que g est constante, et donc f est constante.

2) Réciproquement, il est évident que toute application constante convient.

Finalement, les applications cherchées sont les applications constantes.

10.13

Puisque f est continue sur le segment $[0\,;\,1]$, d'après un théorème du cours, f est bornée et atteint ses bornes.
Il existe donc $x_1, x_2 \in [0\,;\,1]$ tels que :

$$f(x_1) = \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Inf}} f(x), \qquad f(x_2) = \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} f(x).$$

On a :

• $3f(x_1) = f\left(\dfrac{x_1}{2}\right) + f\left(\dfrac{x_1+1}{2}\right) \geqslant 2 \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Inf}} f(x) = 2f(x_1)$,
donc : $f(x_1) \geqslant 0$

• $3f(x_2) = f\left(\dfrac{x_2}{2}\right) + f\left(\dfrac{x_2+1}{2}\right) \leqslant 2 \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} f(x) = 2f(x_2)$,
donc : $f(x_2) \leqslant 0$.

On obtient : $0 \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant 0$, d'où $f(x_1) = f(x_2) = 0$ et donc $f = 0$.

10.14

Soit $a \in]0\,;\,+\infty[$ fixé. Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = f(x+a) - f(x).$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le segment $[0\,;\,1]$, d'après un théorème du cours, la restriction de f à $[0\,;\,1]$ est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $x_1, x_2 \in [0\,;\,1]$ tels que :

$$f(x_1) = \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Inf}} f(x), \qquad f(x_2) = \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} f(x).$$

Comme f est 1-périodique, on a alors :

$$f(x_1) = \underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{Inf}} f(x), \qquad f(x_2) = \underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{Sup}} f(x).$$

On a : $g(x_1) = f(x_1+a) - f(x_1) \geqslant 0$, par définition de x_1, et $g(x_2) = f(x_2+a) - f(x_2) \leqslant 0$, par définition de x_2.

Ainsi, g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $g(x_1) \geqslant 0$, $g(x_2) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire : $f(c+a) = f(c)$.

10.15

Puisque f et g sont continues sur le segment $[a\,;\,b]$, d'après un théorème du cours, f et g sont bornées et atteignent leurs bornes. Il existe donc $x_1, x_2 \in [a\,;\,b]$ tels que, en notant $M = \underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Sup}} f(x) = \underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Sup}} g(x)$, on ait : $f(x_1) = M$ et $g(x_2) = M$.

On a alors : $\begin{cases} (f-g)(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \geqslant 0 \\ (f-g)(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M \leqslant 0. \end{cases}$

Comme $f - g$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$, il en résulte, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $c \in [a\,;\,b]$ tel que $(f-g)(c) = 0$, donc $f(c) = g(c)$.

10.16

1) Soit f convenant.

• Une récurrence immédiate montre :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(nx) = nf(x).$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = nf(1)$.

• En appliquant l'hypothèse à $(x, -x)$, on déduit que f est impaire.

Il en résulte : $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = xf(1)$.

• Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $r = \dfrac{p}{q}$.

On a : $qf(r) = f(qr) = f(p) = pf(1)$,

d'où : $f(r) = \dfrac{p}{q} f(1) = rf(1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers x. On a alors :

$$f(r_n) = r_n f(1) \underset{n\infty}{\longrightarrow} xf(1).$$

D'autre part, puisque f est continue en x :

$$f(r_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xf(1)$.

2) Réciproquement, il est clair que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lambda x$ convient.

Finalement, les applications cherchées sont les applications

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lambda x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

10.17

Puisque $f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

il existe $A \in]-\infty\,;\,0]$ et $B \in [0\,;\,+\infty[$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\,A], \quad f(x) \geqslant f(0) \\ \forall x \in [B\,;\,+\infty[, \quad f(x) \geqslant f(0). \end{cases}$$

D'autre part, puisque f est continue sur le segment $[A\,;\,B]$, f admet un minimum sur $[A\,;\,B]$. Il existe donc $x_0 \in [A\,;\,B]$ tel que : $\qquad \forall x \in [A\,;\,B], \quad f(x) \geqslant f(x_0)$.

Comme $A \leqslant 0 \leqslant B$, on a $0 \in [A\,;\,B]$, donc : $f(0) \geqslant f(x_0)$.

Ainsi : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\,A] \cup [B\,;\,+\infty[, \quad f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(x_0) \\ \forall x \in [A\,;\,B], \quad f(x) \geqslant f(x_0), \end{cases}$

et on conclut : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$.

Vrai ou Faux ?

10.1 Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en $a \in I$, alors f est bornée au voisinage de a. V F

10.2 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en 0, alors f est bornée sur $\mathbb{R}$. V F

10.3 Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n'admet pas 0 pour limite en $a \in I$, alors la limite de f en a est non nulle. V F

10.4 Si $f : [0\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et si $f > 0$, alors $\ell > 0$. V F

10.5 Si f et g sont continues en a, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a. V F

10.6 L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle de $\mathbb{R}$. V F

10.7 Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$, alors, pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. V F

10.8 L'image d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. V F

10.9 Toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une bijection de I sur $\mathbb{R}$. V F

10.10 L'équation $(x^3+2)(3x^7-1) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet au moins une solution. V F

Vrai ou Faux, les réponses

10.1 C'est un résultat du cours. **V**

10.2 Contrexemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x.$ **F**

La conclusion correcte est que f est bornée au voisinage de 0, mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}$.

10.3 Il se peut que f n'admette pas de limite en a, par exemple : $a = 0,\ f : x \longmapsto \sin \dfrac{1}{x}.$ **F**

10.4 Contrexemple : $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}.$ **F**

La conclusion correcte est $\ell \geqslant 0$.

Par passage à la limite, les inégalités (même strictes) deviennent des inégalités au sens large.

10.5 Il y a oubli de l'hypothèse $g(a) \neq 0$. **F**

Si $g(a) = 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ n'est pas définie en a, donc ne peut pas être continue en a.

10.6 C'est un résultat du cours, conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. **V**

10.7 Il y a oubli de l'hypothèse : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. **F**

10.8 Contrexemple : $f :]0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}.$ **F**

10.9 Contrexemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \operatorname{Arctan} x.$ **F**

La conclusion correcte est : f est une bijection de I sur $f(I)$.

10.10 L'application : $f : x \longmapsto (x^3 + 2)(3x^7 - 1) - 1$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $f(0) = -3 < 0,\ f(1) = 5 > 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois. **V**

Chapitre 11

Dérivabilité

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Existence et calcul éventuel d'une dérivée première, d'une dérivée n-ème
- Existence de zéros d'équations, par emploi du théorème de Rolle ou du théorème accroissements finis
- Résolution de certaines équations fonctionnelles.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés algébriques de la dérivabilité, de la dérivée, de la dérivée n-ème
- Formule de Leibniz pour la dérivée n-ème d'un produit
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis
- Lien entre dérivée et sens de variation.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer une dérivée n-ème

Essayer de :

- appliquer la formule de Leibniz si f s'exprime comme produit de deux fonctions du type polynôme de bas degré et exponentielle simple
- utiliser une décomposition en éléments simples si $f(x)$ est une fonction rationnelle de x
- linéariser si f est un produit de cos et sin, ou de ch et sh
- conjecturer une formule pour $f^{(n)}(x)$ et l'établir par une récurrence sur n.

➟ **Exercice 11.1**

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{x}$.

Notons $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$u(x) = x, \quad v(x) = \mathrm{e}^{x}.$$

Par produit, f est indéfiniment dérivable et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme de Newton :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

On a $u' = 1$, $u'' = 0$, donc il ne reste dans la sommation précédente que les termes d'indices 0 et 1 (pour $n \geqslant 1$) :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} u(x) v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) v^{(n-1)}(x) = x\,\mathrm{e}^{x} + n\,\mathrm{e}^{x},$$

et la formule obtenue est aussi valable pour $n = 0$.

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Par opération, f est indéfiniment dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2},$$

$$f''(x) = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3}, \quad f'''(x) = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4}.$$

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}.$$

- La formule est vraie pour $n = 0$ à l'évidence.
- Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \big(f^{(n)}\big)'(x) \\ &= (-1)^n n! \big(-(n+1)\big) x^{-(n+1)-1} = (-1)^{n+1}(n+1)! x^{-(n+2)}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Méthode

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point, et éventuellement calculer la dérivée en ce point

Essayer d'appliquer les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables (théorèmes généraux).

➟ **Exercice 11.1**

En un point en lequel les théorèmes généraux ne s'appliquent pas, essayer de :

- déterminer la limite d'un taux d'accroissement (définition de la dérivée)
- déterminer la limite de la dérivée à côté du point (théorème limite de la dérivée).

➟ **Exercices 11.2, 11.8**

Exemple

L'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x|x|$$

est-elle dérivable en 0 ?

On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Méthode

Pour montrer que la dérivée d'une fonction s'annule en au moins un point

Essayer de :

- appliquer le théorème de Rolle à f
- appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire
- appliquer le théorème des accroissements finis à f ou à une fonction auxiliaire

➟ **Exercices 11.4, 11.5**

Exemple

Soient $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0\,;1]$, dérivable sur $]0\,;1[$, telle que $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0\,;1[$ tel que :

$$cf'(c) + f(c) = 0.$$

L'application

$$g : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto xf(x)$$

est continue sur $[0\,;1]$, dérivable sur $]0\,;1[$ et $g(0) = g(1)$ car $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]0\,;1[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire : $cf'(c) + f(c) = 0$.

Méthode

Pour montrer qu'une dérivée successive s'annule en au moins un point

Appliquer le théorème de Rolle de façon répétée, à la fonction donnée ou à une fonction auxiliaire.

➟ **Exercices 11.6, 11.7, 11.10 à 11.14**

Exemple

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 sur I, $a, b, c \in I$ tels que $a < c < b$ et que :

$$f(a) = f(c) = f(b) \quad \text{et} \quad f'(c) = 0.$$

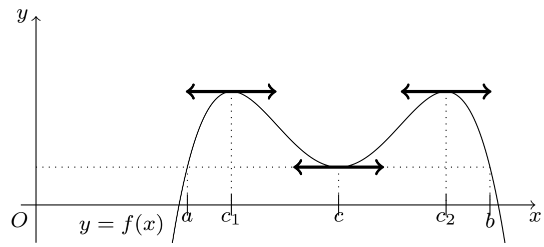
Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que :

$$f^{(3)}(d) = 0.$$

• Puisque f est continue sur $[a\,;c]$, dérivable sur $]a\,;c[$ et que $f(a) = f(c)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a\,;c[$ tel que $f'(c_1) = 0$.

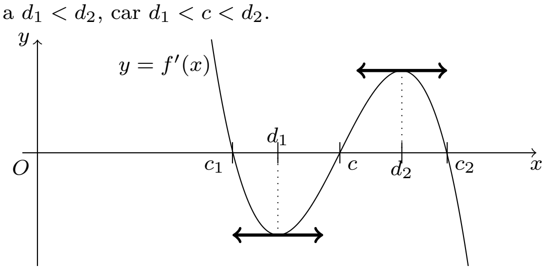
De même, il existe $c_2 \in]c\,;b[$ tel que $f'(c_2) = 0$.

On a $c_1 < c_2$ car $c_1 < c < c_2$.



• Puisque f' est continue sur $[c_1\,;c]$, dérivable sur $]c_1\,;c[$ et que $f'(c_1) = f'(c)$ (car ils sont nuls), d'après le théorème de Rolle, il existe $d_1 \in]c_1\,;c[$ tel que $f''(d_1) = 0$.
De même, il existe $d_2 \in]c\,;c_2[$ tel que $f''(d_2) = 0$.

On a $d_1 < d_2$, car $d_1 < c < d_2$.



Puisque f'' est continue sur $[d_1\,;d_2]$, dérivable sur $]d_1\,;d_2[$ et que $f''(d_1) = f''(d_2)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]d_1\,;d_2[\subset I$ tel que $f^{(3)}(d) = 0$.

Méthode

Pour résoudre une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue est supposée dérivable

Dériver une ou plusieurs fois par rapport à une des variables du contexte

Exemple

Trouver toutes les applications dérivables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x^2) + f(y)$.

1) Soit f convenant.

On obtient, en dérivant par rapport à x :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x + y) = 2xf'(x^2)$$

et, en dérivant par rapport à y :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x + y) = f'(y),$$

d'où : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xf'(x^2) = f'(y)$.

En particulier, en remplaçant x par 0 :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(y) = 0.$$

Il s'ensuit que f est constante.

En remplaçant (x, y) par $(0, 0)$ dans l'hypothèse de l'énoncé, on obtient $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$, donc $f = 0$.

2) Réciproquement, il est évident que l'application constante nulle convient.

Finalement, il y a une solution et une seule, l'application constante nulle.

Méthode

Pour déterminer la borne inférieure ou la borne supérieure (si elles existent) d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Étudier les variations de f, en étudiant le signe de $f'(x)$, pour $x \in I$, si f est dérivable sur I.

Exemple

Déterminer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{x \in]0;+\infty[} (x^3 + x^{-2})$.

L'application

$$f :]0\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 + x^{-2}$$

est dérivable sur $]0\,; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0\,; +\infty[, \quad f'(x) = 3x^2 - 2x^{-3}.$$

Dressons le tableau de variations de f, en notant $\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/5}$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ceci montre que la borne inférieure envisagée existe et est atteinte en α :

$$\operatorname*{Inf}_{x \in]0;+\infty[} (x^3 + x^{-2}) = \alpha^3 + \alpha^{-2} = \alpha^3\left(1 + \frac{1}{\alpha^5}\right) = \alpha^3\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/5}.$$

Énoncés des exercices

11.1 Exemples de calculs de dérivées n-èmes

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème des fonctions suivantes :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x^2 - x + 2)\,\mathrm{e}^{x}$

b) $f :]-1\,;\,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \cos^2 x \sin x$.

11.2 Exemple d'étude de dérivabilité

Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

11.3 Utilisation de la dérivation pour déduire qu'une fonction est constante

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^{\frac{3}{2}} \big| \ln |x - y| \big|.$$

Montrer que f est constante.

11.4 Exemple d'utilisation du théorème de Rolle

Soit $f : [-1\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, s'annulant en -1, 0, 1. On note :

$$g : [-1\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = 2x^4 + x + f(x).$$

Montrer qu'il existe $c \in]-1\,;\,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

11.5 Exemple d'utilisation du théorème de Rolle appliqué à une fonction auxiliaire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.

Montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ admet au moins une solution $x \in]0\,;\,1[$.

11.6 Exemple d'utilisation répétée du théorème de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$, deux fois dérivable sur $]a\,;\,b[$, telle que : $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Montrer : $\exists\, c \in]a\,;\,b[, \quad f''(c) = 0$.

11.7 Annulation d'une fonction et de dérivées successives

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^5 sur I, $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$.
On suppose : $\quad f(a) = f(b) = f'(b) = f(c) = f'(c) = f''(c) = 0$.

Montrer : $\quad \exists\, d \in I, \quad f^{(5)}(d) = 0$.

11.8 **Étude de la dérivabilité de $|f|$**

Soient $a \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a.

a) Montrer que, si $f(a) \neq 0$, alors $|f|$ est dérivable en a et : $|f|'(a) = \operatorname{sgn}\big(f(a)\big)f'(a)$,

où la fonction signe sgn est définie par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \; t < 0 \\ 0 & \text{si } \; t = 0 \\ 1 & \text{si } \; t > 0. \end{cases}$

b) Montrer que, si $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$, alors $|f|$ est dérivable à gauche en a, dérivable à droite en a, et non dérivable en a.

c) Montrer que, si $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$, alors $|f|$ est dérivable en a et $|f|'(a) = 0$.

11.9 **Exemple d'utilisation du théorème de Rolle**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, ..., 0)\}$, $b_0, ..., b_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.

On note : $\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \,\mathrm{e}^{\,b_k x}.$

Montrer que f s'annule en au plus n réels.

11.10 **Exemple d'utilisation du théorème des accroissements finis**

Soient $a \in]0\,;+\infty[$, $f : [0\,; a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

Montrer : $\quad \exists\, c \in]0\,; a], \quad f'(c) = \dfrac{2f(a) + af'(a)}{3a}.$

11.11 **Si un polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est aussi**

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$.

a) Montrer que, si les zéros de P sont tous réels et simples, alors il en est de même de P'.

b) Montrer que, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

11.12 **Une généralisation du théorème des accroissements finis à deux fonctions**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f, g : [a\,; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a\,; b]$, dérivables sur $]a\,; b[$, telles que : $\quad \forall x \in]a\,; b[, \quad g'(x) \neq 0.$

Montrer : $\quad g(b) - g(a) \neq 0 \quad$ et $\; : \; \exists\, c \in]a\,; b[, \quad \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}.$

11.13 **Une extension du théorème de Rolle**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ et admettant en $-\infty$ et en $+\infty$ une même limite finie. Montrer : $\exists\, c \in \mathbb{R}, \quad f'(c) = 0.$

11.14 **Théorème de Darboux**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

À cet effet, pour $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f'(a) < f'(b)$ et pour $c \in]f'(a)\,; f'(b)[$, on pourra considérer l'application $g : x \longmapsto f(x) - cx$.

Du mal à démarrer ?

11.1 *a)* Utiliser la formule de Leibniz.

b) Décomposer en éléments simples.

c) Linéariser.

11.2 Montrer que f est dérivable en 0 par étude du taux d'accroissement, et montrer que f' n'est pas continue en 0.

11.3 Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, étudier, lorsque y variable tend vers x, le taux d'accroissement de f entre x et y

11.4 Calculer $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$ et utiliser le théorème de Rolle.

11.5 Appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x^k.$$

11.6 Utiliser le théorème de Rolle de manière répétée.

11.7 En utilisant les hypothèses et le théorème de Rolle, étudier les zéros de f, de f', de f'', de $f^{(3)}$, ...

11.8 *a)* Remarquer que, si $f(a) \neq 0$, f est de signe fixe au voisinage de a.

b) Étudier le taux d'accroissement de $|f|$ entre a et x, pour x variable tendant vers a.

c) Comme ci-dessus.

11.9 Récurrence sur n.

11.10 À l'aide du théorème des accroissements finis, remplacer $f(a)$ par $af'(b)$ dans la fraction intervenant dans l'énoncé.

11.11 *a)* Utiliser le théorème de Rolle.

b) Reprendre l'étude du *a)* en tenant compte des ordres de multiplicité des racines.

11.12 • Pour montrer $g(b) - g(a) \neq 0$, raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Rolle.

• Noter $A = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, considérer l'application

$$\varphi : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) - f(a) - A\big(g(x) - g(a)\big),$$

et utiliser le théorème de Rolle.

11.13 Noter $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

1re méthode : utilisation d'une fonction auxiliaire :

Se ramener à une étude sur un segment, en considérant, par exemple, l'application :

$$\varphi :]-\pi/2\,;\,\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \tan t \text{ et } g = f \circ \varphi.$$

2è méthode : étude d'extrémum :

Si f n'est pas constante, montrer que f admet un extrémum local, en se ramenant à un segment.

11.14 Utiliser un point en lequel g atteint sa borne inférieure.

Corrigés des exercices

11.1

a) En notant $u : x \longmapsto x^2 - x + 2$ et $v : x \longrightarrow \mathrm{e}^{\,x}$, on a $f = uv$. Ainsi, par produit, l'application f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et, d'après la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Mais, comme u est un polynôme de degré 2, on a $u^{(k)} = 0$ pour tout $k \geqslant 3$, d'où, si $n \geqslant 2$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

De plus, $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x}$ a pour dérivée elle-même, d'où, si $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} u(x)\,\mathrm{e}^{\,x} + \binom{n}{1} u'(x)\,\mathrm{e}^{\,x} + \binom{n}{2} u''(x)\,\mathrm{e}^{\,x} \\ &= \Big((x^2 - x + 2) + n(2x-1) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \Big)\,\mathrm{e}^{\,x} \\ &= \big(x^2 + (2n-1)x + (n^2 - 2n + 2) \big)\,\mathrm{e}^{\,x}. \end{aligned}$$

Enfin, il est immédiat que cette dernière formule est aussi vraie pour $n = 0$ et pout $n = 1$.

b) On factorise le dénominateur de $f(x)$:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x^2-1)(x-1) = (x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)} = \frac{a}{(\mathrm{X}-1)^2} + \frac{b}{\mathrm{X}-1} + \frac{c}{\mathrm{X}+1}.$$

En multipliant par par $(\mathrm{X}-1)^2$ puis en remplaçant X par 1, on obtient : $a = \dfrac{1}{2}$.

En multipliant par $\mathrm{X}+1$ puis en remplaçant X par -1, on obtient : $c = \dfrac{1}{4}$.

En multipliant par X puis en faisant tendre X vers l'infini, on a : $b + c = 0$, d'où $b = -c = -\dfrac{1}{4}$.

Ainsi, on obtient la décomposition en éléments simples de $f(x)$:

$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1},$$

que l'on peut d'ailleurs contrôler par réduction au même dénominateur.

Notons $u, v, w :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in]-1\,;1[$, par :

$$u(x) = \frac{1}{x+1}, \quad v(x) = \frac{1}{x-1}, \quad w(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Ces applications u, v, w sont de classe C^∞ sur $]-1\,;1[$ et $w = -v'$.

On a, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1\,;1[$:

$$u^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, \quad v^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},$$

$$w^{(n)}(x) = -v^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-1)^{n+2}}.$$

On conclut :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2} w^{(n)}(x) - \frac{1}{4} v^{(n)}(x) + \frac{1}{4} u^{(n)}(x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-1)^{n+2}} - \frac{1}{4}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{4}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

c) Par linéarisation, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = \cos^2 x \sin x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\sin x \\ &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x \sin x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) \\ &= \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 3x. \end{aligned}$$

Il en résulte, par addition, que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\sin\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{4} 3^n \sin\Big(3x + n\frac{\pi}{2}\Big),$$

Ou encore, en séparant en cas selon la parité de n, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f^{(2p)}(x) = \dfrac{1}{4}(-1)^p \sin x + \dfrac{1}{4}(-1)^p 3^{2p} \sin 3x \\[2mm] f^{(2p+1)}(x) = \dfrac{1}{4}(-1)^p \cos x + \dfrac{1}{4}(-1)^p 3^{2p+1} \cos 3x. \end{cases}$$

11.2

1) D'une part, f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ par théorèmes généraux.

D'autre part : $f(x) \leqslant x^2 \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 = f(0)$,

donc f est continue en 0.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) D'après les théorèmes généraux, f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$.

D'autre part : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \dfrac{1}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0,$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\[2mm] 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

3) D'après le résultat précédent et les théorèmes généraux, $f\,'$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

D'autre part, puisque $2x\sin\dfrac{1}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ et que $\cos\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0, $f\,'$ n'a pas de limite en 0, et donc $f\,'$ n'est pas continue en 0.

Ainsi, $f\,'$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, et discontinue en 0.

11.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $y \in \mathbb{R} - \{x\}$:

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant |x-y|^{\frac{1}{2}}\,\big|\ln|x-y|\big| \underset{y \longrightarrow x}{\longrightarrow} 0,$$

par prépondérance de la puissance sur le logarithme.

Ceci montre que f est dérivable en x et que $f'(x) = 0$.

Puisque f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et que $f' = 0$, on conclut que f est constante.

11.4

On a :

$$g(-1) = 1+f(-1) = 1,\ \ g(0) = f(0) = 0,\ \ g(1) = 3+f(1) = 3.$$

Puisque g est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et que $g(0) = 0$ et $g(1) = 3$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0\,;\,1[$ tel que $g(a) = 1$.

Comme g est continue sur $[-1\,;\,a]$, dérivable sur $]-1\,;\,a[$ et que $g(-1) = g(a)\ (= 1)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]-1\,;\,a[\subset]-1\,;\,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

11.5

L'application $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ est continue sur $[0\,;\,1]$, dérivable sur $]0\,;\,1[$ et $f(0) = 0$, $f(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]0\,;\,1[$ tel que $f'(c) = 0$, c'est-à-dire que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ admet au moins une solution dans $]0\,;\,1[$.

11.6

Puisque f est continue sur $[a\,;\,b]$, dérivable sur $]a\,;\,b[$ et que $f(a) = f(b)\ (= 0)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]a\,;\,b[$ tel que $f'(d) = 0$.

Puisque f' est continue sur $[a\,;\,d]$, dérivable sur $]a\,;\,d[$ et que $f'(a) = f'(d)\ (= 0)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a\,;\,d[\subset]a\,;\,b[$ tel que : $f''(c) = 0$.

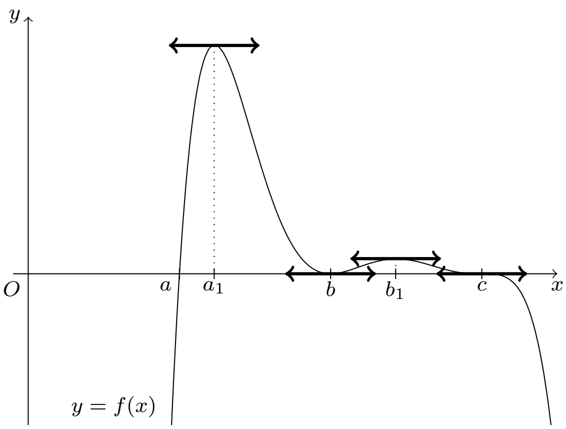
11.7

Nous allons étudier successivement les zéros de f, de $f\,'$, de $f\,''$, ..., de $f^{(5)}$.

• Par hypothèse : $\quad a < b < c\ $ et $\ f(a) = f(b) = f(c) = 0$.

D'après le théorème de Rolle appliqué à f sur $[a\,;\,b]$, sur $[b\,;\,c]$, il existe $a_1 \in]a\,;\,b[,\ b_1 \in]b\,;\,c[$ tels que :

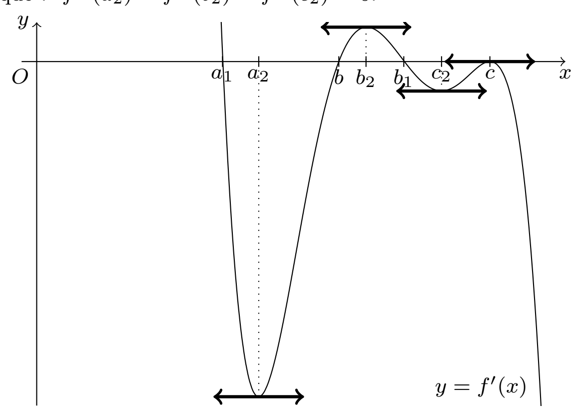
$$f\,'(a_1) = 0 \text{ et } f\,'(b_1) = 0.$$



• On a donc :

$$a_1 < b < b_1 < c \quad \text{et} \quad f\,'(a_1) = f\,'(b) = f\,'(b_1) = f\,'(c) = 0.$$

D'après le théorème de Rolle appliqué à $f\,'$ sur $[a_1\,;\,b]$, $[b\,;\,b_1]$, $[b_1\,;\,c]$, il existe $a_2 \in]a_1\,;\,b[,\ b_2 \in]b\,;\,b_1[,\ c_2 \in]b_1\,;\,c[$ tels que : $f\,''(a_2) = f\,''(b_2) = f\,''(c_2) = 0$.



• On a donc :

$$a_2 < b_2 < c_2 < c \text{ et } f\,''(a_2) = f\,''(b_2) = f\,''(c_2) = f\,''(c) = 0.$$

En réitérant le raisonnement, il existe au moins trois points en ordre strict en lesquels $f^{(3)}$ s'annule, puis au moins deux points en ordre strict en lesquels $f^{(4)}$ s'annule, puis au moins un point d en lequel $f^{(5)}$ s'annule.

11.8

a) • Si $f(a) > 0$, alors, comme f est continue en a (car dérivable en a), il existe $\eta > 0$ tel que :

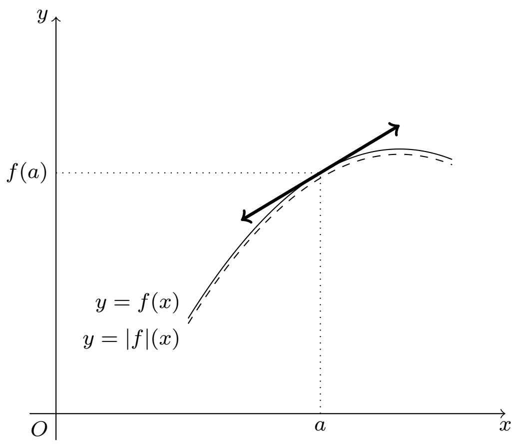
$$\forall x \in [a-\eta\,;\,a+\eta],\quad f(x) \geqslant 0.$$

On a alors : $\forall x \in [a-\eta\,;\,a+\eta],\quad |f|(x) = f(x),$

c'est-à-dire que $|f|$ coïncide avec f au voisinage de a. Puisque f est dérivable en a, $|f|$ l'est alors aussi, et $|f|'(a) = f'(a)$.

• Si $f(a) < 0$, de même, comme $|f|$ coïncide avec $-f$ au voisinage de a, on conclut que $|f|$ est dérivable en a et que $|f|'(a) = -f'(a)$.

On peut regrouper ces deux résultats en utilisant la fonction signe : $\qquad |f|'(a) = \operatorname{sgn}\big(f(a)\big)f'(a).$



b) Supposons $f'(a) > 0$, le cas $f'(a) < 0$ étant analogue, ou si l'on préfère, s'y ramenant en remplaçant f par $-f$.

Comme $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} f'(a) > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in [a - \eta\,;\, a + \eta]$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$,

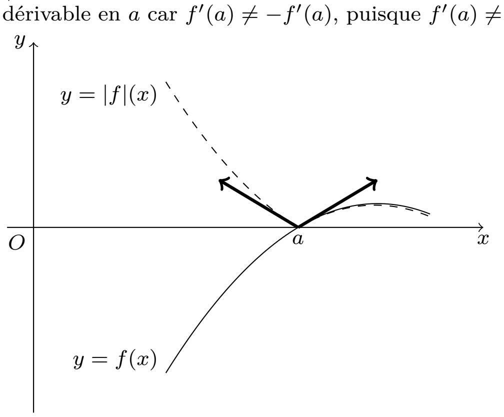
d'où, puisque $f(a) = 0$: $\begin{cases} \forall x \in [a - \eta\,;\, a], \quad f(x) \leqslant 0 \\ \forall x \in [a\,;\, a + \eta], \quad f(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Autrement dit, $|f|$ coïncide avec $-f$ au voisinage à gauche de a et $|f|$ coïncide avec f au voisinage à droite de a.

On a alors : $\quad \dfrac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} \underset{x \longrightarrow a^-}{\longrightarrow} -f'(a)$

et $\quad \dfrac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} \underset{x \longrightarrow a^+}{\longrightarrow} f'(a)$,

donc $|f|$ est dérivable à gauche en a, dérivable à droite en a, et non dérivable en a car $f'(a) \neq -f'(a)$, puisque $f'(a) \neq 0$.

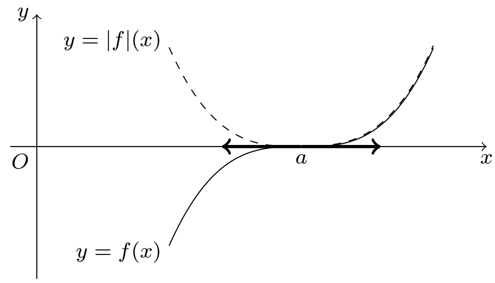


c) On a, pour $x \in \mathbb{R} - \{a\}$, en utilisant l'inégalité triangulaire renversée :

$$\left|\frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a}\right| = \frac{\big||f(x)| - |f(a)|\big|}{|x - a|}$$
$$\leqslant \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} |f'(a)| = 0,$$

donc : $\quad \dfrac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0,$

et on conclut : $|f|$ est dérivable en a et $|f|'(a) = 0$.



11.9

Effectuons une récurrence sur n.

• Pour $n = 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto a_0 \,\mathrm{e}^{b_0 x}$ ne s'annule en aucun point, car $a_0 \neq 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

Soient $(a_0, ..., a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} - \{(0, ..., 0)\}$, $b_0, ..., b_{n+1} \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.

Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k \,\mathrm{e}^{b_k x}$.

Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \ \mathrm{e}^{-b_{n+1} x} f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \,\mathrm{e}^{(b_k - b_{n+1})x}.$$

On a, en isolant le terme d'indice $n + 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \,\mathrm{e}^{(b_k - b_{n+1})x} + a_{n+1}.$$

L'application g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (b_k - b_{n+1}) \,\mathrm{e}^{(b_k - b_{n+1})x}.$$

Si $(a_0, ..., a_n) = (0, ..., 0)$, alors $a_{n+1} \neq 0$ et l'application $f : x \longmapsto a_{n+1} \,\mathrm{e}^{b_{n+1} x}$ ne s'annule en aucun point, donc s'annule en au plus $n + 1$ points.

Supposons donc $(a_0, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$.

Alors, comme $b_0, ..., b_{n+1}$ sont deux à deux distincts, les réels $a_k(b_k - b_{n+1})$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, sont non tous nuls, et les réels $b_k - b_{n+1}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, sont deux à deux distincts. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux familles $\big(a_k(b_k - b_{n+1})\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et $(b_k - b_{n+1})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ à la place de $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ respectivement, ce qui montre que g' admet au plus n zéros dans $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Rolle, appliqué à g, il en résulte que g admet au plus $n + 1$ zéros dans $\mathbb{R}$, et finalement, f admet au plus $n + 1$ zéros dans $\mathbb{R}$.

On a ainsi établi le résultat demandé, par récurrence sur n.

11.10

Puisque f est continue sur $[0\,;\, a]$ et dérivable sur $]0\,;\, a[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $b \in]0\,;\, a[$ tel que : $f(a) - f(0) = af'(b)$, c'est-à-dire, puisque $f(0) = 0$: $f(a) = af'(b)$.

On a alors :
$$\frac{2f(a)+af'(a)}{3a}=\frac{2af'(b)+af'(a)}{3a}=\frac{2}{3}f'(b)+\frac{1}{3}f'(a).$$
Comme $\frac{1}{3}\in[0\,;\,1]$ et que $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}$,

le réel $\frac{2}{3}f'(b)+\frac{1}{3}f'(a)$ est entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Enfin, puisque f' est continue sur l'intervalle $[b\,;\,a]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' atteint toute valeur entre $f'(b)$ et $f'(a)$, donc en particulier, f' atteint le réel $\frac{2}{3}f'(b)+\frac{1}{3}f'(a)$.

Ainsi, il existe $c\in[b\,;\,a]\subset\,]0\,;\,a]$ tel que :
$$f'(c)=\frac{2}{3}f'(b)+\frac{1}{3}f'(a)=\frac{2f(a)+af'(a)}{3a}.$$

11.11

a) Par hypothèse, il existe $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que :
$$x_1<\cdots<x_n\quad\text{et}\quad P=\lambda\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-x_k).$$
Pour tout $k\in\{1,\dots,n-1\}$, P est continu sur $[x_k\,;\,x_{k+1}]$, dérivable sur $]x_k\,;\,x_{k+1}[$ et $P(x_k)=P(x_{k+1})=0$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_k\in]x_k\,;\,x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k)=0$.

Puisque $x_1<y_1<x_2<\cdots<y_{n-1}<x_n$, les réels $y_1,\dots,y_{n-1}$ sont deux à deux distincts.

Comme P' est de degré $n-1$, il en résulte que les zéros de P' sont tous réels et simples, ce sont $y_1,\dots,y_{n-1}$.

b) Par hypothèse, il existe $N\in\mathbb{N}^*$, $(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\in(\mathbb{N}^*)^N$ et $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tels que :
$$x_1<\cdots<x_N\quad\text{et}\quad P=\lambda\prod_{k=1}^{N}(\mathrm{X}-x_k)^{\alpha_k}.$$
Comme en *a)*, il existe $y_1,\dots,y_{N-1}\in\mathbb{R}$ tels que :
$$\forall k\in\{1,\dots,N-1\},\quad \big(y_k\in]x_k\,;\,x_{k+1}[\quad\text{et}\quad P'(y_k)=0\big).$$
D'autre part, pour tout $k\in\{1,\dots,N\}$ tel que $\alpha_k\geqslant 2$, x_k est zéro de P' d'ordre α_k-1.

On met ainsi en évidence des zéros de P', deux à deux distincts : $y_1,\dots,y_{N-1}$ tous d'ordre 1, et x_1 d'ordre α_1-1, x_2 d'ordre α_2-1, …, x_N d'ordre α_N-1, avec une convention évidente si $\alpha_k=1$.

Comme :
$$(N-1)+\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k-1)=\Big(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\Big)-1 =\deg(P)-1=\deg(P'),$$
on conclut que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Plus précisément, en notant $n=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k$, on a :
$$P'=n\lambda\prod_{k=1}^{N-1}(\mathrm{X}-y_k)\prod_{k=1}^{N}(\mathrm{X}-x_k)^{\alpha_k-1}.$$

11.12

• Si $g(b)-g(a)=0$, alors, puisque g est continue sur $[a\,;\,b]$ et dérivable sur $]a\,;\,b[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $d\in]a\,;\,b[$ tel que $g'(d)=0$, contradiction avec les hypothèses.

On a donc : $g(b)-g(a)\neq 0$.

• Notons $A=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons l'application
$$\varphi:[a\,;\,b]\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto f(x)-f(a)-A\big(g(x)-g(a)\big).$$
L'application φ est continue sur $[a\,;\,b]$, dérivable sur $]a\,;\,b[$, et on $\varphi(a)=0$ et $\varphi(b)=0$ (par définition de A). D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c\in]a\,;\,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.

Mais : $\quad\forall x\in]a\,;\,b[,\quad \varphi'(x)=f'(x)-Ag'(x)$,

d'où : $f'(c)-Ag'(c)=0$, donc $A=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$,

ce qui montre le résultat demandé.

11.13

Par hypothèse, il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que :
$$f(x)\underset{x\longrightarrow-\infty}{\longrightarrow}\ell\quad\text{et}\quad f(x)\underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}\ell.$$
1re méthode : utilisation d'une fonction auxiliaire :

Le résultat demandé ressemble au théorème de Rolle, mais sur $\mathbb{R}$ au lieu d'un segment $[a\,;\,b]$. Nous allons essayer de nous ramener à un segment par composition avec une fonction auxiliaire.

Considérons, par exemple, l'application
$$\varphi:]-\pi/2\,;\,\pi/2[\longrightarrow\mathbb{R},\quad t\longmapsto\tan t$$
et notons $g=f\circ\varphi$.

On a, par composition de limites :
$$g(t)\underset{t\longrightarrow-(\pi/2)^+}{\longrightarrow}\ell\quad\text{et}\quad g(t)\underset{t\longrightarrow(\pi/2)^-}{\longrightarrow}\ell.$$
Comme g est continue sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ et de limite finie ℓ en $-\pi/2$ et en $\pi/2$, l'application $h:[-\pi/2\,;\,\pi/2]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie pour tout $t\in[-\pi/2\,;\,\pi/2]$, par :
$$\varphi(t)=\begin{cases}g(t) & \text{si}\quad -\pi/2<t<\pi/2\\ \ell & \text{si}\quad t=-\pi/2\ \text{ou}\ t=\pi/2\end{cases}$$
est continue sur $[-\pi/2\,;\,\pi/2]$.

D'autre part, puisque φ est dérivable sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, $g=f\circ\varphi$ est dérivable sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$, donc h est dérivable sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$.

Puisque h est continue sur $[-\pi/2\,;\,\pi/2]$ et dérivable sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ et que $h(-\pi/2)=h(\pi/2)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma\in]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ tel que $h'(\gamma)=0$. Mais, pour tout $t\in]-\pi/2\,;\,\pi/2[$:
$$h'(t)=g'(t)=f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)=f'(\tan t)\frac{1}{\cos^2 t}.$$
On déduit : $f'(\tan(\gamma))=0$.

En notant $c=\tan\gamma\in\mathbb{R}$, on a donc : $f'(c)=0$.

2è méthode : étude d'extrémum :

Si $f=\ell$ (fonction constante) , alors tout réel c convient pour $f'(c)=0$.

Supposons $f\neq\ell$. Il existe donc $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)\neq\ell$. Quitte à remplacer f par $-f$ (et donc ℓ par $-\ell$), on peut se ramener au cas où : $f(a)>\ell$.

Notons $\varepsilon = f(a) - \ell > 0$.

Puisque $f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$,

il existe $A \in]-\infty\,;a]$ et $B \in [a\,;+\infty[$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;A], & |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \forall x \in [B\,;+\infty[, & |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

On a alors : $\forall x \in]-\infty\,;A] \cup [B\,;+\infty[, \quad f(x) \leqslant \ell + \varepsilon = f(a).$

D'autre part, f étant continue sur $\mathbb{R}$, f est en particulier continue sur le segment $[A\,;B]$. D'après un théorème du cours, il en résulte que la restriction de f à $[A\,;B]$ est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $c \in [A\,;B]$ tel que :

$$\forall x \in [A\,;B], \quad f(x) \leqslant f(c).$$

En particulier, comme $a \in [A\,;B]$, on a : $f(a) \leqslant f(c)$.

On a alors : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;A], & f(x) \leqslant f(a) \leqslant f(c) \\ \forall x \in [A\,;B], & f(x) \leqslant f(c) \\ \forall x \in [B\,;+\infty[, & f(x) \leqslant f(a) \leqslant f(c). \end{cases}$

Ainsi, f admet un maximum local en c. Comme f est dérivable en c, il en résulte, d'après le cours : $f'(c) = 0$.

11.14

Soit $(a,b) \in I^2$ tel que, par exemple $a < b$ et $f'(a) < f'(b)$. Soit $c \in]f'(a)\,;f'(b)[$.

Considérons l'application

$$g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = f(x) - cx.$$

L'application g est dérivable sur $[a\,;b]$ (car f est dérivable sur I), donc g est continue sur le segment $[a\,;b]$. D'après un théorème du cours, g admet donc une borne inférieure et atteint celle-ci : il existe $d \in [a\,;b]$ tel que $g(d) = \underset{x \in [a;b]}{\mathrm{Inf}}\, g(x)$.

Comme $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \underset{x \longrightarrow a^+}{\longrightarrow} g'(a) = f'(a) - c < 0$,

on a, au voisinage de a^+ :

$\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$, donc $g(x) < g(a)$.

Ceci montre que g n'atteint pas sa borne inférieure en a, donc $d \neq a$.

Comme $\dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} \underset{x \longrightarrow b^-}{\longrightarrow} g'(b) = f'(b) - c > 0$,

on a, au voisinage de b^- : $\dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0$, donc $g(x) < g(b)$.

Ceci montre que g n'atteint pas sa borne inférieure en b, donc $d \neq b$.

On a donc : $d \in]a\,;b[$.

Puisque g atteint sa borne inférieure en d, que $d \in]a\,;b[$ et que g est dérivable en d, on a : $g'(d) = 0$, c'est-à-dire $f'(d) = c$.

Ceci montre : $\forall c \in]f'(a)\,;f'(b)[, \ \exists\, d \in]a\,;b[\subset I, \quad f'(d) = c$,

donc $]f'(a)\,;f'(b)[\subset f'(I)$.

Autrement dit, dès que $f'(I)$ contient deux points, il contient le segment qui les joint, et on conclut que $f'(I)$ est un intervalle.

Vrai ou Faux ?

11.1 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à droite en a et à gauche en a, alors f est dérivable en a. V F

11.2 La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ V F

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$

11.3 Si $a < b$, si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et si $f(a) = 0$ et $f(b) = 0$, alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$. V F

11.4 Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 sur I lorsqu'elle est dérivable et continue sur I. V F

11.5 Pour que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ soit deux fois dérivable en $a \in I$, il est nécessaire que f' existe au voisinage de a. V F

11.6 Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors $|f|$ est dérivable sur I et : $|f|' = |f'|$. V F

11.7 Si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables sur I et si $f \leqslant g$, alors : $f' \leqslant g'$. V F

11.8 Si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables sur I et si $f' \leqslant g'$, alors : $f \leqslant g$. V F

11.9 Si I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et si $f : I \longrightarrow J$ est bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur I. V F

11.10 Si $a < b$ et si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 sur $[a\,;b]$, alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$. V F

Vrai ou Faux, les réponses

11.1 Contrexemple : $a = 0$, $f : x \longmapsto |x|$. Il y a eu oubli de l'hypothèse $f'_{\mathrm{g}}(a) = f'_{\mathrm{d}}(a)$. **F**

11.2 La fonction f est dérivable à gauche en 2 et $f'_{\mathrm{g}}(2) = 4$, dérivable à droite en 2 et $f'_{\mathrm{d}}(2) = 1 \neq 4$, donc f n'est pas dérivable en 2. **F**

La conclusion correcte est : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$

Autrement dit, on ne peut dériver les formules que sur des intervalles ouverts .

11.3 C'est un cas particulier du théorème de Rolle, la condition $f(a) = f(b)$ étant suffisante à la place de $f(a) = f(b) = 0$. **V**

11.4 La définition correcte est : f est de classe C^1 sur I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est continue sur I. **F**

11.5 C'est dans la définition de $f''(a)$. **V**

11.6 D'abord, il se peut que $|f|$ ne soit pas dérivable, comme montre l'exemple : $I = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto x$, dans lequel $|f|$ n'est pas dérivable en 0. **F**

Même si $|f|$ est dérivable, la formule proposée peut être fausse, comme le montre l'exemple : $I = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto x^2$, pour lequel on a : $\big(|f|'\big)(-1) = -2$ et $|f'|(-1) = 2$.

11.7 Contrexemple : $I = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto 0$, $g : x \longmapsto x^2$. On n'a pas le droit de dériver les inégalités. **F**

11.8 Contrexemple : $I = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto x^2 + 1$, $g : x \longmapsto x^2$. **F**

La conclusion correcte est, en fixant x_0 quelconque dans I :

$$\forall x \in I, \quad f(x) - f(x_0) \leqslant g(x) - g(x_0).$$

11.9 Contrexemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow x^3$. **F**

L'application f est bijective et dérivable en 0, mais $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \sqrt[3]{y}$ n'est pas dérivable en 0.

L'énoncé correct est : si I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et si $f : I \longrightarrow J$ est bijective, dérivable sur I et telle que $f' > 0$ ou $f' < 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

11.10 Contrexemple : $a = 0$, $b = 2\pi$, $f : [0\,;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}$. **F**

Le résultat devient vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, c'est le théorème de Rolle.

En gardant $\mathbb{C}$, on ne dispose plus que de l'inégalité des accroissements finis et la conclusion correcte est alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant (b-a) \operatorname*{Sup}_{t \in [a;b]} |f't)|.$$

Chapitre 12

Analyse asymptotique

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de limites, équivalents, développements limités, développements asymptotiques
- Développement limité, développement asymptotique d'une fonction réciproque
- Limite, équivalent, développement asymptotique des solutions d'une équations à paramètre.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés des fonctions ou des suites ayant une limite finie ou une limite infinie, pour les opérations algébriques et l'ordre usuel
- Définition et propriétés de l'équivalence, de la négligeabilité
- Liens entre régularité d'une fonction et existence de développements limités
- Théorème de Taylor-Young
- Opérations algébriques sur les développements limités
- Équivalents et développements limités usuels, à savoir par coeur
- Sur des exemples simples, notion et manipulation de développements asymptotiques.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer une limite se présentant sous une forme indéterminée

Essayer de :

- transformer l'écriture de la fonction
- utiliser les prépondérances classiques des puissances sur les logarithmes, et des exponentielles sur les puissances, c'est-à-dire plus précisément les limites suivantes du cours :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \text{pour} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ fixé}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0, \quad \text{pour} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ fixé}$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \text{pour } (a, \alpha) \in]1\,;+\infty[\times\mathbb{R} \quad \text{fixé}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} a^x |x|^\alpha = 0, \quad \text{pour } (a, \alpha) \in]1\,;+\infty[\times\mathbb{R} \quad \text{fixé.}$$

- utiliser des équivalents, surtout pour les formes indéterminées $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.
- utiliser des développements limités, surtout pour la forme indéterminée $\infty - \infty$.

➟ **Exercices 12.1, 12.4, 12.5, 12.8**

Exemple

Trouver $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$.

On a, en utilisant une expression conjuguée :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple

Trouver $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 \,\mathrm{e}^{-x} (\ln x)^3$.

On a : $x^2 \,\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^3 = \underbrace{x^3 \,\mathrm{e}^{-x}}_{\longrightarrow 0} \underbrace{\frac{(\ln x)^3}{x}}_{\longrightarrow 0} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exemple

Trouver $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)$.

On a, pour $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+3x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2} = x\Big(1+\frac{3}{x}\Big)^{1/2} - x\Big(1+\frac{2}{x}\Big)^{1/3}$$

$$= x\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{3}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) - x\Big(1 + \frac{1}{3}\frac{2}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = \frac{5}{6} + o(1),$$

donc la limite cherchée existe et est égale à $\dfrac{5}{6}$.

Exemple

Trouver $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$.

On a : $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \dfrac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x}$,

$x - \sin x = x - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$,

$x + \sin x = x + \big(x + o(x) \big) = 2x + o(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} 2x$,

$x^2 \sin^2 x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x^4$.

D'où : $$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6} 2x}{x^4} = \frac{1}{3},$$

et on conclut : $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$.

Méthode

Pour lever une indétermination de la forme 1^∞

Prendre le logarithme, ou encore écrire $u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{\,v(x) \ln u(x)}$.

➟ **Exercice 12.4**

Exemple

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\operatorname{ch} \dfrac{a}{x} + b \operatorname{sh} \dfrac{a}{x} \right)^x$.

On a : $$\operatorname{ch} \frac{a}{x} + b \operatorname{sh} \frac{a}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

donc, pour x assez grand : $\operatorname{ch} \dfrac{a}{x} + b \operatorname{sh} \dfrac{a}{x} > 0$.

On a : $\ln \left[\left(\operatorname{ch} \dfrac{a}{x} + b \operatorname{sh} \dfrac{a}{x} \right)^x \right] = x \ln \left(\operatorname{ch} \dfrac{a}{x} + b \operatorname{sh} \dfrac{a}{x} \right)$

$$= x \ln \left[\left(1 + o\left(\frac{1}{x} \right) \right) + b \left(\frac{a}{x} + o\left(\frac{1}{x} \right) \right) \right] = x \ln \Big[1 + \underbrace{\frac{ab}{x} + o\left(\frac{1}{x} \right)}_{\longrightarrow 0} \Big]$$

$$= x \left[\frac{ab}{x} + o\left(\frac{1}{x} \right) \right] = ab + o(1) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} ab.$$

Par composition par exp, qui est continue en ab, on conclut que la limite cherchée existe et est égale à $\mathrm{e}^{\,ab}$.

Méthode

Pour former un $DL(0)$ d'une fonction

Utiliser les $DL(0)$ usuels et les opérations sur ces $DL(0)$: troncature, dérivation, primitivation, addition, loi externe, multiplication, composition, inverse. Se ramener, si nécessaire, au voisinage de 0 par transformation de l'écriture.
Essayer d'anticiper l'ordre auquel développer certaines parties de l'écriture, afin d'arriver au bon ordre pour le développement limité demandé.

➟ **Exercices 12.2, 12.7, 12.9, 12.12**

Exemple

Former le $DL_4(0)$ de
$f : x \longmapsto \cos(\ln \cos x)$.

On a : $\ln\cos x = \ln\Big(\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\longrightarrow 0}\Big) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$,

puis : $\cos(\ln\cos x) = \cos\Big(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)$

$$= 1 - \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

Exemple

Former le $DL_3(0)$ de
$f : x \longmapsto \tan x$.

On a : $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$

$$= \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big)^{-1}$$

$$= \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Exemple

Former le $DL_2(0)$ de
$f : x \longmapsto \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{1+x+x^2}$.

Nous allons former le $DL_1(0)$ de f', puis primitiver.
L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \Big(\frac{x}{1+x+x^2}\Big)^2} \frac{(1+x+x^2) - x(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2 + x^2} = \big(1 + o(x)\big)\big(1 + 2x + o(x)\big)^{-1}$$

$$= \big(1 + o(x)\big)\big(1 - 2x + o(x)\big) = 1 - 2x + o(x).$$

D'où, en primitivant et puisque $f(0) = 0$:

$$f(x) = x - x^2 + o(x^2).$$

Méthode

Pour former un $DL(a)$ d'une fonction $f : x \longmapsto f(x)$, où $a \neq 0$

Faire un changement de variable pour se ramener à des $DL(0)$.

Si $a \in \mathbb{R}^*$, noter $t = x - a$.

Si $a = \pm\infty$, noter $t = \dfrac{1}{x}$.

Le résultat final, $DL_n(a)$, sera donné à l'aide d'un polynôme en t, ordonné selon les puissances croissantes de t.

En aucun cas on ne développera les puissances de $x - a$.

➟ **Exercice 12.2**

Exemple

Former le $DL_2(1)$ de
$$f : x \longmapsto \ln(1 + x + x^3).$$

On fait le changement de variable $t = x - 1$, de sorte que :

$$x = 1 + t \quad \text{et} \quad t \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0.$$

On a : $f(x) = \ln(1+x+x^3) = \ln\left(1+(1+t)+(1+t)^3\right)$

$$= \ln\left(3 + 4t + 3t^2 + o(t^2)\right) = \ln 3 + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{4}{3}t + t^2 + o(t^2)}_{\longrightarrow 0}\Big)$$

$$= \ln 3 + \left(\frac{4}{3}t + t^2\right) - \frac{1}{2}\frac{16}{9}t^2 + o(t^2) = \ln 3 + \frac{4}{3}t + \frac{1}{9}t^2 + o(t^2).$$

On conclut : $f(1+t) = \ln 3 + \dfrac{4}{3}t + \dfrac{1}{9}t^2 + \underset{t \longrightarrow 0}{o}(t^2).$

Méthode

Pour calculer un équivalent simple d'une fonction en un point

Essayer de :

- utiliser des équivalents si la fonction se présente comme un produit
- utiliser des développements limités si la fonction se présente comme une différence.

➟ **Exercices 12.3, 12.6**

Exemple

Trouver un équivalent simple, lorsque x tend vers 0, de
$$f : x \longmapsto \ln \frac{1 + \mathrm{sh}^2 x}{1 + \sin^2 x}.$$

On a : $\ln \dfrac{1 + \mathrm{sh}^2 x}{1 + \sin^2 x} = \ln(1 + \mathrm{sh}^2 x) - \ln(1 + \sin^2 x)$

$$= \ln\left[1 + \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2\right] - \ln\left[1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2\right]$$

$$= \ln\Big[1 + \underbrace{x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}_{\longrightarrow 0}\Big] - \ln\Big[1 + \underbrace{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}_{\longrightarrow 0}\Big]$$

$$= \left[\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right]$$

$$-\left[\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right]$$

$$= \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \frac{2}{3}x^4.$$

Méthode

Pour étudier limite, équivalent, développement limité pour une fonction du type :
$$f : x \longmapsto u(x)^{v(x)}$$

Étudier d'abord $\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$, puis reprendre l'exponentielle pour étudier $f(x) = \mathrm{e}^{v(x) \ln u(x)}$.

➟ **Exercices 12.4, 12.5, 12.8**

Exemple

Trouver $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^3} \mathrm{e}^{-x}$.

On a : $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^3} \mathrm{e}^{-x} = \exp\left[x^3 \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - x\right]$

$$= \exp\left[x^3\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \exp\left(o(1)\right) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Méthode

Pour obtenir le développement limité à un ordre numériquement fixé d'une fonction réciproque ou d'une fonction satisfaisant une équation différentielle

Montrer d'abord que la fonction en question est de classe C^∞, donc admet un développement limité à tout ordre, d'après le théorème de Taylor-Young, puis, pour calculer le DL, procéder par coefficients indéterminés.

➟ **Exercice 12.13**

Exemple

Montrer que l'application
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{x} - 1 + 2x}{3}$$
est bijective et former le $DL_2(0)$ de l'application réciproque f^{-1} de f.

L'application f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{x} + 2) > 0,$$

donc f est strictement croissante.

De plus : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective.

Comme f est de classe C^∞ et que $f' > 0$, d'après le cours, f^{-1} est de classe C^∞, donc, d'après le théorème de Taylor-Young, f^{-1} admet un développement limité à tout ordre en 0, en particulier f^{-1} admet un $DL_2(0)$. De plus, $f(0) = 0$, donc $f^{-1}(0) = 0$.

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f^{-1}(y) = ay + by^2 + \underset{y \longrightarrow 0}{o}(y^2).$$

D'autre part, f admet un $DL_2(0)$:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right] - 1 + 2x\Big) = x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2).$$

d'où : $x = f^{-1}\big(f(x)\big) = a\left(x + \dfrac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) + bx^2 + o(x^2)$

$$= ax + \left(\frac{a}{6} + b\right)x^2 + o(x^2).$$

Par unicité du $DL_2(0)$ de $x \longmapsto x$, on déduit : $a = 1$ et $\dfrac{a}{6} + b = 0$,

d'où : $a = 1$ et $b = -\dfrac{1}{6}$.

On conclut : $f^{-1}(y) = y - \dfrac{1}{6}y^2 + \underset{y \longrightarrow 0}{o}(y^2)$.

Méthode

Pour obtenir un développement asymptotique d'une fonction	Essayer de se ramener à un développement limité par transformation de l'écriture, mise en facteur, changement de variable.

Exemple

Former le développement asymptotique de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a : $$\sqrt{x+1} = \sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sqrt{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Méthode

Pour obtenir des renseignements locaux sur les racines d'une équation dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$.	Montrer d'abord l'existence de ces racines et les situer, à l'aide de l'étude des variations d'une fonction. Les renseignements seront obtenus successivement : limite, équivalent simple, développement limité ou développement asymptotique, etc. ➟ **Exercice 12.15**

Exemple

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n(x+1)-1=0$, d'inconnue $x \in [0\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et déterminer $\ell = \lim\limits_{n\infty} x_n$, puis un équivalent simple de $x_n - \ell$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^n(x+1)-1$ est dérivable (donc continue) sur $[0\,;+\infty[$ et :
$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} \begin{cases} >0 & \text{si } x>0 \\ =0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$
donc f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On a : $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'après le théorème de la bijection monotone, f_n est une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[-1\,;+\infty[$, donc l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution et une seule, notée x_n.

De plus : $f_n(1) = 1 > 0$, donc $x_n \in]0\,;1[$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < 1$ et $x_n^{n+1} + x_n^n - 1 = 0$, donc : $2x_n^n \geqslant x_n^{n+1} + x_n^n = 1$, puis : $x_n \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n}$.

Comme $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{2}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$,

on déduit, par encadrement : $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$.

• On a : $x_n^n = \dfrac{1}{x_n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, puis, par continuité de ln :

$$n \ln x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln \frac{1}{2} = -\ln 2,$$

et on déduit : $\ln x_n \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 2}{n}$.

D'autre part, puisque $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, on a : $\ln x_n \underset{n\infty}{\sim} x_n - 1$.

On conclut : $x_n - 1 \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 2}{n}$.

Énoncés des exercices

12.1 Exemples de calculs de limites sans emploi de développement limité

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{2}{x^2-4x+3} \right)$

c) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+3}}{x^2-3x+2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{(x-1)(x+2)} \right)$

12.2 Exemples de calculs de développements limités

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction f définie par la formule suivante (variable x) :

a) ordre 2, voisinage de 0, $\ln(\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x} + 3)$

c) ordre 6, voisinage de 0, $\mathrm{ch}\big(\ln(\mathrm{ch}\, x)\big)$

b) ordre 2, voisinage de 0, $\sqrt{8 + \sqrt{1+6x}}$

d) ordre 2, voisinage de 1, $\ln(1+x^2)$.

12.3 Exemple d'utilisation de la formule de Stirling

Trouver $\displaystyle\lim_{n\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}\, 2^{2n} (n!)^2}$.

12.4 Exemples de calculs de limites sans emploi de développement limité

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} (\mathrm{th}\, x)^{\mathrm{e}^{2x} \ln x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(\mathrm{ch}\, x)}{\mathrm{ch}\,(\mathrm{sh}\, x)}$.

b) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \mathrm{Arctan}\, x \right)^{\mathrm{ch}\,(\ln x)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\infty} \left(\frac{3}{4} \cos n + \frac{4}{3} \sin \frac{1}{n} \right)^n$.

12.5 Exemple de calcul de limites de fonctions d'écritures proches

Déterminer les limites, lorsque x tend vers 0^+ de :

$$f(x) = x^{x^x} - 1, \quad g(x) = x^{x^x - 1}, \quad h(x) = x^{x^{x-1}}.$$

12.6 Exemples d'équivalents de sommations

Montrer :

a) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k! \underset{n\infty}{\sim} (2n)!$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \underset{n\infty}{\sim} 2^{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n}.$

12.7 Exemples de calculs de développements limités

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction f définie par la formule suivante (variable x) :

a) ordre 3, voisinage de 0, $\displaystyle \operatorname{Arctan} \frac{1+x}{1+2x}$

b) ordre 8, voisinage de 0, $\big((\cos x)^{x^2} - 1\big)\tan^3 x.$

c) ordre 2, voisinage de 0, $\displaystyle \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

12.8 Exemples de calculs de limites par emploi de développements limités

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x}\right)$

b) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

c) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{3x - 2\sin x - \tan x}{3x - 2\operatorname{sh} x - \operatorname{th} x}$

d) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 + 3x^3} - 2\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + x^3}\right)$

e) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0} (2^x + 3^x - 4^x)^{\frac{1}{x}}$

f) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} (\tan x)^{\tan 2x}$

g) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 1} (3^x + 4^x - 6^x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}.$

12.9 Exemple de développement limité d'une fonction composée

a) Former le $DL_2(0)$ de $\varphi : t \longmapsto \operatorname{Arctan}(1+t)$.

b) En déduire le $DL_4(0)$ de $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan} \sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}$.

12.10 Recherche de paramètre pour un comportement local d'une fonction

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé pour que la fonction f, donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\tan^2 2x} - \lambda \frac{1}{\tan^2 3x},$$

admette une limite finie lorsque x tend vers 0, et déterminer alors cette limite.

12.11 Calcul des dérivées successives en un point, par intervention d'un développement limité

On note $f :]0\,;2[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{2-x}$. Calculer $f^{(k)}(1)$ pour $k \in \{0, ..., 4\}$.

12.12 Exemples de calculs de développements limités

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction f définie par la formule suivante (variable x) :

a) ordre 22, voisinage de 0, $\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)$

b) ordre 3, voisinage de 0, $\displaystyle\int_x^{2x} \ln(1+t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t.$

12.13 Exemple de développement limité d'une fonction réciproque

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \ln(1+x^2) - x.$

a) Montrer que f est bijective.

b) Former le $DL_4(0)$ de f^{-1}.

12.14 Étude locale des zéros d'un polynôme dont les coefficients dépendent d'un paramètre

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad P_n = \mathrm{X}^3 - (n+2)\mathrm{X}^2 + (2n+1)\mathrm{X} - 1 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}].$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, P_n admet trois zéros, notés a_n, b_n, c_n, tels que : $0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \dfrac{2n+1}{3} < c_n$.

b) Montrer successivement :

$$c_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad c_n \underset{n\infty}{\sim} n, \qquad b_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 2, \qquad a_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

12.15 Exemple d'études asymptotiques de suites définies indirectement

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \mathrm{e}^{\,x} + x^2 - nx.$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n admet un minimum μ_n atteint en un point et un seul noté x_n.

b) Déterminer des équivalents simples de x_n et μ_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Du mal à démarrer ?

12.1 Repérer d'abord s'il s'agit d'une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on transformera l'écriture de $f(x)$:

- calcul élémentaire, pour *a)*
- utilisation d'une expression conjuguée lorsqu'intervient la différence de deux racines carrées, pour *b), c)*

12.2 Composer les développements limités usuels, en se ramenant au voisinage de 0 par transformation de l'écriture.

12.3 Utiliser la formule de Stirling, pour $n!$ et pour $(2n)!$, en ayant préalablement remplacé $(2n+1)!$ par $(2n+1)(2n)!$.

12.4 Repérer d'abord s'il s'agit d'une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on transforme l'écriture de $f(x)$, par composition par le logarithme lorsque l'expression proposée contient la variable aux deux étages.

Utiliser l'expression des fonctions hyperboliques directes, pour *c)*.

12.5 Transformer l'écriture des fonctions de façon que la variable n'intervienne plus sur plusieurs étages, en utilisant le logarithme et l'exponentielle.

12.6 Notons, dans chaque exemple, S_n la sommation proposée.

a) Former $S_n - (2n)!$ et isoler le dernier terme.

b) Calculer la sommation géométrique.

c) Amener une somme de Riemann.

12.7 Pour *a)*, on ne peut pas composer directement les DL, car $\dfrac{1+x}{1+2x}$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.
Dériver, développer, puis primitiver.

Pour *b)* et *c)*, déterminer d'abord l'ordre auquel il faudra développer certaines parties de l'écriture de $f(x)$.

12.8 *a)* Réduire au même dénominateur et factoriser $\tan^2 x - \operatorname{th}^2 x$.

b) Prendre le logarithme.

c) Chercher un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.

d) Se ramener à utiliser le $DL(0)$ de $u \longmapsto (1+u)^{\frac{1}{2}}$, par factorisation des x^4.

e) à *g)* Prendre le logarithme.

12.9 *a)* Former d'abord le $DL_1(0)$ de φ', puis primitiver.

b) Composer les DL de $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\sin x}{x}} - 1$ et de φ.

12.10 Former un développement asymptotique de $\operatorname{cotan}^2 t$ à la précision $o(1)$, appliquer à $t = x$, $t = 2x$, $t = 3x$, pour déduire un développement asymptotique de $f(x)$ à la précision $o(1)$.

12.11 Il serait trop long de calculer formellement les $f^{(k)}(x)$ puis de remplacer x par 1. Passer par la notion de développement limité et utiliser le théorème de Taylor-Young.

12.12 *a)* Reconnaître dans la sommation la partie régulière d'un $DL(0)$ usuel. L'exemple est assez artificiel.

b) Former un $DL(0)$ de la dérivée, puis primitiver.

12.13 *a)* Montrer qu'on peut appliquer le théorème de la bijection monotone.

b) Montrer que f^{-1} est de classe C^∞, d'où l'existence du $DL_4(0)$ d'après le théorème de Taylor-Young. Pour calculer le $DL_4(0)$ de f^{-1}, procéder par coefficients indéterminés, en utilisant $x = f^{-1}\big(f(x)\big)$, de préférence à $y = f\big(f^{-1}(y)\big)$.

12.14 *a)* Étudier les variations de P_n.

Calculer $P_n(0),\ P_n(1),\ P_n(3),\ P_n\Big(\dfrac{2n+1}{3}\Big)$

et étudier leurs signes.

b) Utiliser les relations entre coefficients et racines d'une équation, afin d'avoir des liens entre a_n, b_n, c_n.

12.15 *a)* Étudier les variations de f_n, en calculant f_n' et f_n''.

b) Comparer, pour $x \in [0\,;+\infty[$, e^x et x, pour déduire ensuite $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En utilisant la relation $f_n'(x_n) = 0$, qui définit x_n, déduire $x_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

Le minimum μ_n est donné par $\mu_n = f_n(x_n)$.

Corrigés des exercices

12.1

On note, dans chaque exemple, $f(x)$ l'expression proposée.

a) Il s'agit de la forme indéterminée $\infty - \infty$.

On transforme l'écriture de $f(x)$, en factorisant d'abord les dénominateurs :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) = \frac{1}{x-3}\,\frac{-x+3}{(x-2)(x-1)} \\ &= -\frac{1}{(x-2)(x-1)} \underset{x \longrightarrow 3}{\longrightarrow} -\frac{1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Il s'agit d'une forme indéterminée $\infty - \infty$.

Utilisons une expression conjuguée pour transformer l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(x-2)(x+1)-(x-1)(x+2)}{\sqrt{(x-2)(x+1)}+\sqrt{(x-1)(x+2)}} \\ &= \frac{-2x}{\sqrt{(x-2)(x+1)}+\sqrt{(x-1)(x+2)}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}} \\ &\underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -1. \end{aligned}$$

c) Il s'agit d'une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

Utilisons une expression conjuguée, pour transformer l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+3} &= \frac{(2x^2+1)-(x^2+x+3)}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+x+3}} \\ &= \frac{x^2-x-2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+x+3}} = \frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+x+3}} \end{aligned}$$

et : $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$, d'où :

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+x+3}\right)} \underset{x \longrightarrow 2}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

12.2

a) On a :

$$\begin{aligned} & f(x) \\ =\ & \ln(\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x} + 3) \\ =\ & \ln\left[\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}\right) + 2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right) + 3 + o(x^2)\right] \\ =\ & \ln\left(6+4x+3x^2+o(x^2)\right) \\ =\ & \ln 6 + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}_{\longrightarrow 0}\Big) \\ =\ & \ln 6 + \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2\right)^2 + o(x^2) \\ =\ & \ln 6 + \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}\,\frac{4}{9}x^2 + o(x^2) \\ =\ & \ln 6 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{18}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

b) On a, pour x tendant vers 0 :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+6x} &= (1+6x)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}6x - \frac{1}{8}(6x)^2 + o(x^2) = 1 + 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{8+\sqrt{1+6x}} = \sqrt{9+3x-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} \\ &= 3\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}_{\longrightarrow 0}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}x^2 + o(x^2)\right] \\ &= 3\left(1 + \frac{1}{6}x - \frac{19}{72}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= 3 + \frac{1}{2}x - \frac{19}{24}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

c) On a :

$$\ln(\operatorname{ch} x) = \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}_{\longrightarrow 0}\Big)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

puis :

$$f(x) = \operatorname{ch}\left(\ln(\operatorname{ch} x)\right) = \operatorname{ch}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}_{\longrightarrow 0}\Big)$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o(x^6) = 1 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).$$

d) Puisque $x \longrightarrow 1 \neq 0$, on effectue le changement de variable $t = x - 1 \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$, $x = 1 + t$. On a :

$$f(x) = \ln(1+x^2) = \ln\left(1 + (1+t)^2\right) = \ln(2 + 2t + t^2)$$

$$= \ln 2 + \ln\Big(1 + \underbrace{t + \frac{t^2}{2}}_{\longrightarrow 0}\Big) = \ln 2 + \left(t + \frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$= \ln 2 + t + o(t^2), \qquad t = x - 1.$$

12.3

On a, en utilisant la formule de Stirling pour $n!$ et pour $(2n)!$:

$$\frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}\,2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n+1)(2n)!}{\sqrt{n}\,2^{2n}(n!)^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2n\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2\pi\,2n}}{\sqrt{n}\,2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}2\pi n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

On conclut : $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{(2n+1)!}{\sqrt{n}\,2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

12.4

a) Il s'agit d'une forme indéterminée 1^∞.

On a : $\ln\big(f(x)\big) = \mathrm{e}^{2x}\ln x \ln(\operatorname{th} x)$.

Comme $\operatorname{th} x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$\ln(\operatorname{th} x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \operatorname{th} x - 1 = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - 1$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} - 1 = \frac{-2\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} -2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

D'où :

$$\ln\big(f(x)\big) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2x}\ln x(-2\,\mathrm{e}^{-2x})$$
$$= -2\ln x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

et on conclut : $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Il s'agit d'une forme indéterminée 1^∞.

On a : $\ln\big(f(x)\big) = \operatorname{ch}(\ln x)\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} x\right)$.

D'une part :

$$\operatorname{ch}(\ln x) = \frac{\mathrm{e}^{\ln x} + \mathrm{e}^{-\ln x}}{2} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2}.$$

D'autre part, comme $\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$:

$$\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} x\right) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} x - 1$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi x}.$$

d'où : $\ln\big(f(x)\big) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}\left(-\dfrac{2}{\pi x}\right) = -\dfrac{1}{\pi}$,

donc $\ln\big(f(x)\big) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{\pi}$,

puis : $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\pi}}$.

c) Il s'agit d'une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. Transformons l'écriture de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)} = \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{ch} x} - \mathrm{e}^{-\operatorname{ch} x}}{2} \cdot \frac{2}{\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} + \mathrm{e}^{-\operatorname{sh} x}}.$$

Comme $\mathrm{e}^{\operatorname{ch} x}$ et $\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}$ tendent vers $+\infty$ et que $\mathrm{e}^{-\operatorname{ch} x}$ et $\mathrm{e}^{-\operatorname{sh} x}$ tendent vers 0, lorsque x tend vers $+\infty$, on a :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{ch} x}}{\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}} = \mathrm{e}^{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

d) L'expression proposée ressemble à une suite géométrique dont la raison serait, en valeur absolue, proche de $\dfrac{3}{4}$. On a : $\dfrac{4}{3}\sin\dfrac{1}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, pour n assez grand : $\left|\dfrac{4}{3}\sin\dfrac{1}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{8}$.

On a alors, pour n assez grand :

$$\left|\frac{3}{4}\cos n + \frac{4}{3}\sin\frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{3}{4}|\cos n| + \left|\frac{4}{3}\sin\frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

donc : $\left|\left(\dfrac{3}{4}\cos n + \dfrac{4}{3}\sin\dfrac{1}{n}\right)^n\right| \leqslant \left(\dfrac{7}{8}\right)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$,

et on conclut que la limite cherchée existe et est égale à 0.

12.5

1) On a : $f(x) = \mathrm{e}^{x^x\ln x} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x\ln x}\ln x} - 1$.

Comme $x\ln x \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$, on a $\mathrm{e}^{x\ln x} \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1$,

donc $\mathrm{e}^{x\ln x}\ln x \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, puis : $f(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} -1$.

2) On a : $g(x) = \mathrm{e}^{(x^x-1)\ln x} = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{x\ln x}-1)\ln x}$.

Comme $x\ln x \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$, on a $\mathrm{e}^{x\ln x} - 1 \underset{x \longrightarrow 0^+}{\sim} x\ln x$,

puis $(\mathrm{e}^{x\ln x} - 1)\ln x \underset{x \longrightarrow 0^+}{\sim} x(\ln x)^2$.

Par prépondérance classique, $x(\ln x)^2 \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$,

donc $(\mathrm{e}^{x\ln x} - 1)\ln x \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$, puis : $g(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1$.

3) On a : $h(x) = \mathrm{e}^{x^{x-1}\ln x} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{(x-1)\ln x}\ln x}$.

Comme $x - 1 \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} -1$,

on a $(x-1)\ln x \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$,

puis $\mathrm{e}^{(x-1)\ln x} \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, $\mathrm{e}^{(x-1)\ln x}\ln x \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty$,

et enfin : $h(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$.

12.6

a) Puisque $k!$ croît très rapidement lorsque k croît, on peut conjecturer que le dernier terme de la somme est essentiel. On isole alors les deux derniers termes et on a, par majoration d'une somme de réels, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant S_n - \big((2n-1)! + (2n)!\big)$$
$$= \sum_{k=n+1}^{2n-2} k! \leqslant (n-2)(2n-2)! \leqslant (2n-1)!.$$

Puis :

$$0 \leqslant S_n - (2n)! = \left(\sum_{k=n+1}^{2n-2} k!\right) + (2n-1)! \leqslant 2(2n-1)!,$$

donc : $0 \leqslant \frac{S_n - (2n)!}{(2n)!} \leqslant \frac{2}{2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par théorème d'encadrement, on déduit que le terme encadré tend vers 0 et finalement :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k! \underset{n\infty}{\sim} (2n)!$$

b) On calcule la sommation géométrique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1 \underset{n\infty}{\sim} 2^{n+1}.$$

c) On a : $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$,

et on reconnaît une somme de Riemann.

Comme l'application $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur le segment $[0\,;\,1]$, d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

et on conclut : $S_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2}{3} n\sqrt{n}$.

12.7

a) L'application f est de classe C^1 sur $I = \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, et, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^2} \cdot \frac{(1+2x)-2(1+x)}{(1+2x)^2} = \frac{-1}{(1+2x)^2+(1+x)^2} = -\frac{1}{2+6x+5x^2}.$$

On en déduit le $DL_2(0)$ de f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2+6x+5x^2} \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\underbrace{\left(3x+\frac{5}{2}x^2\right)}_{\longrightarrow 0}} \\ &= -\frac{1}{2}\left[1-\left(3x+\frac{5}{2}x^2\right)+(3x)^2+o(x^2)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(1-3x+\frac{13}{2}x^2+o(x^2)\right) \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}x^2+o(x^2). \end{aligned}$$

D'après le cours, puisque f est de classe C^1 et que f' admet un $DL_2(0)$, f admet alors un $DL_3(0)$ obtenu par primitivation :

$$f(x) = f(0) - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}\frac{x^3}{3} + o(x^3) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{12}x^3 + o(x^3).$$

b) On a : $(\cos x)^{x^2} - 1 = \mathrm{e}^{x^2 \ln\cos x} - 1$.

Comme $\cos x \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$, on déduit $\ln\cos x \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, puis $x^2\ln\cos x \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

$$(\cos x)^{x^2} - 1 \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} x^2\ln\cos x \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} x^2(\cos x - 1) \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} x^2\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^4}{2}.$$

D'autre part : $\tan^3 x \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} x^3$.

Par produit, on a donc : $f(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} -\dfrac{x^7}{2}$.

D'autre part, f est impaire, donc, sous réserve d'existence, la partie régulière du $DL_8(0)$ de f est la même que celle du $DL_7(0)$.

Enfin, f admet un DL à tout ordre car, par opérations, f est de classe C^∞ au voisinage de 0.

On conclut : $f(x) = -\dfrac{x^7}{2} + o(x^8)$.

c) Comme $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = \dfrac{\mathrm{sh}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 x}$ et que le $DL(0)$ de $\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 x$ (au dénominateur) commence par x^4, il nous faut, pour $\sin^2 x - \mathrm{sh}^2 x$ au numérateur, un $DL_6(0)$, afin d'obtenir un $DL_2(0)$ de f.

On a, par linéarisation :

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+o(x^6)\right)\right] \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^6)} \\ &= \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{\underbrace{1-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{45}x^4+o(x^4)}_{\longrightarrow 0}} \\ &= \frac{1}{x^2}\left[1+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{45}x^4\right)+\frac{1}{9}x^4+o(x^4)\right] \\ &= \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{15}x^4+o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}x^2+o(x^2). \end{aligned}$$

De même, en changeant certains signes :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + o(x^2).$$

On conclut : $\quad f(x) = \dfrac{2}{3} + o(x^2)$.

12.8

Notons, dans chaque exemple, $f(x)$ l'expression proposée.

a) On a :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{th}^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\tan^2 x - \mathrm{th}^2 x}{\mathrm{th}^2 x\tan^2 x} = \frac{(\tan x - \mathrm{th}\,x)(\tan x + \mathrm{th}\,x)}{\mathrm{th}^2 x\tan^2 x}.$$

Et :

$$\tan x - \operatorname{th} x = \Big(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)$$
$$= \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \frac{2}{3}x^3,$$

$$\tan x + \operatorname{th} x = \big(x + o(x)\big) + \big(x + o(x)\big) = 2x + o(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} 2x,$$

$$\tan^2 x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x^2, \qquad \operatorname{th}^2 x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x^2.$$

D'où : $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{\frac{2}{3}x^3 \cdot 2x}{x^2 x^2} = \dfrac{4}{3},$

et on conclut : $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dfrac{4}{3}.$

b) On a :

$$\ln\big(f(x)\big) = \frac{1}{x^2}\ln\Big(\frac{\sin x}{x}\Big) = \frac{1}{x^2}\ln\Big[\frac{1}{x}\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)\Big]$$
$$= \frac{1}{x^2}\ln\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + o(x^2)}_{\longrightarrow 0}\Big) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}\Big(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\Big)$$
$$\underset{x \longrightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6},$$

donc $\ln\big(f(x)\big) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{6},$

et on conclut : $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$

c) On va chercher des équivalents pour les deux termes de la fraction donnant $f(x)$. Dans la recherche d'un équivalent de $3x - 2\sin x - \tan x$, par addition de $DL(0)$, on constate que les termes en x s'éliminent et que les termes en x^3 s'éliminent aussi.

On forme donc des $DL_5(0)$:

$$3x - 2\sin x - \tan x$$
$$= 3x - 2\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\Big) - \Big(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\Big)$$
$$= \Big(-\frac{2}{5!} - \frac{2}{15}\Big)x^5 + o(x^5)$$
$$= -\frac{3}{20}x^5 + o(x^5) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{20}x^5,$$

$$3x - 2\operatorname{sh} x - \operatorname{th} x$$
$$= 3x - 2\Big(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\Big)$$
$$= \Big(-\frac{2}{5!} - \frac{2}{15}\Big)x^5 + o(x^5)$$
$$= -\frac{3}{20}x^5 + o(x^5) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{20}x^5.$$

On conclut : $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1.$

d) On a, en mettant x^4 en facteur dans chaque racine carrée :

$$f(x) = x^2\Big[\Big(1 + \frac{3}{x}\Big)^{\frac{1}{2}} - 2\Big(1 + \frac{2}{x}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]$$
$$= x^2\Big[\Big(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{9}{x^2}\Big)$$
$$-2\Big(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{x^2}\Big)$$
$$+\Big(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^2}\Big) + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]$$
$$= x^2\Big[-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] = -\frac{1}{4} + o(1),$$

et on conclut : $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{4}.$

e) On a :

$$\ln\big(f(x)\big) = \frac{1}{x}\ln(2^x + 3^x - 4^x)$$
$$= \frac{1}{x}\ln\big(\mathrm{e}^{x\ln 2} + \mathrm{e}^{x\ln 3} - \mathrm{e}^{x\ln 4}\big)$$
$$= \frac{1}{x}\ln\Big(\big(1 + x\ln 2 + o(x)\big) + \big(1 + x\ln 3 + o(x)\big)$$
$$-\big(1 + x\ln 4 + o(x)\big)\Big)$$
$$= \frac{1}{x}\ln\Big(1 + \underbrace{x\ln\frac{3}{2} + o(x)}_{\longrightarrow 0}\Big)$$
$$= \frac{1}{x}\Big(x\ln\frac{3}{2} + o(x)\Big) = \ln\frac{3}{2} + o(1),$$

donc $\ln\big(f(x)\big) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \ln\dfrac{3}{2},$ puis, par continuité de l'exponentielle : $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}.$

f) Puisque $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}^- \neq 0$, faisons le changement de variable $t = x - \dfrac{\pi}{4} \underset{x \longrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-}{\longrightarrow} 0^+,\ x = \dfrac{\pi}{4} + t.$ On a :

$$\ln\big(f(x)\big)$$
$$= \tan 2x \ln(\tan x) = \tan\Big(\frac{\pi}{2} + 2t\Big)\ln\Big(\tan\Big(\frac{\pi}{4} + t\Big)\Big)$$
$$= -\frac{1}{\tan 2t}\ln\frac{1 + \tan t}{1 - \tan t}$$
$$= -\frac{1}{\tan 2t}\big(\ln(1 + \tan t) - \ln(1 - \tan t)\big)$$
$$= -\frac{1}{\tan 2t}\big([\tan t + o(\tan t)] - [-\tan t + o(\tan t)]\big)$$
$$= -\frac{1}{\tan 2t}(2\tan t + o(\tan t))$$
$$\underset{t \longrightarrow 0}{\sim} -\frac{2\tan t}{\tan 2t} \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} -\frac{2t}{2t} = -1,$$

d'où : $\ln\big(f(x)\big) \underset{x \longrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-}{\longrightarrow} -1,$ puis : $f(x) \underset{x \longrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}.$

g) Puisque $x \longrightarrow 1 \neq 0$, faisons le changement de variable $t = x - 1 \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0,\quad x = 1 + t$. On a :

$$\tan\frac{\pi x}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\dfrac{\pi t}{2}} \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\dfrac{\pi t}{2}} = -\frac{2}{\pi t}$$

$$\begin{aligned}
&\ln(3^x + 4^x - 6^x)\\
=\ &\ln(3\cdot 3^t + 4\cdot 4^t - 6\cdot 6^t)\\
=\ &\ln\left(3\,\mathrm{e}^{t\ln 3} + 4\,\mathrm{e}^{t\ln 4} - 6\,\mathrm{e}^{t\ln 6}\right)\\
=\ &\ln\Big(3\big(1 + t\ln 3 + o(t)\big) + 4\big(1 + t\ln 4 + o(t)\big)\\
&\qquad -6\big(1 + t\ln 6 + o(t)\big)\Big)\\
=\ &\ln\big(1 + \underbrace{(3\ln 3 + 4\ln 4 - 6\ln 6)}_{\text{noté } \alpha} t + o(t)\big) \ = \ \alpha t + o(t).
\end{aligned}$$

D'où : $\ln\big(f(x)\big) = \tan\dfrac{\pi x}{2}\ln(3^x + 4^x - 6^x) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} -\dfrac{2\alpha}{\pi}$,

donc : $\ln\big(f(x)\big) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} -\dfrac{2\alpha}{\pi}$, puis :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\frac{2\alpha}{\pi}} = (\mathrm{e}^{\alpha})^{-\frac{2}{\pi}} = \left(\frac{3^3\cdot 4^4}{6^6}\right)^{-\frac{2}{\pi}} = \left(\frac{4}{27}\right)^{-\frac{2}{\pi}} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{2}{\pi}}.$$

12.9

a) On ne peut pas composer les $DL(0)$ directement, car $1 + t \underset{t \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$.

L'application φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi'(t) = \frac{1}{1 + (1+t)^2} = \frac{1}{2 + 2t + t^2}.$$

On forme le $DL_1(0)$ de φ' :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\Big(1 + \underbrace{t + \frac{t^2}{2}}_{\longrightarrow 0}\Big)^{-1} = \frac{1}{2}\big(1 - t + o(t)\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + o(t).$$

D'après le cours, φ admet un $DL_2(0)$ obtenu en primitivant :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} + o(t^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + o(t^2).$$

b) D'abord, au voisinage de 0, $\dfrac{\sin x}{x} \geqslant 0$, donc $f(x)$ existe.

L'énoncé sous-entend que f admet une limite finie en 0 ; on a : $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \operatorname{Arctan} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

On va utiliser le résultat de *a)*, en remplaçant t par $\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}} - 1$.

Formons le $DL_4(0)$ de cette expression, en partant d'un $DL_5(0)$ de $\sin x$:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)\right) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4),$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\sin x}{x}} - 1 &= \Big(1 \underbrace{- \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4}_{\longrightarrow 0}\Big)^{\frac{1}{2}} - 1\\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2 - 1 + o(x^4)\\
&= -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{1440}x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) = \varphi\left(\sqrt{\frac{\sin x}{x}} - 1\right) &= \varphi\left(-\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{1440}x^4 + o(x^4)\right)\\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{1440}x^4\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{12}x^2\right)^2 + o(x^4)\\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

12.10

Formons un développement asymptotique de $\dfrac{1}{\tan t}$ lorsque t tend vers 0 :

$$\frac{1}{\tan t} = \frac{1}{t + \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)} = \frac{1}{t}\Big(1 + \underbrace{\frac{t^2}{3} + o(t^2)}_{\longrightarrow 0}\Big)^{-1} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right).$$

Puis :

$$\frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right)^2 = \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{2t^2}{3} + o(t^2)\right) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{3} + o(1).$$

d'où, en remplaçant t successivement par x, $2x$, $3x$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{(2x)^2} - \frac{2}{3}\right)\\
&\quad -\lambda\left(\frac{1}{(3x)^2} - \frac{2}{3}\right) + o(1) = \left(\frac{5}{4} - \frac{\lambda}{9}\right)\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}(\lambda - 2) + o(1).
\end{aligned}$$

On a : $\dfrac{5}{4} - \dfrac{\lambda}{9} = 0 \iff \lambda = \dfrac{45}{4}$.

Si $\lambda \neq \dfrac{45}{4}$, alors $\dfrac{5}{4} - \dfrac{\lambda}{9} \neq 0$, $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \pm\infty$, f n'a pas de limite finie en 0.

Si $\lambda = \dfrac{45}{4}$, alors $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}(\lambda - 2) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{45}{4} - 2\right) = \dfrac{37}{6}$.

Finalement f admet une limite finie en 0 si et seulement si $\lambda = \dfrac{45}{4}$, et cette limite est alors $\dfrac{37}{6}$.

12.11

L'application f est de classe C^∞ sur $]0\,;2[$, donc, d'après le théorème de Taylor-Young, f admet un $DL(1)$ à tout ordre, en particulier à l'ordre 4, et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k (x-1)^k + \underset{x \longrightarrow 1}{o}\big((x-1)^4\big),$$

où $a_k = \dfrac{f^{(k)}(1)}{k!}$ pour $k \in \{0, \ldots, 4\}$.

Notons $h = x - 1 \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$, $x = 1 + h$. On a :

$$f(x) = \frac{\ln x}{2 - x} = \frac{\ln(1+h)}{1-h} = \big(\ln(1+h)\big)\frac{1}{1-h}$$
$$= \Big(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4)\Big)\Big(1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + o(h^4)\Big)$$
$$= h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + \frac{7}{12}h^4 + o(h^4).$$

On a donc, par unicité du $DL_4(1)$ de f, par identification avec la formule de Taylor-Young :

$$f^{(0)}(1) = 0!a_0 = 0,\ \ f^{(1)}(1) = 1!a_1 = 1,\ \ f^{(2)}(1) = 2!a_2 = 1,$$
$$f^{(3)}(1) = 3!a_3 = 5,\ \ f^{(4)}(1) = 4!a_4 = 14.$$

12.12

a) On reconnaît en la somme proposée la partie régulière du $DL_{20}(0)$ de $\ln(1+x)$. On a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \frac{x^{21}}{21} - \frac{x^{22}}{22} + o(x^{22}).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\Big(\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\Big)\\
&= \exp\Big(\ln(1+x) - \frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o(x^{22})\Big)\\
&= (1+x)\exp\Big(-\frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o(x^{22})\Big)\\
&= (1+x)\Big(1 - \frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o(x^{22})\Big)\\
&= 1 + x - \frac{x^{21}}{21} + \Big(\frac{1}{22} - \frac{1}{21}\Big)x^{22} + o(x^{22})\\
&= 1 + x - \frac{1}{21}x^{21} - \frac{1}{462}x^{22} + o(x^{22}).
\end{aligned}$$

b) L'application

$$g :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto g(t) = \ln(1+t)\ln(1-t)$$

est continue sur $]-1\,;1[$, donc l'application $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $I = \Big]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\Big[$ et :

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x)$$
$$= 2\ln(1+2x)\ln(1-2x) - \ln(1+x)\ln(1-x).$$

Pour obtenir un $DL_3(0)$ de f, on forme un $DL_2(0)$ de f' :

$$f'(x) = 2\big(2x + o(x)\big)\big(-2x + o(x)\big) + \big(x + o(x)\big)\big(x + o(x)\big)$$
$$= -7x^2 + o(x^2).$$

Par primitivation d'un $DL(0)$, on en déduit que f admet un $DL_3(0)$ et que :

$$f(x) = f(0) + \Big(-7\frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) = -\frac{7}{3}x^3 + o(x^3).$$

12.13

a) D'après les théorèmes généraux, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leqslant 0,$$

et f' ne s'annule que pour $x = 1$.

De plus : $f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Il en résulte, d'après le théorème de la bijection monotone, que f est bijective.

b) D'après *a)*, on peut former le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\searrow$	$-\infty$

Puisque f est de classe C^∞ sur $I =]-\infty\,;1[$ et que f' ne s'annule en aucun point de I, f réalise une bijection de I sur $J =]\ln 2 - 1\,;+\infty[$, et la bijection réciproque, notée f^{-1} encore, est de classe C^∞ sur J. Il en résulte, d'après le théorème de Taylor-Young, que f^{-1} admet un $DL(0)$ à tout ordre, en particulier à l'ordre 4. Il existe donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4).$$

En notant $x = f^{-1}(y)$, on a :

$$y = f(x) = \ln(1+x^2) - x = \Big(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\Big) - x$$
$$= -x + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).$$

d'où :

$$\begin{aligned}
x &= f^{-1}\big(f(x)\big)\\
&= a\Big(-x + x^2 - \frac{1}{2}x^4\Big) + b(-x+x^2)^2\\
&\quad + c(-x+x^2)^3 + d(-x)^4 + o(x^4)\\
&= a\Big(-x + x^2 - \frac{1}{2}x^4\Big) + b(x^2 - 2x^3 + x^4)\\
&\quad + c(-x^3 + 3x^4) + dx^4 + o(x^4)\\
&= -ax + (a+b)x^2 + (-2b - c)x^3\\
&\quad + \Big(-\frac{1}{2}a + b + 3c + d\Big)x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Par unicité du $DL_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto x$, on déduit :

$$-a = 1,\quad a + b = 0,\quad -2b - c = 0,\quad -\frac{1}{2}a + b + 3c + d = 0.$$

On résout ce système linéaire par cascade :

$$a = -1,\ b = -a = 1,\ c = -2b = -2,\ d = \frac{1}{2}a - b - 3c = \frac{9}{2}.$$

On conclut au $DL_4(0)$ de f^{-1} :

$$f^{-1}(y) = -y + y^2 - 2y^3 + \frac{9}{2}y^4 + \underset{y \longrightarrow 0}{o}(y^4).$$

12.14

a) Le polynôme P_n est dérivable et :

$P_n' = 3\mathrm{X}^2 - 2(n+2)\mathrm{X} + (2n+1) = (\mathrm{X}-1)\big(3\mathrm{X} - (2n+1)\big).$

On a $\dfrac{2n+1}{3} > 1$ pour $n \geqslant 2$. Supposons donc $n \geqslant 2$.

On forme le tableau des variations de P_n :

x	$-\infty$		1		$\frac{2n+1}{3}$		$+\infty$
$P_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On calcule :

$P_n(0) = -1 < 0, \quad P_n(1) = n - 1 > 0,$

$$P_n(3) = -3n + 11 < 0 \ \text{ pour } n \geqslant 4.$$

Pour $n \geqslant 4$, on a $\dfrac{2n+1}{3} \geqslant 3$, donc, comme P_n décroît sur $\left[1\,;\ \dfrac{2n+1}{3}\right]$, il en résulte : $P\left(\dfrac{2n+1}{3}\right) < 0$.

D'après le théorème de la bijection monotone par intervalles, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, P_n admet exactement trois zéros réels, notés a_n, b_n, c_n tels que : $0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \dfrac{2n+1}{3} < c_n$.

x	$-\infty$	0	a_n	1	b_n	3	$\frac{2n+1}{3}$	c_n	$+\infty$
$P_n'(x)$		$+$		0		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	$-\infty$	<0	0	>0	0	<0	<0	0	$+\infty$

b) D'après les relations entre coefficients et racines, on a :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = n + 2, \\ a_n b_n + a_n c_n + b_n c_n = 2n + 1, \\ a_n b_n c_n = 1. \end{cases}$$

1) Puisque $c_n > \dfrac{2n+1}{3}$, on a : $c_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Comme : $0 < a_n = \dfrac{1}{b_n c_n} < \dfrac{1}{c_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$,

on déduit $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) On a : $c_n = (n+2) - b_n - a_n$, et $0 < a_n < 1 < b_n < 3$, donc : $c_n = n + 2 + O(1)$, et donc : $c_n \underset{n\infty}{\sim} n$.

4) On a : $b_n = \dfrac{2n + 1 - a_n b_n - a_n c_n}{c_n}$.

Comme $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, $1 < b_n < 3$ et $0 < a_n c_n = \dfrac{1}{b_n} < 1$,

on a : $2n + 1 - a_n b_n - a_n c_n \underset{n\infty}{\sim} 2n$,

et donc : $b_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2n}{c_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 2$.

5) Enfin : $a_n = \dfrac{1}{b_n c_n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

12.15

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \mathrm{e}^{\,x} + 2x - n, \qquad f_n''(x) = \mathrm{e}^{\,x} + 2 > 0.$$

On en déduit les variations de f_n :

x	$-\infty$		x_n		$+\infty$
$f_n''(x)$		$+$		$+$	
$f_n'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	μ_n	$\nearrow$	$+\infty$

Il en résulte que f_n admet un minimum μ_n atteint en un point et un seul noté x_n. Ainsi : $f_n'(x_n) = 0$ et $\mu_n = f_n(x_n)$.

b) 1) • On a : $f_n'(0) = 1 - n \leqslant 0$, donc $0 \leqslant x_n$.

• D'après une inégalité classique, on a, pour tout $t \in]-1\,;+\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$, donc $1 + t \leqslant \mathrm{e}^{\,t}$, puis $t \leqslant \mathrm{e}^{\,t} - 1 \leqslant \mathrm{e}^{\,t}$, donc $n = \mathrm{e}^{\,x_n} + 2x_n \leqslant 3\,\mathrm{e}^{\,x_n}$, d'où $\mathrm{e}^{\,x_n} \geqslant \dfrac{n}{3}$, $x_n \geqslant \ln \dfrac{n}{3} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

et donc : $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

• On a : $n = \mathrm{e}^{\,x_n} + 2x_n = \mathrm{e}^{\,x_n}(1 + 2x_n\,\mathrm{e}^{-x_n})$. Comme $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par prépondérance classique, $x_n\,\mathrm{e}^{-x_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $n \underset{n\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,x_n}$.

Ainsi : $\mathrm{e}^{\,x_n} = n + o(n)$,

d'où :

$x_n = \ln\big(n + o(n)\big) = \ln n + \ln\big(1 + o(1)\big) = \ln n + o(1)$,

et on conclut : $x_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

2) On a : $\mu_n = f_n(x_n) = \mathrm{e}^{\,x_n} + x_n^2 - n x_n$ et $\mathrm{e}^{\,x_n} + 2x_n - n = 0$, donc $\mathrm{e}^{\,x_n} = -2x_n + n$, d'où :

$$\mu_n = (-2x_n + n) + x_n^2 - n x_n = x_n(-n + x_n - 2) + n.$$

Comme $x_n \sim \ln n$, on a $-n + x_n - 2 \sim -n$, puis $x_n(-n + x_n - 2) \sim -n \ln n$,

et on conclut : $\mu_n \underset{n\infty}{\sim} -n \ln n$.

Vrai ou Faux ?

12.1 On a, par prépondérance classique : $x\,\mathrm{e}^{-x}\ln x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. V F

12.2 On a, par prépondérance classique : $\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{x^3}+1)}{x^2} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. V F

12.3 Si $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g(x)$, alors : $f(x)-g(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$. V F

12.4 Si $f(x)-g(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$, alors : $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g(x)$. V F

12.5 Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est fixé, alors : $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} \lambda \iff f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \lambda$. V F

12.6 Si $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} x^2$, alors $\dfrac{f(x)}{x+1} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$. V F

12.7 Si f et g sont dérivables en a et si $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $f'(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g'(x)$. V F

12.8 On a $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ car $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. V F

12.9 Si $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g(x)$, et si, au voisinage de a, $g(x) \geqslant 0$, alors, au voisinage de a : $f(x) \geqslant 0$. V F

12.10 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^{n+1} et si f' admet un $DL_n(0)$ V F

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x \longrightarrow 0}{o}(x^n),$$

alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ et celui-ci est :

$$f(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x \longrightarrow 0}{o}(x^{n+1}).$$

Vrai ou Faux, les réponses

12.1 On a, par prépondérance classique : $x\,\mathrm{e}^{-x}\ln x = \underbrace{x^{1/2}\,\mathrm{e}^{-x}}_{\longrightarrow 0}\underbrace{x^{1/2}\ln x}_{\longrightarrow 0} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$ **V**

12.2 Il ne s'agit pas d'une prépondérance classique, puisque le logarithme porte sur une expression contenant une exponentielle. **F**

On a : $\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{x^3}+1)}{x^2} = \dfrac{x^3+\ln(1+\mathrm{e}^{-x^3})}{x^2} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^2} = x \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

12.3 Contrexemple : $a=+\infty,\quad f(x)=x+1,\quad g(x)=x.$ **F**

Ainsi, il se peut que le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tende vers 1 sans que la différence $f(x)-g(x)$ tende vers 0.

12.4 Contrexemple : $a=+\infty,\quad f(x)=\dfrac{2}{x},\quad g(x)=\dfrac{1}{x}.$ **F**

Ainsi, il se peut que la différence $f(x)-g(x)$ tende vers 0 sans que le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tende vers 1.

12.5 C'est un résultat du cours. **V**

Bien noter que l'on suppose que λ n'est pas nul.

12.6 Une éventuelle limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ne doit pas dépendre de x. **F**

Le résultat correct est : $\dfrac{f(x)}{x+1} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} x$, avec un équivalent et non une limite.

12.7 Contrexemple : $a=0,\ f(x)=x^2+1,\ g(x)=x+1.$ **F**

12.8 L'explication donnée est fausse, car on n'a pas le droit de soustraire les équivalents. **F**

$$\text{On a : } \frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x} = \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{x-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x\big(x+o(x)\big)}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} \frac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2},$$

donc : $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x} \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \neq 0.$

12.9 C'est un résultat du cours. **V**

12.10 Il y a eu oubli de la constante additive $f(0)$, le résultat correct est : **F**

$$f(x) = f(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\longrightarrow 0}{o}(x^{n+1}).$$

Chapitre 13

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer une divisibilité
- Montrer qu'un entier est composé, c'est-à-dire n'est pas premier
- Résolution d'équations diophantiennes, c'est-à-dire d'équations donc la ou les inconnues sont dans $\mathbb{Z}$
- Résolution de congruences ou de systèmes de congruences, à inconnues dans $\mathbb{Z}$
- Utilisation du petit théorème de Fermat.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, définition et propriétés des congruences
- Définitions et propriétés des pgcd et ppcm
- Définition et propriétés des nombres premiers entre eux, théorème de Bezout, théorème de Gauss
- Définition d'un nombre premier, existence et unicité de la décomposition primaire d'un entier $n \geqslant 2$.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer qu'un entier A (supérieur ou égal à 2) est composé, c'est-à-dire n'est pas premier

Montrer l'existence de $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$A = ab, \qquad a \geqslant 2, \qquad b \geqslant 2.$$

À cet effet, on peut essayer de transformer l'écriture de A, par exemple en utilisant :

- une identité remarquable permettant d'amener une factorisation de A
- une mise sous forme canonique d'un trinôme ou d'un trinôme bicarré

➟ **Exercice 13.1**

Exemple

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$, le nombre $A = n^4 - 8n^2 + 4$ n'est pas premier.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$:

$$A = n^4 - 8n^2 + 4 = (n^2-2)^2 - 4n^2 = \big((n^2-2) - 2n\big)\big((n^2-2)+2n\big)$$
$$= \big(\underbrace{(n-1)^2 - 3}_{\text{noté } u}\big)\big(\underbrace{(n+1)^2 - 3}_{\text{noté } v}\big).$$

Puisque $n \geqslant 4$, on a $u \geqslant 3^2 - 3 = 6 > 1$ et $v \geqslant 5^2 - 3 = 22 > 1$.

On conclut que A n'est pas premier.

Méthode

Pour montrer qu'un entier a divise un entier b

Essayer de :

- mettre a en facteur dans b, c'est-à-dire trouver un entier c tel que $b = ac$
- utiliser les congruences modulo a
- utiliser une récurrence
- utiliser la décomposition primaire de a

➟ **Exercices 13.2, 13.5, 13.10**

Exemple

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2^{4n+2} + 3^{n+2} = 2^2 \cdot (2^4)^n + 3^2 \cdot 3^n = 4 \cdot 16^n + 9 \cdot 3^n$$
$$\underset{[13]}{\equiv} 4 \cdot 3^n + 9 \cdot 3^n = (4+9)3^n = 13 \cdot 3^n \underset{[13]}{\equiv} 0,$$

donc : $\quad 13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}.$

Méthode

Pour résoudre une équation diophantienne

Essayer de :

- ramener l'équation proposée, par équivalence logique ou par implication, à une équation plus simple
- faire intervenir des limitations (par inégalité ou par divisibilité) sur les inconnues
- montrer qu'il n'y a aucune solution, en raisonnant par l'absurde et en utilisant des congruences bien choisies

➟ **Exercices 13.8, 13.9**

Exemple

Résoudre l'équation

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, par mise sous forme canonique de trinômes :

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)^2 = 1 \\ (y-2)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 = 1 \text{ ou } -1 \\ y - 2 = 1 \text{ ou } -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \text{ ou } 0 \\ y = 3 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

On conclut : $\mathcal{S} = \{(2, 3),\ (2, 1),\ (0, 3),\ (0, 1)\}$.

Méthode

Pour résoudre une équation faisant intervenir pgcd et/ou ppcm de deux nombres entiers x, y

Essayer d'utiliser les entiers X, Y tels que, en notant $d = x \wedge y$, on ait :

$$x = dX, \qquad y = dY, \qquad X \wedge Y = 1.$$

➟ **Exercice 13.13**

Exemple

Résoudre l'équation

$$(x \wedge y)^2 + xy = 101,$$

d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1) Soit (x, y) convenant. Notons $d = x \wedge y$.

Il existe $(X, Y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x = dX$, $y = dY$, $X \wedge Y = 1$.

On a alors $d^2 + d^2XY = 101$, c'est-à-dire $d^2(1 + XY) = 101$.

Comme 101 est premier et que $1 + XY \geqslant 2$, on déduit $d^2 = 1$, donc $d = 1$, puis $XY = 100$.

Comme $X \wedge Y = 1$ et que $XY = 100 = 2^2 5^2$, on déduit, à l'ordre près : $(X = 1 \text{ et } Y = 100)$ ou $(X = 4 \text{ et } Y = 25)$,

puis : $(x = 1 \text{ et } y = 100)$ ou $(x = 4 \text{ et } y = 25)$.

2) Réciproque immédiate.

On conclut : $\mathcal{S} = \{(1, 100),\ (4, 25),\ (25, 4),\ (100, 1)\}$.

Méthode

Pour montrer qu'un entier a (donné numériquement) divise un entier N

Essayer de décomposer a en un produit de facteurs premiers entre eux deux à deux, montrer que chacun de ces facteurs divise N, et en déduire que a divise N.

➟ **Exercice 13.17**

Exemple

Soit $p \geqslant 2$ premier, $k \in \{1, ..., p-1\}$. Montrer :
$$p \mid \binom{p}{k}.$$

On a : $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$, donc : $k!(p-k)!\binom{p}{k} = p!$.

Il est clair que $p \mid p!$, donc $p \mid k!(p-k)!\binom{p}{k}$.

Comme $k \in \{1, ..., p-1\}$, p est premier avec $1, ..., k-1$, donc d'après le cours , p est premier avec $k!$.

De même, p est premier avec $(p-k)!$.

D'après le théorème de Gauss, on conclut : $p \mid \binom{p}{k}$.

Méthode

Pour obtenir des congruences modulo 2, 4, 8

Essayer de séparer en cas selon la parité des nombres qui interviennent.

➟ **Exercice 13.4**

Exemple

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a+b+c$ soit pair. Montrer que abc est pair.

Raisonnons par l'absurde : supposons abc impair.

Alors, nécessairement, a, b, c sont tous les trois impairs, donc $a+b+c$, qui est la somme de trois nombres impairs, est impair, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre que abc est pair.

Méthode

Pour déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale d'un entier naturel a

Réduire a modulo 10.

➟ **Exercice 13.6**

Exemple

Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de $A = 2013^{2014^{2015}}$?

On a : $2013 \equiv 3 \quad [10]$, donc $A \equiv 3^{2014^{2015}} \quad [10]$.

On remarque : $3^4 \equiv 81 \equiv 1 \quad [10]$.

Cherchons la congruence de 2014^{2015} modulo 4.

On a : $2014^{2015} = (2 \cdot 1007)^{2015} = 2^{2015} 1007^{2015}$,

donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2014^{2015} = 4n$.

D'où : $A \underset{[10]}{\equiv} 3^{4n} = (3^4)^n \underset{[10]}{\equiv} 1^n = 1.$

On conclut que le dernier chiffre de l'écriture décimale de A est 1.

Méthode

Pour résoudre un système de congruences simultanées à une inconnue

Résoudre la première congruence, reporter dans la deuxième, etc.

➟ **Exercices 13.11, 13.12**

Exemple

Résoudre le système d'équations, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 3x \equiv 1 \quad [5] \\ 2x \equiv 5 \quad [7]. \end{cases}$$

1) Soit $x \in \mathbb{Z}$ convenant.

On a $3x \equiv 1 \quad [5]$, donc, en multipliant par 2, $2 \cdot 3x \equiv 2 \quad [5]$, puis, comme $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \quad [5]$, on obtient $x \equiv 2 \quad [5]$.

Il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2 + 5a$.

On a :

$$2x \equiv 5 \quad [7] \iff 4 + 10a \equiv 5 \quad [7] \iff 3a \equiv 1 \quad [7]$$
$$\implies 5 \cdot 3a \equiv 5 \quad [7] \iff 15a \equiv 5 \quad [7] \iff a \equiv 5 \quad [7].$$

Il existe donc $b \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 5 + 7b$, d'où :

$$x = 2 + 5(5 + 7b) = 27 + 35b.$$

2) Réciproquement, soient $b \in \mathbb{Z}$ et $x = 27 + 35b$. On a :

$$\begin{cases} 3x = 81 + 105b \equiv 1 \quad [5] \\ 2x = 54 + 70b \equiv 5 \quad [7] \end{cases}$$

donc x convient.

On conclut : $\mathcal{S} = \{27 + 35b\,;\ b \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque : On a choisi ici de séparer implication et réciproque, mais on aurait pu aussi raisonner par équivalences logiques successives.

Méthode

Pour obtenir des résultats portant sur les diviseurs d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$

Essayer d'utiliser la décomposition primaire de n.

➟ **Exercice 13.16**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On, note $n = \prod_{i=1}^{N} p_i^{r_i}$ la décomposition primaire de n, avec $N \in \mathbb{N}^*$, $p_1, ..., p_N$ premiers et deux à deux distincts, $r_1, ..., r_N \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$.

Pour qu'un entier $x \in \mathbb{N}^*$ divise n, il faut et il suffit qu'il existe $(s_1, ..., s_N) \in \mathbb{N}^N$ tel que :

$$x = \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i} \quad \text{et} \quad \big(\forall i \in \{1, ..., N\},\ \ 0 \leqslant s_i \leqslant r_i\big).$$

Chaque s_i prend $r_i + 1$ valeurs et les nombres x ainsi obtenus sont deux à deux distincts par unicité de la décomposition primaire de x, donc le nombre $d(n)$ de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ est :

$$d(n) = \prod_{i=1}^{N} (s_i + 1).$$

Énoncés des exercices

13.1 Exemple de nombre composé

Montrer que le nombre entier $A = 5^{45} + 4^{30}$ est composé, c'est-à-dire non premier.

13.2 Exemple de divisibilité

Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ 14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$.

13.3 Exemple de nombre premier satisfaisant une condition simple

Trouver tous les nombres premiers p tels que $p^2 + 2$ soit aussi premier.

13.4 Reste de la division euclidienne du carré d'un entier par 8

a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 est égal à 0, 1, ou 4.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. montrer que, si 8 divise $n - 7$, alors n ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

13.5 Exemple d'utilisation de congruences

Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $\quad 13 \mid 7x + 3y \iff 13 \mid 5x + 4y$.

13.6 Réduction d'un nombre par congruence

Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de $a = 7^{3^{8^4}}$?

13.7 Condition pour qu'une racine carrée d'une certaine fraction soit un entier

Trouver tous les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\sqrt{\dfrac{11n - 5}{n + 4}} \in \mathbb{N}$.

13.8 Exemple d'équation diophantienne du second degré, avec factorisation

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$.

13.9 Exemple d'équation diophantienne n'ayant aucune solution

Montrer que l'équation $x^2 - 3y^2 = 17$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

13.10 Condition de divisibilité par calculs modulo 5

Montrer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$: $24a^2 + 1 = b^2 \implies 5 \mid ab$.

13.11 Exemple de résolution d'un système de trois congruences simultanées à une inconnue

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruences : $\quad (\mathrm{S}) \quad \begin{cases} 5x \equiv 7 \ \ [11] & (1) \\ 7x \equiv 11 \ \ [5] & (2) \\ 11x \equiv 5 \ \ [7] & (3). \end{cases}$

13.12 Exemple de résolution d'un système de trois congruences simultanées à une inconnue

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruences : $\quad (\mathrm{S}) \quad \begin{cases} x \equiv 1 \ \ [6] & (1) \\ x \equiv 3 \ \ [10] & (2) \\ x \equiv 7 \ \ [15] & (3). \end{cases}$

13.13 Résolution d'un système d'équations sur le pgcd et le ppcm de deux entiers

a) Pour $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ fixé, résoudre le système d'équations, d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} x \wedge y = a \\ x \vee y = b. \end{cases}$$

b) Exemples : Résoudre (S) dans chacun des deux exemples suivants :

1) $a = 10,\ b = 22$ $\qquad$ *2)* $a = 8,\ b = 80$.

13.14 Utilisation de décompositions primaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose : $\big(\exists\, a \in \mathbb{N}^*,\ \ n = a^2\big)$ et $\big(\exists\, b \in \mathbb{N}^*,\ \ n = b^3\big)$.
Montrer : $\exists\, c \in \mathbb{N}^*,\ \ n = c^6$.

13.15 Nombres de Fermat

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$.
Montrer que les F_n $(n \in \mathbb{N})$ sont premiers entre eux deux à deux.

13.16 Utilisation de décompositions primaires

Soit $(a,\, b,\, c,\, n) \in (\mathbb{N}^*)^4$ tel que : $a \wedge b = 1$ et $ab = c^n$.
Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $a = \alpha^n$ et $b = \beta^n$.

13.17 Exemple de divisibilité : utilisation du petit théorème de Fermat

Démontrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $\quad 56\,786\,730 \mid x^{61}y - xy^{61}$.

Du mal à démarrer ?

13.1 Factoriser A en utilisant une identité remarquable.

13.2 *1re méthode : utilisation de congruences modulo* 14

Réduire $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ modulo 14, par calculs.

2è méthode : récurrence sur n

En notant $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$, montrer, par récurrence sur n, que $14 \mid u_n$. Pour passer de $14 \mid u_n$ à $14 \mid u_{n+1}$, exprimer u_{n+1} en faisant intervenir u_n.

3è méthode : reconnaître une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

13.3 Examiner le cas $p = 2$.

Si p est impair, passer modulo 3.

13.4 *a)* Séparer en cas : a pair, a impair.

b) Calculer tous les restes possibles de la division euclidienne de $a^2+b^2+c^2$ par 8, en utilisant le résultat de *a)*.

13.5 Utiliser des congruences modulo 13.

13.6 Réduire a modulo 10.

À cet effet, remarquer $7^4 \equiv 1 \quad [10]$, et réduire 3^{8^4} modulo 4.

13.7 Si n convient, déduire $n+4 \mid 11n-5$, puis $n+4 \mid 49$.

13.8 Transformer l'équation proposée de façon à factoriser.

13.9 Passer modulo 3.

13.10 Remarquer que, si $24a^2 + 1 = b^2$, alors, modulo 5 : $a^2 + b^2 \equiv 1$.

Calculer tous les x^2 modulo 5, pour $x \in \mathbb{Z}$, puis tous les $a^2 + b^2$ modulo 5 pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

13.11 Résoudre (1), puis reporter le résultat dans (2), et, enfin, reporter dans (3).

13.12 Résoudre (1), puis reporter le résultat dans (2), et, enfin, reporter dans (3).

13.13 Si $a \nmid b$, montrer que (S) n'a pas de solution.

Si $a \mid b$, noter $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ac$.

Pour $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$, considérer $d = x \wedge y$, et $(X, Y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x = dX$, $y = dY$, $X \wedge Y = 1$.

Exprimer le résultat demandé, à l'aide de X, Y.

13.14 Considérer la décomposition primaire de n.

13.15 Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$, en notant $k = n - m$, exprimer F_n en faisant intervenir F_m.

13.16 Utiliser les décompositions primaires de a, b, c.

13.17 Former la décomposition primaire de 56 786 730 et remarquer que c'est un produit de nombres premiers deux à deux distincts, tels que, si p est l'un de ces nombres premiers, alors $p - 1$ divise 60. Utiliser le petit théorème de Fermat.

Corrigés des exercices

13.1

On a, en utilisant une identité remarquable sur la somme de deux cubes :

$$\begin{aligned} A &= 5^{45} + 4^{30} = (5^{15})^3 + (4^{10})^3 \\ &= \underbrace{(5^{15} + 4^{10})}_{\text{noté } u} \underbrace{\left((5^{15})^2 - 5^{15} \cdot 4^{10} + (4^{10})^2\right)}_{\text{noté } v}. \end{aligned}$$

Il est clair que $u \in \mathbb{N}$ et $u \geqslant 2$.

D'autre part, $v \in \mathbb{N}$ et :

$$v = 5^{15}(5^{15} - 4^{10}) + (4^{10})^2 \geqslant (4^{10})^2 \geqslant 2.$$

On conclut que A est composé.

13.2

1re méthode : utilisation de congruences modulo 14

On a, modulo 14, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 3^{4n+2} + 5^{2n+1} &= 9 \cdot (3^4)^n + 5 \cdot (25)^n = 9 \cdot 81^n + 5 \cdot 25^n \\ &\underset{[14]}{\equiv} 9 \cdot (-3)^n + 5 \cdot (-3)^n = 14 \cdot (-3)^n \equiv 0, \end{aligned}$$

donc : $14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$.

2è méthode : récurrence sur n

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$.

• On a : $u_0 = 3^2 + 5 = 14$, donc $14 \mid u_0$.

• Supposons pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé : $14 \mid u_n$.

Exprimons u_{n+1} en faisant intervenir u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1} = 3^{4n+6} + 5^{2n+3} \\ &= 3^4 \cdot 3^{4n+2} + 5^{2n+3} = 3^4(u_n - 5^{2n+1}) + 5^{2n+3} \\ &= 3^4 u_n + 5^{2n+1}(5^2 - 3^4) = 3^4 u_n - 56 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 3^4 u_n - 4 \cdot 14 \cdot 5^{2n+1}. \end{aligned}$$

Comme $14 \mid u_n$, on déduit $14 \mid u_{n+1}$, ce qui prouve le résultat demandé , par récurrence sur n.

3è méthode : reconnaître une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3^{4n+1} + 5^{2n+1} = 9 \cdot (3^4)^n + 5 \cdot (5^2)^n.$$

On reconnaît le terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique a pour solutions 3^4 et 5^2, donc c'est, avec une inconnue notée r, l'équation $r^2 - (3^4 + 5^2)r + 3^4 \cdot 5^2 = 0$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (3^4 + 5^2)u_{n+1} - 3^4 \cdot 5^2 u_n.$$

Montrons, par récurrence à deux pas sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $14 \mid u_n$.

• La propriété est vraie pour $n = 0$, car $u_0 = 3^2 + 5 = 14$.

• La propriété est vraie pour $n = 1$, car :

$$u_1 = 3^6 + 5^3 = 729 + 125 = 854 = 14 \cdot 61.$$

• Si $14 \mid u_n$ et $14 \mid u_{n+1}$, alors, d'après l'expression de u_{n+2} en fonction de u_n et u_{n+1}, on a : $14 \mid u_{n+2}$.

Ceci montre le résultat demandé, par récurrence sur n, à deux pas.

13.3

1) Si p est pair, alors, comme p est premier, $p = 2$, donc $p^2 + 2 = 6$, qui n'est pas premier.

2) Supposons p impair. Passons modulo 3.

• Si $p \equiv 0 \quad [3]$, alors, comme p est premier, $p = 3$, donc $p^2 + 2 = 11$, qui est premier.

• Si $p \equiv \pm 1 \quad [3]$, alors, modulo 3, $p^2 + 2 \equiv 1 + 2 = 3 \equiv 0$, donc, comme $p^2 + 2$ est premier, $p^2 + 2 = 3$, $p = 1$, exclu.

On conclut qu'il y a un nombre premier p et un seul convenant, c'est $p = 3$.

13.4

a) • Si a est pair, alors $4 \mid a^2$, donc le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 est à 0 ou 4.

• Si a est impair, il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2b + 1$, et on a

$$a^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 4b(b+1) + 1.$$

Comme $b(b+1)$ est pair, car b ou $b+1$ est pair, on en déduit que le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 est 1.

b) Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $n = a^2 + b^2 + c^2$. Le reste r de la division euclidienne de n par 8 est donc parmi les sommes de trois nombres pris parmi $0, 1, 4$ (réduits modulo 8), donc $r \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, donc $r \neq 7$.

13.5

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, en utilisant des congruences modulo 13 :

$$\begin{aligned} &13 \mid 7x + 3y \iff 7x + 3y \equiv 0 \underset{2 \wedge 13 = 1}{\iff} 2(7x + 3y) \equiv 0 \\ &\iff 14x + 6y \equiv 0 \iff x + 6y \equiv 0 \underset{5 \wedge 13 = 1}{\iff} 5(x + 6y) \equiv 0 \\ &\iff 5x + 30y \equiv 0 \iff 5x + 4y \equiv 0 \iff 13 \mid 5x + 4y. \end{aligned}$$

13.6

Il s'agit de trouver la classe de a modulo 10.

On a, modulo 10 : $7^2 = 49 \equiv -1$,

donc $7^4 = (7^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1$.

On va donc chercher la classe de 3^{8^4} modulo 4.

On a, modulo 4 : $3^2 = 9 \equiv 1$,

donc, modulo 4 : $3^{8^4} = 3^{8^3 \cdot 8} = (3^2)^{8^3 \cdot 4} \equiv 1^{8^3 \cdot 4} = 1$.

Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que : $3^{8^4} = 4k + 1$, d'où :

$$a = 7^{3^{8^4}} = 7^{4k+1} = (7^4)^k \cdot 7 \underset{[10]}{\equiv} 1^k \cdot 7 = 7.$$

On conclut : le dernier chiffre de l'écriture décimale de a est 7.

13.7

Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{\dfrac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N}$. On a alors : $n+4 \mid 11n-5$.

Mais : $11n - 5 = 11(n+4) - 49$, d'où : $n + 4 \mid 49$ et donc : $n + 4 \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(49) = \big\{-49, -7, -1, 1, 7, 49\big\}$, puis :

$$n \in \big\{-53, -11, -5, -3, 3, 45\big\}.$$

On teste tous les cas, par exemple sous la forme d'un tableau :

n	-53	-11	-5	-3	3	45
$\dfrac{11n-5}{n+4}$	12	18	60	–38	4	10

On conclut, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\sqrt{\dfrac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N} \iff n = 3$.

Ainsi, il existe un $n \in \mathbb{N}$ et un seul convenant, c'est $n = 3$.

13.8

Utilisons la mise sous forme canonique d'un trinôme :

$$9y^2 - 39y + 40 = \left(3y - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

d'où :

$$\begin{aligned} & x^2 = 9y^2 - 39y + 40 \\ \iff\quad & x^2 = \left(3y - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ \iff\quad & 4x^2 = (6y - 13)^2 - 9 \\ \iff\quad & (6y - 13)^2 - 4x^2 = 9 \\ \iff\quad & (6y - 13 - 2x)(6y - 13 + 2x) = 9 \end{aligned}$$

$$\iff \quad \exists\,(u,v)\in\mathbb{Z}^2,\quad \begin{cases} 6y-13-2x=u \\ 6y-13+2x=v \\ uv=9 \end{cases}$$

$$\iff \quad \exists\,(u,v)\in\mathbb{Z}^2,\quad \begin{cases} 2(6y-13)=u+v \\ 4x=v-u \\ uv=9 \end{cases}$$

$$\iff \exists\,(u,v)\in\mathbb{Z}^2,\begin{cases} x=\dfrac{v-u}{4} \\ y=\dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{u+v}{2}+13\Big)=\dfrac{u+v+26}{12} \\ uv=9 \end{cases}$$

De plus : $\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(9)=\{-9,\,-3,\,-1,\,1,\,3,\,9\}$

On consigne les résultats dans un tableau, en ne gardant que les cas pour lesquels x et y sont entiers :

u	-9	-3	-1	1	3	9
v	-1	-3	-9	9	3	1
x	•	•	•	2	•	-2
y	•	•	•	3	•	3

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est donc

$$\{(2,3),\,(-2,3)\}.$$

On peut contrôler ces résultats en reportant dans l'équation de l'énoncé.

13.9

Utilisons des congruences modulo 3.

Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ une solution.

On a alors, modulo 3 : $\quad x^2=3y^2+17\equiv 17\equiv -1.$

Mais : $\begin{cases} x\equiv 0 \implies x^2\equiv 0 \\ x\equiv \pm 1 \implies x^2\equiv 1. \end{cases}$

Ainsi : $\forall x\in\mathbb{Z},\quad x^2\equiv 0$ ou 1, d'où une contradiction.

Ceci montre que l'équation $x^2-3y^2=17$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

13.10

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $24a^2+1=b^2$.

Calculons les carrés d'entiers modulo 5, par exemple sous forme d'un tableau :

x	0	±1	±2
x^2	0	1	-1

Ainsi : $\forall x\in\mathbb{Z},\quad x^2\underset{[5]}{\equiv}-1$ ou 0 ou 1.

D'autre part, modulo 5 : $b^2=24a^2+1\equiv -a^2+1$,

donc $a^2+b^2\equiv 1$.

Calculons les sommes de deux carrés modulo 5, par exemple sous forme d'un tableau, donnant a^2+b^2 modulo 5 à partir de a^2 modulo 5 et de b^2 modulo 5 :

a^2 \ b^2	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

On a donc, modulo 5 :

$$a^2+b^2\equiv 1 \implies \left(\begin{cases} a^2\equiv 0 \\ b^2\equiv 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2\equiv 1 \\ b^2\equiv 0 \end{cases}\right).$$

Enfin, d'après le tableau des carrés modulo 5, on a :

$$\forall x\in\mathbb{Z},\quad \big(x^2\equiv 0 \implies x\equiv 0\big).$$

d'où : $a\equiv 0$ ou $b\equiv 0$, donc $ab\equiv 0$, c'est-à-dire : $5\mid ab$.

13.11

1) Résolvons la première équation (1) de (S).

Soit $x\in\mathbb{Z}$. On cherche l'inverse de 5 modulo 11. Cet inverse existe car $5\wedge 11=1$. On remarque : $(-2)\cdot 5=-10\equiv 1\ [11]$, donc l'inverse de 5 modulo 11 est -2. D'où :

$$(1)\quad 5x\equiv 7\ [11] \iff (-2)5x\equiv(-2)7\ [11]$$
$$\iff x\equiv -3\ [11] \iff \exists\,a\in\mathbb{Z},\quad x=-3+11a.$$

2) On reporte ce résultat dans la deuxième équation (2) de (S), et on raisonne comme ci-dessus (en commençant par simplifier les nombres modulo 5) :

$$(2)\quad 7x\equiv 11\ [5] \iff 2x\equiv 1\ [5] \iff 2(-3+11a)\equiv 1\ [5]$$
$$\iff 22a\equiv 7\ [5] \iff 2a\equiv 2\ [5] \underset{3\wedge 5=1}{\iff} 3(2a)\equiv 3\cdot 2\ [5]$$
$$\iff a\equiv 1\ [5] \iff \exists\,b\in\mathbb{Z},\quad a=1+5b.$$

On obtient : $x=-3+11a=-3+11(1+5b)=8+55b$.

3) De même, on reporte dans l'équation (3) de (S) :

$$(3)\quad 11x\equiv 5\ [7] \iff 4x\equiv 5\ [7] \iff 4(8+55b)\equiv 5\ [7]$$
$$\iff 220b\equiv -27\ [7] \iff 3b\equiv 1\ [7]$$
$$\underset{5\wedge 7=1}{\iff} 5(3b)\equiv 5\cdot 1\ [7] \iff b\equiv 5\ [7]$$
$$\iff \exists\,k\in\mathbb{Z},\quad b=5+7k.$$

On obtient : $x=8+55b=8+55(5+7k)=283+385k$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{283+385k\,;\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

13.12

1) Résolvons la première équation (1) de (S). On a :

$$(1)\quad x\equiv 1\ [6] \iff \exists\,a\in\mathbb{Z},\quad x=1+6a.$$

2) Reportons dans la deuxième équation (2) de (S) :

$$(2)\quad x\equiv 3\ [10] \iff 1+6a\equiv 3\ [10]$$
$$\iff 6a\equiv 2\ [10] \iff 3a\equiv 1\ [5].$$

Comme $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \ \ [5]$, 3 est inversible modulo 5 et son inverse est 2, d'où :

$$3a \equiv 1 \ \ [5] \iff 2(3a) \equiv 2 \cdot 1 \ \ [5]$$
$$\iff a \equiv 2 \ \ [5] \iff \exists\, b \in \mathbb{Z}, \quad a = 2 + 5b.$$

On obtient : $x = 1 + 6a = 1 + 6(2 + 5b) = 13 + 30b$.

3) Reportons dans la troisième équation (3) de (S) :

$$(3) \quad x \equiv 7 \ \ [15] \iff 13 + 30b \equiv 7 \ \ [15]$$
$$\iff 30b \equiv -6 \ \ [15] \iff 0 \equiv -6 \ \ [15], \quad \text{impossible.}$$

On conclut que (S) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

13.13

a) • Si $a \not| \; b$, alors, comme, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $x \wedge y \mid x \vee y$, (S) n'a pas de solution.

• Supposons $a \mid b$. Il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ac$.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Notons $d = x \wedge y$, $(X, Y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x = dX$, $y = dY$, $X \wedge Y = 1$. On a :

$$\text{(S)} \begin{cases} x \wedge y = a \\ x \vee y = b \end{cases} \iff \begin{cases} d = a \\ dXY = b \end{cases} \iff \begin{cases} d = a \\ XY = c. \end{cases}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\mathcal{S} = \Big\{(aX, aY) \,;\; X \mid c,\ Y = \frac{c}{X},\ X \wedge Y = 1\Big\}.$$

b) 1) $a = 10, \quad b = 22$:

Comme $a \not| \; b$, on a : $\mathcal{S} = \varnothing$.

2) $a = 8, \quad b = 80$:

On a : $8 \mid 80, \quad 80 = 8 \cdot 10, \quad c = 10$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \Big\{(8X, 8Y) \,;\; X \mid 10,\ Y = \frac{10}{X},\ \ X \wedge Y = 1\Big\} \\
&= \Big\{(8X, 8Y) \,;\; \begin{cases} X = 1 \\ Y = 10 \end{cases} \text{ou} \ \begin{cases} X = 2 \\ Y = 5 \end{cases} \text{ou} \\
&\qquad\qquad \begin{cases} X = 5 \\ Y = 2 \end{cases} \text{ou} \ \begin{cases} X = 10 \\ Y = 1 \end{cases} \Big\} \\
&= \big\{(8,\, 80),\ (16, 40),\ (40, 16),\ (80, 8)\big\}.
\end{aligned}$$

13.14

Notons $n = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\alpha_k}$ la décomposition primaire de n.

Puisqu'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = a^2$, on a :

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad 2 \mid \alpha_k.$$

Puisqu'il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = b^3$, on a :

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad 3 \mid \alpha_k.$$

Comme $2 \wedge 3 = 1$, il en résulte : $\quad \forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad 6 \mid \alpha_k$.

Ainsi, pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $\beta_k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_k = 6\beta_k$.

On a alors, en notant $c = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\beta_k}$:

$$n = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^{N} p_k^{6\beta_k} = \Big(\prod_{k=1}^{N} p_k^{\beta_k}\Big)^6 = c^6.$$

13.15

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$, et $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur commun à F_m et F_n. Notons $k = n - m$.

On a : $\ F_n = (2^{2^m})^{2^k} + 1 = (F_m - 1)^{2^k} + 1$.

En développant par la formule du binôme de Newton, il en résulte : $F_m \mid F_n - 2$.

On déduit : $d \mid 2$.

mais, d'autre part, F_m et F_n sont impairs, d'où $d = 1$, et finalement : $F_m \wedge F_n = 1$.

13.16

Considérons les décompositions primaires de a, b, c :

$$a = \prod_{i=1}^{N} p_i^{r_i},\ b = \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i},\ c = \prod_{i=1}^{N} p_i^{t_i}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \ldots, p_N$ sont premiers et deux à deux distincts, et les exposants sont dans $\mathbb{N}$.

D'une part, comme $a \wedge b = 1$, on a :

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad (r_i = 0 \ \text{ ou } \ s_i = 0).$$

D'autre part : $\ \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad (n \mid r_i \ \text{ et } \ n \mid s_i)$.

Il existe donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_N,\ \beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad (r_i = n\alpha_i \ \text{ et } \ s_i = n\beta_i).$$

En notant $\ \alpha = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}\ $ et $\ \beta = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\beta_i}$, on a :

$$(\alpha,\, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad a = \alpha^n, \quad b = \beta^n.$$

13.17

On forme d'abord la décomposition primaire du nombre de gauche dans l'énoncé :

$$56\,786\,730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61.$$

Soit p l'un de ces facteurs premiers.

Alors : $p - 1 \in \{1,\, 2,\, 4,\, 6,\, 10,\, 12,\, 30,\, 60\}$, donc $p - 1 \mid 60$.

D'après le petit théorème de Fermat, on a, puisque p est premier, pour tout $a \in \mathbb{Z}$ tel que p ne divise pas a : $a^{p-1} \equiv 1 \ \ [p]$. Comme $p - 1 \mid 60$, il en résulte : $a^{60} \equiv 1 \ \ [p]$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

• Si $p \mid x$ ou $p \mid y$, alors $p \mid x^{61}y - xy^{61}$.

• Supposons $p \not| \; x$ et $p \not| \; y$. Alors, comme on l'a vu plus haut : $x^{60} \equiv 1 \ \ [p]$ et $y^{60} \equiv 1 \ \ [p]$, d'où :

$$x^{61}y - xy^{61} = xy(x^{60} - y^{60}) \equiv xy(1 - 1) = 0 \ \ [p].$$

Ceci montre : $p \mid x^{61}y - xy^{61}$.

Ainsi, les facteurs premiers p considérés divisent $x^{61}y - xy^{61}$, donc leur produit le divise aussi et on conclut :

$$56\,786\,730 \mid xy^{61} - xy^{61}.$$

Vrai ou Faux ?

13.1 Pour tous a, b, $c \in \mathbb{Z}$, si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors $c \mid (a+b)$. V F

13.2 Pour tous a, b, $c \in \mathbb{Z}$, si $a \mid c$ et $b \mid c$, alors $(ab) \mid c$. V F

13.3 Si un entier a divise un produit de deux entiers bc, alors a divise b ou c. V F

13.4 Pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$, si $a \mid (bc)$ et si $a \wedge b = 1$, alors $a \mid c$. V F

13.5 Si un entier est impair, alors son carré est congru à 1 modulo 8. V F

13.6 Le produit du pgcd par le ppcm de trois nombres entiers est égal au produit de ces trois nombres. V F

13.7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 5$, le nombre $n^2 - 9$ n'est pas premier. V F

13.8 Soient $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geqslant 2$, p, q deux nombres premiers distincts.
Si $p \mid a$ et $q \mid a$, alors $(pq) \mid a$. V F

13.9 On a, pour tout $(a, b, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$: $a \equiv b \quad [n] \implies a^2 \equiv b^2 \quad [n^2]$. V F

13.10 Le petit théorème de Fermat dit que, pour tous $a, p \in \mathbb{N}^*$ tels que p ne divise pas a, on a $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ si et seulement si p est premier. V F

Vrai ou Faux, les réponses

13.1 C'est un résultat du cours. **V** F

13.2 Contrexemple : $a = b = c = 2$. V **F**

Il y a eu oubli de l'hypothèse : a et b sont premiers entre eux.

13.3 Contrexemple : $a = 4,\ b = 2,\ c = 2$. V **F**

Il y a eu oubli de l'hypothèse : a est premier.

13.4 C'est un résultat du cours, le théorème de Gauss. **V** F

13.5 On a, pour tout $a \in \mathbb{Z}$: $(2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$ et $a(a+1)$ est pair, car a ou $a+1$ est pair, donc $(2a+1)^2$ est congru à 1 modulo 8. **V** F

13.6 Contrexemple : $a = 6,\ b = 10,\ c = 15$. V **F**

On a alors : $\operatorname{pgcd}(a,b,c) \cdot \operatorname{ppcm}(a,b,c) = 1 \cdot 30 = 30$ et $abc = 900$.

13.7 On a : $n^2 - 9 = (n-3)(n+3)$ et $n - 3 \geqslant 2,\ n + 3 \geqslant 2,$ donc $n^2 - 9$ admet au moins un diviseur autre que 1 et lui-même, donc $n^2 - 9$ n'est pas premier. **V** F

13.8 C'est un résultat du cours. **V** F

13.9 Contrexemple : $a = 5,\ b = 1,\ c = 4$. V **F**

On a alors : $5 \equiv 1 \ \ [4]$, mais on n'a pas $25 \equiv 1 \ \ [16]$.

13.10 Il y a seulement une implication et non une équivalence logique. V **F**

Si p est premier et si p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \mod 1 \ \ [p]$.

Structures algébriques usuelles

Chapitre 14

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Étude d'une loi interne
- Montrer qu'un ensemble muni d'une loi interne est un groupe ou un sous-groupe d'un groupe
- Montrer qu'un ensemble muni de deux lois internes est un anneau ou un corps
- Calculs dans un ensemble muni d'une loi interne, dans un groupe, dans un anneau, dans un corps.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions de : loi interne, commutativité, associativité, élément neutre, élément symétrisable, symétrique, distributivité
- Définitions de : groupe, sous-groupe
- Définitions de : anneau, corps
- Les exemples usuels : anneau $\mathbb{Z}$, corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, pour les lois usuelles.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour effectuer des calculs portant sur une loi interne qui n'est pas une loi usuelle

Bien détailler chaque étape de raisonnement ou de calcul, car les automatismes de calcul acquis dans les classes antérieures sur les opérations usuelles sur les nombres ne sont pas, a priori, valables pour des lois internes quelconques.

➟ **Exercices 14.1, 14.12**

Exemple

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$. On suppose :

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad (a*b)*a = b.$$

Montrer :

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad a*(b*a) = b.$$

Soit $(a,b) \in E^2$.

On a, en appliquant l'hypothèse à (b,a) : $a = (b*a)*b$, d'où : $a*(b*a) = \big((b*a)*b\big)*(b*a)$.

Puis, en appliquant l'hypothèse à $(b*a, b)$: $\big((b*a)*b\big)*(b*a) = b$,

et on conclut : $a*(b*a) = b$.

Méthode

Pour montrer qu'une loi interne est commutative, ou est associative, ou admet un neutre, ou que certains éléments admettent un symétrique

Revenir aux définitions.

➟ **Exercices 14.1, 14.12**

Exemple

Soient E un ensemble, $u \in E$, $*$ une loi interne dans E telle que :

$$\begin{cases} (1) \ \ \forall a \in E, \quad u*a = a \\ (2) \ \ \forall (a,\,b,\,c) \in E^3, \\ \qquad\quad a*(b*c) = c*(b*a). \end{cases}$$

Montrer : $\forall a \in E, \quad a*u = a$

et en déduire que $*$ est commutative et associative.

• On a, pour tout $a \in E$: $\begin{cases} u*(u*a) \underset{(1)}{=} u*a \underset{(1)}{=} a \\ u*(u*a) \underset{(2)}{=} a*(u*u) \underset{(1)}{=} a*u, \end{cases}$

d'où : (3) $\quad a*u = a$.

• On a, pour tout $(a,b) \in E^2$:

$$a*b \underset{(1)}{=} u*(a*b) \underset{(2)}{=} b*(a*u) \underset{(3)}{=} b*a,$$

d'où : (4) $\quad a*b = b*a$, donc $*$ est commutative.

• On a, pour tout $(a,\,b,\,c) \in E^3$:

$$(a*b)*c \underset{(4)}{=} c*(a*b) \underset{(4)}{=} c*(b*a) \underset{(2)}{=} a*(b*c),$$

donc $*$ est associative.

Méthode

Pour montrer qu'une loi interne dans un ensemble E n'est pas commutative

Trouver $(a, b) \in E^2$ tel que $a * b \neq b * a$.

➟ **Exercice 14.2**

Exemple

Montrer que la loi interne $*$ définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = x + 2y$$

n'est pas commutative.

On a, par exemple :

$$1 * 0 = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \quad \text{et} \quad 0 * 1 = 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$

donc $1 * 0 \neq 0 * 1$, et on conclut que la loi $*$ n'est pas commutative.

Méthode

Pour montrer qu'une loi interne dans un ensemble E n'est pas associative

Trouver $(a, b, c) \in E^3$ tel que $(a * b) * c \neq a * (b * c)$.

➟ **Exercice 14.1**

Exemple

Montrer que la soustraction dans $\mathbb{R}$ n'est pas associative.

On a, par exemple : $0 - (1 - 1) = 0$ et $(0 - 1) - 1 = -2$,
donc $0 - (1 - 1) \neq (0 - 1) - 1$,
et on conclut que la soustraction dans $\mathbb{R}$ n'est pas associative.

Méthode

Pour simplifier par un élément dans un calcul, par exemple, pour passer de $a * x = a * y$ à $x = y$

Essayer de :

- montrer que a admet un symétrique a^{-1} et composer par a^{-1} à gauche
- montrer que l'application $\gamma_a : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto a * x$ est injective.

Exemple

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\cdot$ associative, admettant un neutre e, et $a \in E$ tel que $a^2 = e$.
Soit $(x, y) \in E^2$ tel que : $axa = aya$.
Montrer : $x = y$.

On a, en multipliant à gauche par a et en multipliant à droite par a : $a(axa)a = a(aya)a$, c'est-à-dire $a^2xa^2 = a^2ya^2$, d'où $exe = eye$, puis $x = y$.

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble E muni d'une loi $*$ est un groupe

Ne pas oublier de montrer que $*$ est interne dans E.

- Si la loi $*$ n'est pas une loi usuelle, revenir à la définition d'un groupe : montrer que $*$ est associative, que E admet un neutre pour $*$, et que tout élément de E admet un symétrique pour $*$.
- Si la loi $*$ est une loi usuelle, essayer de montrer que $(E, *)$ est un sous-groupe d'un groupe usuel $(G, *)$: montrer que $E \subset G$, que le neutre de $(G, *)$ est dans E, que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $x * y \in E$, et que, pour tout $x \in E$, le symétrique x^{-1} de x dans G est dans E.

➟ **Exercices 14.2, 14.7, 14.8**

Exemple

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\cdot$ associative et admettant un neutre e.
On note
$$G = \{x \in E\,;\ \exists x' \in E,\ xx' = x'x = e\}.$$
Montrer que $\cdot$ est interne dans G et que $(G, \cdot)$ est un groupe.

• Soient $x, y \in G$.
Il existe $x', y' \in E$ tels que : $xx' = x'x = e$ et $yy' = y'y = e$.
On a : $\begin{cases} (xy)(y'x') = x(yy')x' = xex' = xx' = e \\ (y'x')(xy) = y'(x'x)y = y'ey = y'y = e, \end{cases}$
donc : $xy \in G$.
Ainsi, $\cdot$ est interne dans G.

• Comme $ee = e$, on a : $e \in G$.

• On a : $\forall x \in G$, $\big(xe = x$ et $ex = x\big)$, donc e est neutre pour $\cdot$ dans G.

• Soit $x \in G$. Il existe $x' \in E$ tel que $xx' = x'x = e$.
On a alors $x'x = xx' = e$, donc $x' \in G$.
Ainsi, tout élément de G admet un symétrique pour $\cdot$ dans G.

On conclut que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Méthode

Pour montrer qu'une partie H d'un groupe $(G, \cdot)$ est un sous-groupe de G

Essayer de revenir à la définition de sous-groupe : montrer que $H \subset G$, que le neutre de G est dans H, que, pour tout $(x, y) \in H^2$, $xy \in H$, et que, pour tout $x \in H$, le symétrique x^{-1} de x dans G est dans H

➟ **Exercices 14.4, 14.5, 14.8**

Exemple

Soient $(G, \cdot)$ un groupe, $H \subset G$.

On suppose que $\cdot$ est interne dans H et que $(H, \cdot)$ est un groupe.

Montrer que H est un sous-groupe de G.

Notons e le neutre de G, f le neutre de H.

• Puisque f est neutre dans H, on a $ff = f$, et, puisque e est neutre dans G, on a $ef = f$. D'où $ff = ef$, puis, en multipliant à gauche par le symétrique de f dans G, on déduit $f = e$.
Ceci montre : $e \in H$.

• Par hypothèse, $\cdot$ est interne dans H.

• Soit $x \in H$.
Puisque H est un groupe, il existe $y \in H$ tel que $xy = f$.
On a alors, en notant x^{-1} le symétrique de x dans G :
$xx^{-1} = e = f = xy$, donc $xx^{-1} = xy$,
d'où, en multipliant à gauche par x^{-1} : $x^{-1} = y$.
Ceci montre : $\forall x \in H, \ x^{-1} \in H$.

On conclut que H set un sous-groupe de G.

Méthode

Pour manipuler des sous-groupes

Utiliser la définition de sous-groupe d'un groupe.

➟ **Exercices 14.4, 14.5**

Exemple

Soient $(G, \cdot)$ un groupe, H, H' deux sous-groupes de G.

Montrer que $H \cap H'$ est un sous-groupe de G.

• On, a : $e \in H$ et $e \in H'$, donc $e \in H \cap H'$.

• Soient $x, y \in H \cap H'$.
On a alors $xy \in H$ et $xy \in H'$, donc $xy \in H \cap H'$.

• Soit $x \in H \cap H'$. On a $x \in H$ et $x \in H'$, donc $x^{-1} \in H$ et $x^{-1} \in H'$, donc $x^{-1} \in H \cap H'$.

On conclut que $H \cap H'$ est un sous-groupe de G.

Méthode

Pour utiliser une hypothèse portant sur tout élément d'un anneau

Penser à appliquer cette hypothèse à x, à y, à $x + y$, à $1 + x$,...

➟ **Exercice 14.9**

Exemple

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que :
$\forall (x, y) \in A^2,$
$$\big(xy = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0)\big).$$
Montrer :
$$\forall (a, b) \in A^2, \quad (ab = 1 \implies ba = 1).$$

Soit $(a, b) \in A^2$ tel que $ab = 1$.
On a :
$$a(ba - 1) = a(ba) - a = (ab)a - a = 1a - a = a - a = 0.$$
D'après l'hypothèse, il en résulte : $a = 0$ ou $ba - 1 = 0$.
Si $a = 0$, alors $1 = ab = 0b = 0$ et $ba = b0 = 0 = 1$.

Si $ba - 1 = 0$, alors $ba = 1$.

Énoncés des exercices

14.1 Exemple d'étude de loi interne

Soit $*$ la loi interne définie dans $\mathbb{R}$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = x + y + x^2y^2.$

a) Vérifier que $*$ est commutative.

b) La loi $*$ est-elle associative ?

c) Montrer que $\mathbb{R}$ admet un neutre pour $*$ et calculer ce neutre.

d) Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$(1) \quad 1 * x = 0 \qquad\qquad (2) \quad 1 * x = 1.$$

14.2 Exemple de groupe

On note $*$ la loi interne dans $G = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ définie, pour tous $(z, t), (z', t') \in G$ par :
$$(z, t) * (z', t') = \big(z + z',\ t + t' + \operatorname{Im}(\overline{z}z')\big).$$
Montrer que $(G, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

14.3 Calculs dans un groupe

Soient $(G, \cdot)$ un groupe, e son neutre, $a, b \in G$ tels que : $ba = ab^2$ et $ab = ba^2$.
Montrer : $a = b = e$.

14.4 La réunion de deux sous-groupes n'est qu'exceptionnellement un sous-groupe

Soient $(G, \cdot)$ un groupe, H, K deux sous-groupes de G.
Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si : $H \subset K$ ou $K \subset H$.

14.5 Opération sur deux sous-groupes d'un groupe

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour tous sous-groupes H, K de G, on note :

$$HK = \{hk\,;\ (h,k) \in H \times K\}.$$

Soient H, K deux sous-groupes de G. Montrer que les quatre propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) HK est un sous-groupe de G

(ii) KH est un sous-groupe de G

(iii) $HK \subset KH$

(iv) $KH \subset HK$.

14.6 Éléments d'ordre fini d'un groupe

Un élément x d'un groupe $(G, \cdot)$, de neutre e, est dit **d'ordre fini** si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$. Si x est d'ordre fini, le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$ est appelé m l'**ordre** de x.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, $(a, b) \in G^2$. Montrer :

a) si a, b, ab, sont d'ordre 2, alors $ab = ba$

b) si a est d'ordre fini, alors a^{-1} l'est aussi et a et a^{-1} ont le même ordre

c) si a est d'ordre fini, alors bab^{-1} l'est aussi, et a et bab^{-1} ont le même ordre

d) si ab est d'ordre fini, alors ba l'est aussi, et ab et ba ont le même ordre.

14.7 Transfert de la structure de groupe

a) Soient $(G, \cdot)$ un groupe, E un ensemble, $f : E \longrightarrow G$ une application bijective. On note $*$ la loi interne dans E définie par : $\forall x, y \in E,\quad x * y = f^{-1}\big(f(x)f(y)\big)$,

où f^{-1} désigne la bijection réciproque de f.

Démontrer que $(E, *)$ est un groupe.

On dit qu'il y a transfert de la structure de groupe, du groupe $(G, \cdot)$ sur $(E, *)$.

b) Exemple : On note $*$ la loi interne dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

14.8 Exemple de groupe et de sous-groupe

On note G l'ensemble des applications $f : [0\,; +\infty[\longrightarrow [0\,; +\infty[$, de classe C^1, telles que : $f' > 0,\ f(0) = 0,\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

a) Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

b) On note H l'ensemble des $f \in G$ telles que $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} x$.

Montrer que H est un sous-groupe de G et que $H \neq G$.

14.9 Anneaux booléiens

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On suppose : $\forall x \in A, \quad x^2 = x$.

a) Montrer : $\forall x \in A, \quad 2x = 0$.

b) Établir que A est commutatif.

14.10 Étude d'inversibilité dans un anneau

Soient A un anneau, $(a, b) \in A^2$. On suppose que ab est inversible à droite, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $(ab)x = 1$, et on suppose que ba n'est pas diviseur de zéro à gauche, c'est-à-dire que, pour tout $y \in A, \quad (ba)y = 0 \implies y = 0$.

Démontrer que a est inversible dans A.

14.11 Étude d'inverses dans un anneau

Soient A un anneau, $(a, b) \in A^2$. On note 1 le neutre de la deuxième loi de A. On suppose que a, b, $ab - 1$ sont inversibles dans A.

a) On note $c = ab - 1$.

Montrer que $a - b^{-1}$ est inversible dans A et que $(a - b^{-1})^{-1} = bc^{-1}$.

b) On note $d = a^{-1} - (a - b^{-1})^{-1}$. Montrer que d est inversible dans A et que $d^{-1} = -ca$.

14.12 Loi interne vérifiant une condition

Soit E un ensemble muni d'une loi interne notée multiplicativement, associative et telle qu'il existe $a \in E$ tel que : $\forall y \in E, \ \exists x \in E, \quad y = axa$.

a) Démontrer que $(E, \cdot)$ admet un neutre, noté e.

b) Établir que a est symétrisable et exprimer le symétrique a^{-1} de a.

14.13 Éléments nilpotents d'un anneau

Soit A un anneau. Un élément a de A est dit **nilpotent** si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

a) Soit $(a, b) \in A^2$. Montrer que, si a est nilpotent et si $ab = ba$, alors ab est nilpotent.

b) Soit $a \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - a$ est inversible dans A et exprimer $(1 - a)^{-1}$.

c) Soit $(a, b) \in A^2$. Montrer que, si a et b sont nilpotents et $ab = ba$, alors $a + b$ est nilpotent.

Du mal à démarrer ?

14.1 *a)* Immédiat.

b) Montrer que $*$ n'est pas associative en calculant $(x*y)*z$ et $x*(y*z)$ pour un choix de (x, y, z) assez simple, et en obtenant deux résultats différents.

14.2 Puisque G n'apparaît pas comme sous-groupe d'un groupe connu, pour montrer que G est un groupe, revenir à la définition, en étudiant successivement l'associativité, l'existence d'un neutre, l'existence d'un symétrique pour tout élément de G.

Pour montrer que $*$ n'est pas commutative, calculer $(z, t) * (z', t')$ et $(z', t') * (z, t)$ pour un choix assez simple, et en obtenant deux résultats différents.

14.3 Montrer, par exemple, $ba = (ba)(ab)$ et utiliser le fait que, dans un groupe, tout élément est simplifiable.

14.4 Un sens est évident.

Pour l'autre sens, raisonner par l'absurde.

14.5 Faire un cycle d'implications, par exemple :

$$(i) \implies (iii) \implies (ii) \implies (iv) \implies (i).$$

Utiliser la notion de sous-groupe, par sa définition.

14.6 *a)* Montrer $(ab)(ab) = (ba)(ab)$ puis composer à droite dans chaque membre par l'inverse de ab.

b) Montrer que, si $a^n = e$, alors $(a^{-1})^n = e$. Utiliser les rôles symétriques de a et a^{-1} pour montrer que a et a^{-1} sont de même ordre.

c) Si $a^n = e$, calculer $(bab^{-1})^n$.

d) Utiliser *c)*.

14.7 *a)* Pour montrer que $(E, *)$ est un groupe, revenir à la définition de groupe, en se ramenant, grâce à f, aux conditions sur G.

b) Utiliser $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3$.

14.8 *a)* Revenir à la définition de groupe, ou bien montrer que G est un sous-groupe du groupe des bijections de $[0\,;\,+\infty[$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) Se rappeler que, par définition, une application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 si et seulement si elle est dérivable et à dérivée continue. Pour l'associativité, utiliser l'associativité de la loi $\circ$ dans l'ensemble des applications de $[0\,;\,+\infty[$ dans $[0\,;\,+\infty[$.

c) Utiliser la définition d'un sous-groupe (ou une caractérisation). Se rappeler que $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} x$ signifie : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

14.9 *a)* Appliquer l'hypothèse à x et à $1+x$, où 1 désigne le neutre de la deuxième loi (notée multiplicativement) de A.

b) Appliquer l'hypothèse à x, à y, à $x+y$.

14.10 Calculer $ba(bxa - 1)$.

14.11 *a)* Montrer : $a - b^{-1} = cb^{-1}$, puis calculer $(a - b^{-1})^{-1}$ à partir de cette égalité. En effet, l'inverse d'une somme ou d'une différence (quand cet inverse existe) ne paraît pas simple tandis que l'inverse d'un produit (d'éléments inversibles) s'exprime simplement.

b) Calculer d et obtenir $d = -a^{-1}c^{-1}$, puis finir de façon analogue à la solution de la question *a)*.

14.12 *a)* Obtenir l'existence de $b \in E$ tel que : $a = aba$.

Pour $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $y = axa$; calculer $(ab)y$ et $y(ba)$.

b) Faire intervenir $b \in E$ tel que $a = aba$, comme en *a)*.

14.13 *a)* Soit $(a, b) \in A^2$ tel que $ab = ba$.

Montrer, par récurrence sur k : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ ab^k = b^k a$.

Déduire, par récurrence sur k :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (ab)^k = a^k b^k.$$

b) Se rappeler la formule sur une sommation géométrique.

c) Utiliser la formule du binôme de Newton.

Corrigés des exercices

14.1

a) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$y * x = y + x + y^2x^2 = x + y + x^2y^2 = x * y,$$

donc $*$ est commutative.

b) On a, par exemple :

$$(1 * 1) * (-1) = (1 + 1 + 1^21^2) * (-1) = 3 * (-1) = 3 + (-1) + 3^2(-1)^2 = 11,$$

$$1 * \big(1 * (-1)\big) = 1 * \big(1 + (-1) + 1^2(-1)^2\big) = 1 * 1 = 1 + 1 + 1^21^2 = 3 \neq 11,$$

donc $*$ n'est pas associative.

c) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 * x = x * 0 = 0$,

donc $\mathbb{R}$ admet un neutre pour $*$ et ce neutre est 0.

d) (1) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 * x = 0 \iff 1 + x + x^2 = 0,$$

et cette équation du second degré n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ puisque son discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ est < 0.

On conclut que l'équation $1*x = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

(2) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 * x = 1 \iff 1 + x + x^2 = 1 \iff x^2 + x = 0 \iff \big(x = -1 \;\text{ ou }\; x = 0\big).$$

On conclut que l'équation $1 * x = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, les réels -1 et 0.

14.2

Remarquer d'abord que $*$ est bien une loi interne dans $G = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

1) Associativité :

On a, pour tous (z, t), (z', t'), $(z'', t'') \in G$:

$$\big((z,t)*(z',t')\big)*(z'',t'') = \big(z+z',\, t+t'+\operatorname{Im}(\overline{z}z')\big)*(z'',t'')$$
$$= \Big((z+z')+z'',\; \big(t+t'+\operatorname{Im}\overline{z}z'\big)+t''+\operatorname{Im}\big((\overline{z+z'})z''\big)\Big)$$
$$= \Big(z+z'+z'',\; t+t'+t''+\operatorname{Im}(\overline{z}z')+\operatorname{Im}(\overline{z}z'')+\operatorname{Im}(\overline{z'}z'')\Big)$$

et

$$(z,t)*\big((z',t')*(z'',t'')\big) = (z,t)*\big(z'+z'',\, t'+t''+\operatorname{Im}(\overline{z'}z'')\big)$$
$$= \Big(z+(z'+z''),\; t+\big(t'+t''+\operatorname{Im}(\overline{z'}z'')\big)+\operatorname{Im}\big(\overline{z}(z'+z'')\big)\Big)$$
$$= \Big(z+z'+z'',\; t+t'+t''+\operatorname{Im}(\overline{z'}z'')+\operatorname{Im}(\overline{z}z')+\operatorname{Im}(\overline{z}z'')\Big).$$

On a donc :

$$\big((z,t) * (z',t')\big) * (z'',t'') = (z,t) * \big((z',t') * (z'',t'')\big)$$

et on conclut que $*$ est associative.

2) Neutre :

On a, pour tout $(z, t) \in G$:

$$(z,t) * (0,0) = (z,t) \qquad \text{et} \qquad (0,0) * (z,t) = (z,t),$$

donc $(0, 0)$ est neutre pour $*$.

3) Symétriques :

Soit $(z, t) \in G$. On a, pour tout $(z', t') \in G$:

$$\begin{cases} (z,t) * (z',t') = (0,0) \\ (z',t') * (z,t) = (0,0) \end{cases} \iff \begin{cases} \big(z+z',\; t+t'+\operatorname{Im}(\overline{z}z')\big) = (0,0) \\ \big(z'+z,\; t'+t+\operatorname{Im}(\overline{z'}z)\big) = (0,0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z+z' = 0 \\ t+t'+\operatorname{Im}(\overline{z}z') = 0 \\ t'+t+\operatorname{Im}(\overline{z'}z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = -z \\ t+t'+\operatorname{Im}(-|z|^2) = 0 \\ t'+t+\operatorname{Im}(-|z|^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z' = -z \\ t+t' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = -z \\ t' = -t. \end{cases}$$

Ceci montre que (z, t) admet un symétrique (et un seul) et que ce symétrique est $(-z, -t)$.

On conclut que $(G, *)$ est un groupe.

4) Commutativité :

On a :

$$\begin{cases} (1,0) * (\mathrm{i},0) = \big(1+\mathrm{i},\; 0+0+\operatorname{Im}(\overline{1}\,\mathrm{i}\big) = (1+\mathrm{i}, 1) \\ (\mathrm{i},0) * (1,0) = \big(\mathrm{i}+1,\; 0+0+\operatorname{Im}(\overline{\mathrm{i}}\,1)\big) = (1+\mathrm{i}, -1), \end{cases}$$

donc $(1, 0) * (\mathrm{i}, 0) \neq (\mathrm{i}, 0) * (1, 0)$,

et on conclut que $(G, *)$ n'est pas commutatif.

14.3

On a : $ba = ab^2 = (ab)b = (ba^2)b = (ba)(ab)$.

Comme ba est inversible dans G, il s'ensuit, en multipliant les deux membres par $(ba)^{-1}$ à gauche : $e = ab$.

On a alors $b = a^{-1}$, donc $ba = e$.

Ensuite : $e = ab = ba^2 = (ba)a = ea = a$,

et on a ainsi $a = e$ puis $b = a^{-1} = e$.

14.4

1) Si $H \subset K$ ou $K \subset H$, alors $H \cup K = K$ ou $H \cup K = H$, donc $H \cup K$ est un sous-groupe de G.

2) Réciproquement, supposons que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G. Raisonnons par l'absurde : supposons $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$. Il existe $a \in H$ tel que $a \notin K$, et il existe $b \in K$ tel que $b \notin H$.

Puisque $H \cup K$ est un sous-groupe de G et que a et b sont dans $H \cup K$, on a $ab \in H \cup K$, c'est-à-dire : $ab \in H$ ou $ab \in K$.

• Supposons $ab \in H$. Comme $b = a^{-1}(ab)$, que $a \in H$ et $ab \in H$ et que H est un sous-groupe de G, on déduit $b \in H$, contradiction.

• Supposons $ab \in K$. Comme $a = (ab)b^{-1}$, que $b \in K$ et $ab \in K$ et que K est un sous-groupe de G, on déduit $a \in K$, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde, montre : $H \subset K$ ou $K \subset H$.

14.5

(i) $\Longrightarrow$ *(iii)* :

Supposons que HK est un sous-groupe de G.

Soit $x \in HK$. Comme $x^{-1} \in HK$, il existe $(h,k) \in H \times K$ tel que $x^{-1} = hk$.

On a alors : $x = (x^{-1})^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$.

Ceci prouve : $HK \subset KH$.

(iii) $\Longrightarrow$ *(ii)* :

Supposons $HK \subset KH$.

• Il est clair que, en notant e le neutre de G, on a $e = ee \in KH$.

• Soit $x \in KH$. Il existe $(h,k) \in H \times K$ tel que $x = kh$.
On a alors : $x^{-1} = (kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK \subset KH$.

• Soient $x, y \in KH$. Il existe $(h,k) \in H \times K$, $(h',k') \in H \times K$ tels que $x = kh$ et $y = k'h'$.
Comme $hk' \in HK \subset KH$, il existe $(h'', k'') \in H \times K$ tel que $hk' = k''h''$, d'où :

$$xy = (kh)(k'h') = k(k''h'')h' = (kk'')(h''h') \in KH.$$

Ceci montre que KH est un sous-groupe de G.

(ii) $\Longrightarrow$ *(iv)* :

Se déduit de *(i)* $\Longrightarrow$ *(iii)* en échangeant H et K.

(iv) $\Longrightarrow$ *(i)* :

Se déduit de *(iii)* $\Longrightarrow$ *(ii)* en échangeant H et K.

On a montré : $(i) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (i)$.

Finalement, les quatre propriétés envisagées sont deux à deux équivalentes.

14.6

a) On a : $(ab)(ab) = (ab)^2 = e = b^2 = beb = ba^2b = (ba)(ab)$, d'où, en multipliant à droite par $(ab)^{-1}$: $ab = ba$.

b) Supposons a d'ordre fini et notons n son ordre.

On a : $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = e^{-1} = e$, donc a^{-1} est d'ordre fini et, en notant p son ordre, on a : $p \leqslant n$.

En échangeant les rôles de a et a^{-1} et, puisque $(a^{-1})^{-1} = a$, on obtient aussi $n \leqslant p$.

Finalement, a^{-1} est d'ordre fini, et de même ordre que a.

c) Supposons a d'ordre fini, et notons n son ordre.

On a : $(bab^{-1})^n = ba^nb^{-1} = beb^{-1} = e$, donc bab^{-1} est d'ordre fini et, en notant q son ordre, on a : $q \leqslant n$.

En échangeant les rôles de b et b^{-1}, on obtient aussi $n \leqslant q$.

Finalement, bab^{-1} est d'ordre fini, et de même ordre que a.

d) Remarquer : $ba = b(ab)b^{-1}$ et appliquer *c)*.

14.7

a) Remarquer, pour alléger les calculs, que, pour tout $(x,y) \in E^2$: $f(x * y) = f(x)f(y)$, et que, f étant bijective (donc injective), on a, pour tout $(a,b) \in E^2$,

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b,$$

ce qui permettra, dans certaines conditions, de simplifier par f.

1) Neutre :

En notant e le neutre de $(G, \cdot)$ et $\varepsilon = f^{-1}(e)$, on a $e = f(\varepsilon)$ et, pour tout $x \in E$:

$$\begin{cases} f(x * \varepsilon) = f(x)f(\varepsilon) = f(x)e = f(x) \\ f(\varepsilon * x) = f(\varepsilon)f(x) = ef(x) = f(x), \end{cases}$$

d'où, puisque f est injective : $x * \varepsilon = x$ et $\varepsilon * x = x$, ce qui montre que ε est neutre pour $*$ dans E.

2) Associativité :

On a, pour tout $(x,y,z) \in E^3$:

$$\begin{aligned} f\big((x*y)*z\big) &= f(x*y)f(z) = \big(f(x)f(y)\big)f(z) \\ &= f(x)\big(f(y)f(z)\big) = f(x)f(y*z) = f\big(x*(y*z)\big), \end{aligned}$$

d'où, puisque f est injective, $(x*y)*z = x*(y*z)$, ce qui montre que $*$ est associative dans E.

3) Symétriques :

Soit $x \in E$. En notant $t = f(x) \in G$, t^{-1} le symétrique de t dans le groupe $(G, \cdot)$ et $x' = f^{-1}(t^{-1})$, on a :

$$\begin{cases} f(x * x') = f(x)f(x') = tt^{-1} = e = f(\varepsilon) \\ f(x' * x) = f(x')f(x) = t^{-1}t = e = f(\varepsilon), \end{cases}$$

d'où, puisque f est injective, $x * x' = \varepsilon$ et $x' * x = \varepsilon$, ce qui montre que x admet un symétrique pour $*$ dans E.

Finalement, $(E, *)$ est un groupe.

b) D'après le cours, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ est bijective et son application réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \sqrt[3]{t}$. On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = f^{-1}\big(f(x) + f(y)\big).$$

D'après *a)*, on conclut que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

14.8

a) 1) Loi interne :

Soit $(f,g) \in G^2$. Alors, $g \circ f : [0\,; +\infty[\longrightarrow [0\,; +\infty[$ existe, $g \circ f$ est de classe C^1 par composition,
$(g \circ f)' = (g' \circ f)f' > 0$ car $f' > 0$ et $g' > 0$,
$(g \circ f)(0) = g\big(f(0)\big) = g(0) = 0$,
et $g \circ f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par composition de limites, puisque $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(y) \underset{y \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il en résulte $g \circ f \in G$ et donc $\circ$ est interne dans G.

2) Associativité :

La loi $\circ$ est associative dans l'ensemble des applications de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$, donc $\circ$ est associative dans G.

3) Neutre :

En notant $\varepsilon = \mathrm{Id}_{[0\,;+\infty[}$, ε est une application de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$, de classe C^1, $\varepsilon' = 1 > 0$, $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon(x) = x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\varepsilon \in G$.

On a : $\quad \forall f \in G, \quad f \circ \varepsilon = \varepsilon \circ f = f,$

donc ε est neutre pour $\circ$ dans G.

4) Symétriques :

Soit $f \in G$. Comme $f' > 0$, f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Puisque f est continue, strictement croissante, que $f(0) = 0$ et que $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective, f^{-1} est continue, $f^{-1}(0) = 0$ et $f^{-1}(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De plus, puisque f est de classe C^1 et que f' ne s'annule pas (car $f' > 0$), f^{-1} est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}} > 0$. On déduit : $f^{-1} \in G$.

Ainsi : $f^{-1} \in G$ et $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \varepsilon$.

On conclut que tout élément de G admet un symétrique pour la loi $*$ dans G.

D'après *1), 2), 3), 4)*, G est un groupe pour la loi $\circ$.

5) Commutativité :

Il est clair que les applications

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow [0\,;+\infty[, \quad x \longmapsto 2x$$

$$\varphi : [0\,;+\infty[\longrightarrow [0\,;+\infty[, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x} - 1$$

sont éléments de G.

On a, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\begin{cases} (\varphi \circ f)(x) = \varphi(2x) = \mathrm{e}^{\,2x} - 1 \\ (f \circ \varphi)(x) = f(\mathrm{e}^{\,x} - 1) = 2(\mathrm{e}^{\,x} - 1) = 2\,\mathrm{e}^{\,x} - 2. \end{cases}$$

En particulier : $(\varphi \circ f)(1) = \mathrm{e}^{\,2} - 1$ et $(f \circ \varphi)(1) = 2\,\mathrm{e} - 2$, donc $(\varphi \circ f)(1) \neq (f \circ \varphi)(1)$, d'où $\varphi \circ f \neq f \circ \varphi$.

Ceci montre que G n'est pas commutatif.

b) 1) Il est clair que $H \subset G$, par définition de H.

2) Le neutre ε de G est dans H car $\varepsilon(x) = x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} x$.

3) Soient $f, g \in H$. Remarquons que, puisque g est strictement croissante (car $g' > 0$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$) et que $g(0) = 0$, on a $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$. On a alors, pour $x > 0$:

$$\frac{(g \circ f)(x)}{x} = \frac{g\big(f(x)\big)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 = 1,$$

donc $(g \circ f)(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} x$, d'où $g \circ f \in H$.

4) Soit $f \in H$. Comme $f^{-1}(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $y \underset{y \longrightarrow +\infty}{\sim} f(y)$, on a, par composition de limites : $f^{-1}(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} f\big(f^{-1}(x)\big) = x$, d'où $f^{-1} \in H$.

On conclut : H est un sous-groupe de G.

5) L'application $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow [0\,;+\infty[, \ x \longmapsto 2x$ est élément de G (cf. *a) 5)*), mais n'est pas élément de H, car $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\not\sim} x$. Ceci montre : $H \neq G$.

14.9

a) Soit $x \in A$. En appliquant l'hypothèse à x et à $1+x$, on a : $x^2 = x$ et $(1+x)^2 = 1+x$. Alors :

$$(1+x)^2 = 1+x \iff 1+2x+x^2 = 1+x \iff x+x^2 = 0$$
$$\iff x+x = 0 \iff 2x = 0.$$

On conclut : $\forall x \in A, \quad 2x = 0.$

b) Soit $(x, y) \in A^2$. On applique l'hypothèse à x, à y, à $x+y$, d'où :

$$x+y = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + y + (xy + yx),$$

et donc : $xy + yx = 0.$

Mais, d'après *a)* : $xy + xy = 2xy = 0.$

On déduit, par soustraction : $xy = yx$, et on conclut que l'anneau A est commutatif.

14.10

Puisque ab est inversible à droite, il existe $x \in A$ tel que : $(ab)x = 1$. On a :

$$ba(bxa - 1) = ba(bxa) - ba = b(abx)a - ba = b1a - ba = 0.$$

Comme ba n'est pas diviseur de zéro à gauche, il en résulte : $bxa - 1 = 0$, donc $bxa = 1$.

Ainsi, $a(bx) = 1$ et $(bx)a = 1$, donc a est inversible dans A, et $a^{-1} = bx$.

14.11

a) On a : $a - b^{-1} = (ab-1)b^{-1} = cb^{-1}$. Comme c et b^{-1} sont inversibles dans A, par produit, cb^{-1} est inversible dans A, donc $a - b^{-1}$ est inversible dans A et :

$$(a - b^{-1})^{-1} = (cb^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}c^{-1} = bc^{-1}.$$

b) On a :

$$\begin{aligned} d = a^{-1} - (a - b^{-1})^{-1} &= a^{-1} - bc^{-1} \\ &= (a^{-1}c - b)c^{-1} = a^{-1}(c - ab)c^{-1} \\ &= a^{-1}\big((ab-1) - ab\big)c^{-1} = a^{-1}(-1)c^{-1} = -a^{-1}c^{-1}. \end{aligned}$$

Comme a^{-1} et c^{-1} sont inversibles dans A, par produit, $a^{-1}c^{-1}$ est inversible dans A, donc d est inversible dans A et :

$$\begin{aligned} d^{-1} = (-a^{-1}c^{-1})^{-1} &= -(a^{-1}c^{-1})^{-1} \\ &= -(c^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1} = -ca. \end{aligned}$$

14.12

a) • En appliquant l'hypothèse à a (à la place de y), il existe $b \in E$ tel que : $a = aba$.

Montrons que ab est neutre à gauche et que ba est neutre à droite.

• Soit $y \in E$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $y = axa$. On a :

$$\begin{cases} (ab)y = (ab)(axa) = (aba)(xa) = a(xa) = y \\ y(ba) = (axa)(ba) = (ax)(aba) = (ax)a = y. \end{cases}$$

Ceci montre que ab est neutre à gauche et que ba est neutre à droite.

• On a alors : $(ab)(ba) = ba$ car ab est neutre à gauche, et $(ab)(ba) = ab$ car ba est neutre à droite, d'où $ab = ba$.

En notant $e = ab = ba$, on conclut que e est neutre pour la loi de E.

b) On a : $\begin{cases} a(bab) = (ab)(ab) = ee = e \\ (bab)a = (ba)(ba) = ee = e, \end{cases}$

donc a est symétrisable et $a^{-1} = bab$.

14.13

a) Soit $a \in A$ nilpotent et $b \in A$ tel que $ab = ba$.

Montrons, par récurrence sur k : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad ab^k = b^k a$.

$*$ Pour $k = 1$, on a $ab = ba$ par hypothèse.

$*$ Si $ab^k = b^k a$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned} ab^{k+1} &= a(b^k b) = (ab^k)b = (b^k a)b \\ &= b^k(ab) = b^k(ba) = (b^k b)a = b^{k+1}a. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence sur k : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad ab^k = b^k a$.

Montrons, par récurrence sur k :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (ab)^k = a^k b^k.$$

$*$ Pour $k = 1$, on a trivialement $ab = ab$.

$*$ Si $(ab)^k = a^k b^k$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned} (ab)^{k+1} &= (ab)^k(ab) = (a^k b^k)(ab) = a^k(b^k a)b \\ &= a^k(ab^k)b = (a^k a)(b^k b) = a^{k+1}b^{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence sur k : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (ab)^k = a^k b^k$.

• Puisque a est nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. Puisque $ab = ba$, on a : $(ab)^n = a^n b^n = 0b^n = 0$, donc ab est nilpotent.

b) Puisque a est nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. On a alors :

$$\begin{cases} (1-a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = 1 - a^n = 1 \\ (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})(1-a) = 1 - a^n = 1, \end{cases}$$

donc $1 - a$ est inversible et

$$(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

c) Soient $a, b \in A$ nilpotents et tels que $ab = ba$.

Puisque a est nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

Puisque b est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $b^p = 0$.

Calculons $(a+b)^{n+p-1}$ en utilisant la formule du binôme de Newton, ce qui est licite puisque $ab = ba$:

$$(a+b)^{n+p-1} = \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{k} a^k b^{n+p-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+p-1}{k} a^k \underbrace{b^{n+p-1-k}}_{=0} + \sum_{k=n}^{n+p-1-k} \binom{n+p-1}{k} \underbrace{a^k}_{=0} b^{n+p-1-k} = 0,$$

donc $a + b$ est nilpotent.

Vrai ou Faux ?

14.1 Si deux éléments a, b d'un ensemble E muni d'une loi interne $*$ sont inversibles, alors $a * b$ est inversible et : $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. V F

14.2 Si un ensemble E muni d'une loi interne $*$ admet un neutre, alors E n'admet qu'un seul neutre. V F

14.3 L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est un groupe pour l'addition. V F

14.4 L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est un groupe pour l'addition. V F

14.5 L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est un groupe pour la multiplication. V F

14.6 Si X est un ensemble, A une partie de X, $\mathcal{S}_X$ l'ensemble des permutations de X, alors l'ensemble $\mathcal{G}_A$ des éléments f de $\mathcal{S}_X$ tels que, pour tout $a \in A$, $f(a) = a$, est un sous-groupe de $\mathcal{S}_X$. V F

14.7 $\mathbb{Z}$ est un corps. V F

14.8 Si deux éléments a, b d'un anneau commutent, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: V F

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

14.9 Tout élément d'un corps admet un inverse. V F

14.10 Pour tous éléments x, y, z d'un anneau A, si $xy = zx = 1$, où 1 est le neutre de la seconde loi de A, alors $y = z$. V F

Vrai ou Faux, les réponses

14.1 C'est un résultat du cours. **V**

14.2 Si e_1 et e_2 sont neutres, alors $e_1 * e_2 = e_2$ puisque e_1 est neutre, et $e_1 * e_2 = e_1$ puisque e_2 est neutre, donc $e_1 = e_2$. **V**

14.3 L'addition n'est pas interne dans $\mathbb{R}^*$, par exemple : $1 \in \mathbb{R}^*,\ -1 \in \mathbb{R}^*,\ 1+(-1) = 0 \notin \mathbb{R}^*$. **F**

14.4 L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ n'a pas de neutre pour l'addition, car, si e est neutre, alors $e + 1 = 1$, donc $e = 0,\ e \notin \mathbb{R}^*$. **F**

14.5 C'est un résultat du cours. **V**

14.6 Il est clair que le neutre de $\mathcal{S}_X$, qui est Id_X, est élément de $\mathcal{G}_A$, que, si $f, g \in \mathcal{G}_A$, alors, pour tout $a \in A$, $(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big) = f(a) = a$, donc $f \circ g \in \mathcal{G}_A$, et que, si $f \in \mathcal{G}_A$, alors, pour tout $a \in A$, $a = f^{-1}(a)$ car $f(a) = a$, donc $f^{-1} \in \mathcal{G}_A$.. **V**

14.7 On a $2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et 2 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$. **F**

14.8 C'est un résultat du cours. **V**

14.9 Il y a eu oubli de l'hypothèse : non nul. **F**

Le résultat correct est : tout élément non nul d'un corps admet un inverse.

14.10 On a : $y = 1y = (zx)y = z(xy) = z1 = z$. **V**

Chapitre 15

Algèbre des polynômes

Plan

On note :

K pour un corps commutatif,

$\mathbb{K}$ pour le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs dans $K[\mathrm{X}]$
- Calculs du quotient, du reste d'une division euclidienne dans $K[\mathrm{X}]$
- Étude des zéros d'un polynôme
- Localisation des zéros d'un polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$
- Calculs de fonctions symétriques de n nombres complexes
- Résolution de systèmes algébriques symétriques.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de $K[\mathrm{X}]$
- Division euclidienne dans $K[\mathrm{X}]$, divisibilité
- Définition des zéros d'un polynôme
- Définition des fonctions symétriques élémentaires de n nombres complexes, relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer une propriété portant sur des polynômes indexés par un entier naturel n

Essayer d'utiliser un raisonnement par récurrence.

➟ **Exercice 15.1**

Exemple

On note $P_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(\mathrm{X}) = \frac{1}{n!}\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\cdots(\mathrm{X}+n-1).$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} P_k(\mathrm{X}) = P_n(\mathrm{X}+1).$$

Récurrence sur n.

• La propriété est vraie pour $n = 0$ car :

$$\sum_{k=0}^{0} P_k(\mathrm{X}) = P_0(\mathrm{X}) = 1 \quad \text{et} \quad P_0(\mathrm{X}+1) = 1.$$

• Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} P_k(\mathrm{X}) &= \Big(\sum_{k=0}^{n} P_k(\mathrm{X})\Big) + P_{n+1}(\mathrm{X}) = P_n(\mathrm{X}+1) + P_{n+1}(\mathrm{X}) \\
&= \frac{1}{n!}(\mathrm{X}+1)\cdots(\mathrm{X}+n) + \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\cdots(\mathrm{X}+n) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{X}+1)\cdots(\mathrm{X}+n)\big((n+1)+\mathrm{X}\big) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{X}+1)\cdots(\mathrm{X}+n)\big(\mathrm{X}+(n+1)\big) = P_{n+1}(\mathrm{X}+1).
\end{aligned}$$

Ceci montre que la propriété est vraie pour $n+1$.

On conclut, par récurrence, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Pour trouver tous les polynômes satisfaisant une formule donnée

Essayer de :

- étudier le degré
- utiliser un argument de divisibilité.

➟ **Exercices 15.2, 15.7**

Exemple

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que :

$$P' + \mathrm{X}P = \mathrm{X}^2 + 1.$$

• Soit P convenant. Si $\deg(P) \geqslant 2$, alors $\deg(\mathrm{X}P) \neq \deg(P')$, donc $\deg(P' + \mathrm{X}P) = \deg(\mathrm{X}P) \geqslant 3$, contradiction avec $\deg(\mathrm{X}^2+1) = 2$.

On a donc nécessairement : $\deg(P) \leqslant 1$.

Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = a\mathrm{X} + b$.

On a : $\quad P' + \mathrm{X}P = \mathrm{X}^2 + 1 \iff a + (a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + 1$

$$\iff \big(a = 1 \quad \text{et} \quad b = 0\big).$$

• Réciproquement, il est clair que $P = \mathrm{X}$ convient.

On conclut : $\mathcal{S} = \{\mathrm{X}\}$.

Exemple

Résoudre l'équation

$$(\mathrm{X}+1)P + (\mathrm{X}+2)Q = \mathrm{X}+3,$$

d'inconnue $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2$.

Si (P, Q) convient, alors, en remplaçant X par -2, par -1, on déduit :
$-P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad Q(-1) = 2$,
donc : $\qquad \mathrm{X}+2 \mid P+1 \quad \text{et} \quad \mathrm{X}+1 \mid Q-2$.
Il existe donc $P_1, Q_1 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que :

$$P+1 = (\mathrm{X}+2)P_1 \quad \text{et} \quad Q-2 = (\mathrm{X}+1)Q_1.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{X}+1)P + (\mathrm{X}+2)Q = \mathrm{X}+3 \\
\iff\ & (\mathrm{X}+1)\big(-1+(\mathrm{X}+2)P_1\big) + (\mathrm{X}+2)\big(2+(\mathrm{X}+1)Q_1\big) = \mathrm{X}+3 \\
\iff\ & (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(P_1+Q_1) = 0 \\
\iff\ & P_1 + Q_1 = 0 \iff Q_1 = -P_1.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$\mathcal{S} = \big\{\big(-1+(\mathrm{X}+2)A,\ 2-(\mathrm{X}+1)A\big)\ ;\ A \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\big\}.$$

Méthode

Pour déterminer le reste de la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B non nul

Essayer de :

- revenir à la définition :

$$A = BQ + R, \qquad \deg(R) < \deg(B),$$

  et, si B est de bas degré, prendre la valeur en un ou des points annulant B.
- passer par les nombres complexes.

➟ **Exercices 15.3, 15.5**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de $A = \mathrm{X}^n + (\mathrm{X}+1)^n$ par $B = \mathrm{X}^2 - 1$.

Notons Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B :
$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$.
Puisque $\deg(B) = 2$, on a : $\deg(R) \leqslant 1$.
Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = a\mathrm{X} + b$.
Alors : $\quad \mathrm{X}^n + (\mathrm{X}+1)^n = (\mathrm{X}^2-1)Q + a\mathrm{X} + b$.
En prenant la valeur en 1 et la valeur en -1, on déduit :

$$1 + 2^n = a + b \quad \text{et} \quad (-1)^n = -a + b,$$

donc : $a = \dfrac{1}{2}\big(1 + 2^n - (-1)^n\big), \quad \text{et} \quad b = \dfrac{1}{2}\big(1 + 2^n + (-1)^n\big).$
Finalement, le reste est

$$R = \frac{1}{2}\big(1 + 2^n - (-1)^n\big)\mathrm{X} + \frac{1}{2}\big(1 + 2^n + (-1)^n\big).$$

Méthode

Pour calculer certaines sommations faisant intervenir les coefficients binomiaux

Essayer d'écrire une égalité polynomiale venant de la formule du binôme de Newton, puis prendre la valeur en certains points, après avoir éventuellement dérivé une ou plusieurs fois, ou primitivé.

➟ **Exercice 15.4**

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{X}+1)^{n+k}(\mathrm{X}-1)^{n-k}.$$

On a, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S_n &= (\mathrm{X}+1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{X}+1)^{k}(\mathrm{X}-1)^{n-k} \\ &= (\mathrm{X}+1)^n \big((\mathrm{X}+1)+(\mathrm{X}-1)\big)^n \\ &= (\mathrm{X}+1)^n (2\mathrm{X})^n = 2^n \mathrm{X}^n (\mathrm{X}+1)^n. \end{aligned}$$

Méthode

Pour calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B

Calculer d'abord le reste R, puis mettre B en facteur dans $A-R$, pour obtenir le quotient Q tel que $A = BQ + R$.

➟ **Exercice 15.6**

Exemple

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste et le quotient de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de $A = \mathrm{X}^n$ par $B = \mathrm{X} - 1$.

Il existe $(Q, R) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2$ unique tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B) = 1.$$

Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $R = a$.
En prenant la valeur en 1, on a : $a = 1$.

Puis : $(\mathrm{X}-1)Q = A - R = \mathrm{X}^n - 1$, donc : $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{X}^k$.

Finalement, le quotient est $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{X}^k$ et le reste est $R = 1$.

Exemple

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de $A = \mathrm{X}^{n+1} + 1$ par $B = \mathrm{X}^n - 1$.

On a :

$$A = \mathrm{X}^{n+1} + 1 = \mathrm{X}(\mathrm{X}^n - 1) + \mathrm{X} + 1 = BX + (\mathrm{X}+1)$$

et $\deg(\mathrm{X}+1) = 1 < \deg(B) = n$.

Le quotient est $Q = \mathrm{X}$ et le reste est $R = \mathrm{X} + 1$.

Méthode

Pour étudier le nombre et la situation des zéros d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (qui n'a pas de zéro évident)

Étudier les variations de la fonction polynomiale P sur $\mathbb{R}$, ou les variations d'une fonction associée à P et s'annulant en les mêmes points que P.

➟ **Exercices 15.11, 15.12**

Exemple

Montrer que le polynôme

$$P = X^5 - 5X^4 + 3$$

de $\mathbb{R}[X]$ admet exactement trois zéros réels, notés a, b, c et que :

$$-1 < a < 0 < b < 1 < 4 < c < 5.$$

L'application $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^5 - 5x^4 + 3$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4).$$

On forme le tableau de variations de P :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	>0	$\searrow$	<0	$\nearrow$	$+\infty$

On a :

$$P(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty < 0, \quad P(0) = 3 > 0,$$

$$P(4) = -253 < 0, \quad P(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty > 0.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, par intervalles, P admet trois zéros réels exactement, notés a, b, c et on a :

$$a < 0 < b < 4 < c.$$

De plus : $P(-1) = -3 < 0, \quad P(1) = -1 < 0, \quad P(5) = 3 > 0,$

donc : $\qquad -1 < a < 0 < b < 1 < 4 < c < 5.$

Méthode

Pour obtenir une localisation des zéros d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$

Essayer d'appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire.

➟ **Exercice 15.12**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tous les zéros de $3X^{n+1} + X^n + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont de modules < 1.

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que : $3z^{n+1} + z^n + 1 = 0 \quad$ et $\quad |z| \geqslant 1$. On a alors :

$$3|z|^{n+1} = |3z^{n+1}| = \big| -(z^n+1)\big| = |z^n + 1|$$
$$\leqslant |z^n| + 1 = |z|^n + 1 \leqslant |z|^n + |z|^n = 2|z|^n,$$

d'où, en simplifiant par $|z|^n$ qui est > 0 : $3|z| < 2$,

donc $|z| < \dfrac{2}{3}$, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre que tous les zéros de $3X^{n+1} + X^n + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont de modules < 1.

Méthode

Pour calculer une fonction symétrique S des zéros d'un polynôme P scindé

- Exprimer S en fonction des fonctions symétriques élémentaires des zéros de P.
- Dans le cas des sommes de puissances des zéros de P, écrire que chaque zéro de P annule P, puis multiplier par une puissance convenable de ce zéro, et enfin sommer.

➟ **Exercices 15.9, 15.11, 15.13**

Exemple

Soient $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$, $P = \mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, $z_1,\ z_2,\ z_3$ les zéros de P dans $\mathbb{C}$.

Calculer :

$$S = (z_1+z_2)^2 + (z_2+z_3)^2 + (z_3+z_1)^2.$$

On a, en développant les carrés et en notant $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ les fonctions symétriques élémentaires de $z_1,\ z_2,\ z_3$:

$$\begin{aligned} S &= 2(z_1^2+z_2^2+z_3^2) + 2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1) \\ &= 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 2\sigma_2 = 2\sigma_1^2 - 2\sigma_2. \end{aligned}$$

D'après le cours : $\sigma_1 = -a, \quad \sigma_2 = b, \quad \sigma_3 = -c.$

On conclut : $S = 2a^2 - 2b$.

Méthode

Pour déterminer une CNS portant sur les coefficients d'une équation algébrique sur $\mathbb{C}$ pour que les zéros vérifient une relation donnée

Traduire cette relation sur les fonctions symétriques élémentaires de certains zéros de l'équation et procéder à une élimination.

➟ **Exercice 15.15**

Exemple

Déterminer $a \in \mathbb{C}$ pour que l'équation

$$z^3 - 3z^2 + az - 4 = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, admette une racine égale à la moyenne arithmétique des deux autres, et résoudre l'équation dans ce cas.

Notons $z_1,\ z_2,\ z_3$ les racines de l'équation, $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ les fonctions symétriques élémentaires de $z_1,\ z_2,\ z_3$.

D'après le cours, on a : $\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = a, \quad \sigma_3 = 4.$

Notons $s = z_2 + z_3, \quad p = z_2z_3$. On a :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = a \\ \sigma_3 = 4 \\ z_1 = \dfrac{z_2+z_3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 + s = 3 \\ z_1 s + p = a \\ z_1 p = 4 \\ z_1 = \dfrac{s}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = 1 \\ s = 2 \\ p = 4 \\ a = 6. \end{cases}$$

La CNS cherchée est : $a = 6$.

Dans ce cas, on a $z_1 = 1$, et $z_2,\ z_3$ sont les solutions de $z^2 - sz + p = 0$, c'est-à-dire $z^2 - 2z + 4 = 0$, donc, à l'ordre près : $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_3 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

On conclut que, dans ce cas, les racines de l'équation sont :

$$1,\ 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Énoncés des exercices

15.1 Exemple d'égalité de polynômes

On note $P_0(\mathrm{X}) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad P_n(\mathrm{X}) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n+1).$

Montrer : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(\mathrm{X}) = P_n(\mathrm{X}-1).$

15.2 Exemple d'équations dont l'inconnue est un polynôme

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

a) $\mathrm{X}^2 P'' + 2\mathrm{X}P' - 2P = 0$

b) $\mathrm{X}^2 P'' + 2\mathrm{X}P' - P = 0.$

15.3 Exemple de calcul du reste d'une division euclidienne de polynômes

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, le reste de la division euclidienne de X^n par $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

15.4 Calcul de sommations issues de la formule du binôme de Newton

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On note :

$$P_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{X}^k (1-\mathrm{X})^{n-k}, \quad P_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \mathrm{X}^k (1-\mathrm{X})^{n-k}, \quad P_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \mathrm{X}^k (1-\mathrm{X})^{n-k}.$$

Calculer P_0, P_1, P_2.

15.5 Exemple de calcul du reste d'une division euclidienne de polynômes

Soient $a \in \mathbb{R}$, $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X}\sin ka + \cos ka)$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X}^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

15.6 Exemple de calcul du quotient et du reste d'une division euclidienne de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P = \mathrm{X}^n + (\mathrm{X}-1)^n + 1$ par $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

15.7 Exemple d'équation dont les inconnues sont des polynômes, utilisation de la divisibilité

Résoudre l'équation d'inconnue $(P, Q) \in \big(K[\mathrm{X}]\big)^2$:

$$(1) \qquad (\mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 7)P + (\mathrm{X}-2)Q = 2\mathrm{X} - 3.$$

15.8 Exemple de divisibilité pour des polynômes formant une suite de polynômes

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \mathrm{X}^{2^n} + \mathrm{X}^{2^{n-1}} + 1 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Montrer, pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $\quad n \leqslant m \implies P_n \mid P_m.$

15.9 Exemple de calcul d'une fonction symétrique des zéros d'un polynôme

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^3$, $P = \mathrm{X}^4 + a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, z_1, z_2, z_3, z_4 les zéros de P dans $\mathbb{C}$. Calculer $S = \sum z_1^2 z_2$, somme comportant 12 termes, obtenus en multipliant le carré d'un zéro de P par un *autre* zéro de P.

15.10 Exemple de divisibilité faisant intervenir une composition de polynômes

Montrer, pour tout $P \in K[\mathrm{X}]$: $\quad P(\mathrm{X}) - \mathrm{X} \mid P\big(P(\mathrm{X})\big) - \mathrm{X}$.

15.11 Exemple de calcul de fonction symétrique, non algébrique, des zéros d'un polynôme

a) Montrer que le polynôme $P = \mathrm{X}^3 - 11\mathrm{X} + 12$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ admet exactement trois zéros réels, notés a, b, c et que :

$$-4 < a < -3, \qquad 1 < b < 2 < c < 3.$$

b) Calculer $S = \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b + \operatorname{Arctan} c$.

15.12 Localisation des zéros d'un polynôme

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \in \mathbb{C}^*$, $a_1, \ldots a_{n-1} \in \mathbb{C}$.
On note $P = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0$, $Q = \mathrm{X}^n - |a_{n-1}|\mathrm{X}^{n-1} - \cdots - |a_0|$.

a) Montrer que, dans $[0\,;+\infty[$, Q admet un zéro et un seul, noté ρ.

b) Établir que, pour tout zéro z de P dans $\mathbb{C}$, on a : $|z| \leqslant \rho$.

15.13 Calcul des sommes des mêmes puissances des zéros d'un polynôme

Soient $(p,q) \in \mathbb{C}^2$, $P = \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q$, z_1, z_2, z_3 les zéros de P dans $\mathbb{C}$.

a) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n$.

1) Calculer S_0, S_1, S_2.

2) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+3} + pS_{n+1} + qS_n = 0$.

3) En déduire S_3, S_4, S_5, S_6.

b) On, suppose de plus $q \neq 0$, et on note, pour tout $n \in \mathbb{Z}_-$, $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n$.

Calculer S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, S_{-4}.

15.14 Exemple de résolution d'un système algébrique à trois inconnues

Résoudre le système d'équations d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -5. \end{cases}$$

15.15 CNS pour que les coefficients d'une équation algébrique vérifient une condition donnée

Déterminer une CNS sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que deux des solutions de l'équation

$$z^4 - 4z^3 + \lambda z^2 - 12z + 3 = 0 \qquad (1)$$

soient de produit égal à 1, et résoudre l'équation dans ce cas.

Du mal à démarrer ?

15.1 Récurrence sur n. Partir du côté le plus compliqué.

15.2 Raisonner sur les degrés.

a) Montrer que, si P convient, alors $\deg(P) = 1$.

b) Obtenir une contradiction sur le degré de P, qui doit être un entier.

15.3 Le reste R est de degré inférieur ou égal à 1, donc s'écrit $R = a\mathrm{X}+b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Factoriser $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-2$, puis évaluer R en les zéros de $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2$.

15.4 Citer la formule du binôme de Newton, appliquée, par exemple, à X et Y, dériver par rapport à X pour Y fixé, puis remplacer Y par $1 - \mathrm{X}$, et réitérer.

15.5 Le reste R est de degré inférieur ou égal à 1, donc de la forme $P = \alpha\mathrm{X} + \beta,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer α et β en évaluant R en i et en $-\mathrm{i}$.

15.6 • Le reste R est de degré inférieur ou égal à 1, donc est de la forme $a\mathrm{X} + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Évaluer en 0 et en 1 pour obtenir les valeurs de a et b.

• En notant Q le quotient, on a $(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})Q = P - R$. Factoriser, dans $P - R$, par X et par $\mathrm{X} - 1$.

15.7 Si (P,Q) convient, déduire $\mathrm{X} - 2 \mid P - 1$.

Exprimer la réponse en donnant P et Q en fonction d'un polynôme qui sert de paramètre.

15.8 Montrer d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \mid P_{n+1}$.

15.9 Remarquer, par exemple, que S ressemble au produit $\left(\sum z_1 z_2\right)\left(\sum z_1\right)$.

15.10 Intercaler $P(\mathrm{X})$ entre $P\big(P(\mathrm{X})\big)$ et X, et utiliser l'écriture additive d'un polynôme, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$.

15.11 *a)* Étudier les variations de P, ou bien évaluer P en $-4,\ -3,\ 1,\ 2,\ 3$.

b) En notant $\alpha = \operatorname{Arctan} a, \ldots$, et en utilisant une formule de trigonométrie sur la tangente d'une somme de trois réels, calculer $\tan S$.

15.12 *a)* Étudier les variations de la fonction

$$\varphi :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \varphi(x) = \frac{Q(x)}{x^n}.$$

b) Utiliser l'inégalité triangulaire et *a)*.

15.13 *a) 1)* Immédiat.

2) Écrire que $z_1,\ z_2,\ z_3$ sont zéros de P, multiplier par une puissance de $z_1,\ z_2,\ z_3$, puis sommer.

3) Immédiat.

b) Montrer que la formule obtenue en *a)2)* est aussi valable lorsque n est négatif.

15.14 Considérer le polynôme $(\mathrm{X} - x)(\mathrm{X} - y)(\mathrm{X} - z)$.
En notant $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ les fonctions symétriques élémentaires de $x,\ y,\ z$, et $S_k = x^k + y^k + z^k$ pour $k \in \{1,2,3\}$, exprimer $S_1,\ S_2,\ S_3$.

15.15 • En notant $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ les solutions de (1) dans $\mathbb{C}$ et en envisageant la condition $z_1 z_2 = 1$, considérer les fonctions symétriques élémentaires s, p de z_1, z_2, et les fonctions symétriques élémentaires s', p' de z_3, z_4.

• Ayant obtenu la CNS cherchée, $\lambda = 4$, en utilisant les calculs précédents déduire $s, p,\ s', p'$, puis $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$.

Corrigés des exercices

15.1

Récurrence sur n.

• La propriété est vraie pour $n = 0$, car :
$\sum_{k=0}^{0} P_k(\mathrm{X}) = P_0(\mathrm{X}) = 1$ et $P_0(\mathrm{X}-1) = 1$.

• La propriété est vraie pour $n = 1$, car :
$\sum_{k=0}^{1} P_k(\mathrm{X}) = P_0(\mathrm{X}) + P_1(\mathrm{X}) = 1 - \mathrm{X}$
et $P_1(\mathrm{X}-1) = -(\mathrm{X}-1) = 1-\mathrm{X}$.

• Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_k(\mathrm{X}) = \Big(\sum_{k=0}^{n} P_k(\mathrm{X})\Big) + P_{n+1}(\mathrm{X}) = P_n(\mathrm{X}-1) + P_{n+1}(\mathrm{X})$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n) + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n)$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n)\big((n+1)-\mathrm{X}\big)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n)\big(\mathrm{X}-(n+1)\big) = P_{n+1}(\mathrm{X}-1).$$

Ceci montre que la propriété est vraie pour $n+1$.

On conclut, par récurrence sur n, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15.2

a) Il est clair que le polynôme nul convient.

1) Soit P convenant tel que $P \neq 0$. Notons $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$. Le polynôme P s'écrit : $P = a_n\mathrm{X}^n + \cdots + a_0$, où $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$.

Puisque $\mathrm{X}^2P'' + 2\mathrm{X}P' - 2P = 0$, le terme de degré n de ce polynôme est nul, donc $n(n-1)a_n + 2na_n - 2a_n = 0$, c'est-à-dire $(n^2+n-2)a_n = 0$, d'où, puisque $a_n \neq 0$: $n^2+n-2 = 0$.

On résout cette équation du second degré :

$$n^2+n-2 = 0 \iff \big(n = 1 \text{ ou } n = -2\big).$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a nécessairement $n = 1$.

Ceci montre que P est de degré 1.

2) En notant $P = a\mathrm{X} + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\mathrm{X}^2P'' + 2\mathrm{X}P' - P = 2a\mathrm{X} - 2(a\mathrm{X}+b) = -2b,$$

donc :

$$\mathrm{X}^2P'' + 2\mathrm{X}P' - 2P = 0 \iff b = 0 \iff P = a\mathrm{X}.$$

On peut contrôler que ces polynômes conviennent bien.

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\{a\mathrm{X}\,;\ a \in \mathbb{R}\}$.

b) Le même raisonnement qu'en *a)*, portant sur le degré de P, montre que, si $P \neq 0$ et si P convient, alors, en notant $n = \deg(P)$, on a : $n^2+n-1 = 0$. Mais les solutions de cette équation du second degré sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, qui ne sont pas des entiers.

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\{0\}$.

15.3

Par division euclidienne, il existe $(Q,R) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2$ unique tel que :

$$\mathrm{X}^n = (\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-2)Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < 2.$$

Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $R = a\mathrm{X}+b$.

Comme $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-2 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)$, on déduit, en remplaçant X par -1, par 2 :

$$\begin{cases} (-1)^n = -a+b \\ 2^n = 2a+b \end{cases} \quad \begin{array}{|r|l} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

On résout ce système linéaire de deux équations à deux inconnues, par exemple en utilisant les coefficients indiqués, et on obtient :

$$3a = 2^n - (-1)^n, \qquad 3b = 2^n + 2(-1)^n.$$

On conclut : le reste de la division euclidienne de X^n par $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-2$ est :

$$R = \frac{1}{3}\big(2^n - (-1)^n\big)\mathrm{X} + \frac{1}{3}\big(2^n + 2(-1)^n\big).$$

15.4

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{X}^k\mathrm{Y}^{n-k} = (\mathrm{X}+\mathrm{Y})^n.$$

1) En remplaçant Y par $1-\mathrm{X}$, on obtient :

$$P_0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k} = \big(\mathrm{X}+(1-\mathrm{X})\big)^n = 1.$$

2) Dérivons par rapport à X, pour Y fixé :

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\mathrm{X}^{k-1}\mathrm{Y}^{n-k} = n(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^{n-1},$$

puis multiplions par X :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\mathrm{X}^{k}\mathrm{Y}^{n-k} = n\mathrm{X}(\mathrm{X}+Y)^{n-1}.$$

En remplaçant Y par $1-\mathrm{X}$, on obtient :

$$P_1 = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k} = n\mathrm{X}\big(\mathrm{X}+(1-\mathrm{X})\big)^{n-1} = n\mathrm{X}.$$

3) Dérivons par rapport à X, pour Y fixé, dans l'égalité obtenue plus haut :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} \mathrm{X}^{k-1}\mathrm{Y}^{n-k} = n(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^{n-1} + n(n-1)\mathrm{X}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^{n-2},$$

puis multiplions par X :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \mathrm{X}^{k}\mathrm{Y}^{n-k} = n\mathrm{X}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^{n-1} + n(n-1)\mathrm{X}^2(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^{n-2}.$$

Enfin, en remplaçant Y par $1-\mathrm{X}$, on obtient :

$$P_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \mathrm{X}^k (1-\mathrm{X})^{n-k} = n\mathrm{X} + n(n-1)\mathrm{X}^2.$$

15.5

Par division euclidienne de P par X^2+1, il existe $(Q,R) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2$ unique tel que :

$$P = (\mathrm{X}^2+1)Q + R, \qquad \deg(R) < 2.$$

Il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que : $R = \alpha\mathrm{X} + \beta$.

On a alors, en prenant la valeur en i, qui est un zéro complexe de X^2+1 :

$$\begin{aligned}
\alpha\,\mathrm{i} + \beta &= R(\mathrm{i}) = P(\mathrm{i}) \\
&= \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{i}\sin ka + \cos ka) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,ka} \\
&= \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{i}\,ka\Big) = \exp\Big(\mathrm{i}\,\frac{n(n+1)}{2}a\Big) \\
&= \cos\frac{n(n+1)}{2}a + \mathrm{i}\sin\frac{n(n+1)}{2}a.
\end{aligned}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\alpha = \sin\frac{n(n+1)}{2}a, \qquad \beta = \cos\frac{n(n+1)}{2}a.$$

On conclut que le reste de la division euclidienne de P par X^2+1 est :

$$\mathrm{X}\sin\frac{n(n+1)}{2}a + \cos\frac{n(n+1)}{2}a.$$

15.6

Par division euclidienne de P par $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}$, il existe $(Q,R) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2$ unique tel que :

$$P = (\mathrm{X}^2-\mathrm{X})Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < 2.$$

1) Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $R = a\mathrm{X}+b$. Comme $\mathrm{X}^2-\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$, prenons les valeurs en 0 et en 1 :

$$\begin{cases} P(0) = R(0) = b \\ P(1) = R(1) = a+b. \end{cases}$$

D'autre part : $P(0) = 1+(-1)^n$ et $P(1) = 2$. On déduit :

$$b = 1+(-1)^n, \qquad a = P(1) - b = 1-(-1)^n.$$

Ainsi, le reste R est :

$$R = \big(1-(-1)^n\big)\mathrm{X} + \big(1+(-1)^n\big).$$

2) Ensuite, connaissant le reste, on va calculer le quotient par factorisation :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{X}^2-\mathrm{X})Q \\
=\ & P - R \\
=\ & \mathrm{X}^n + (\mathrm{X}-1)^n + 1 - \big(1-(-1)^n\big)\mathrm{X} - \big(1+(-1)^n\big) \\
=\ & \mathrm{X}^n + (\mathrm{X}-1)^n - \big(1-(-1)^n\big)\mathrm{X} - (-1)^n \\
=\ & (\mathrm{X}^n - \mathrm{X}) + \big((\mathrm{X}-1)^n + (-1)^n\mathrm{X} - (-1)^n\big) \\
=\ & \mathrm{X}(\mathrm{X}^{n-1}-1) + (\mathrm{X}-1)\big((\mathrm{X}-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}\big) \\
=\ & \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{X}^k + (\mathrm{X}-1)\mathrm{X}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-k}(\mathrm{X}-1)^k.
\end{aligned}$$

On conclut que le quotient Q est :

$$Q = \sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{X}^k + (-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k(\mathrm{X}-1)^k.$$

15.7

Soit $(P,Q) \in \big(K[\mathrm{X}]\big)^2$.

1) Si (P,Q) convient, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}-2 \mid (\mathrm{X}-2)Q &= -(\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+7)P + (2\mathrm{X}-3) \\
&= -\big((\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)+1\big)P + 2(\mathrm{X}-2) + 1 \\
&= (\mathrm{X}-2)\big(-(\mathrm{X}-3)P + 2\big) - (P-1),
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{X}-2 \mid P-1$.

On pouvait aussi remarquer que, si l'on remplace X par 2 dans (1), on obtient $P(2) = 1$, donc $\mathrm{X}-2 \mid P-1$.

Il existe donc $A \in K[\mathrm{X}]$ tel que : $P - 1 = (\mathrm{X}-2)A$.

2) On a, pour tout $A \in K[\mathrm{X}]$, en notant $P = (\mathrm{X}-2)A + 1$:

$$\begin{aligned}
&(1) \\
\iff\ & (\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+7)\big((\mathrm{X}-2)A+1\big) + (\mathrm{X}-2)Q = 2\mathrm{X}-3 \\
\iff\ & (\mathrm{X}-2)\big((\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+7)A + Q\big) = -\mathrm{X}^2+7\mathrm{X}-10 \\
\iff\ & (\mathrm{X}-2)\big((\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+7)A + Q\big) = (\mathrm{X}-2)(-\mathrm{X}+5) \\
\iff\ & (\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+7)A + Q = -\mathrm{X}+5 \\
\iff\ & Q = -(\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+7)A + (-\mathrm{X}+5).
\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des couples (P,Q) cherchés est :

$$\Big\{\Big((\mathrm{X}-2)A+1,\ -(\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+7)A+(-\mathrm{X}+5)\Big)\ ;\ A \in K[\mathrm{X}]\Big\}.$$

On peut contrôler que les couples obtenus conviennent.

15.8

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \mathrm{X}^{2^{n+1}} + \mathrm{X}^{2^n} + 1 = \big(\mathrm{X}^{2^n}\big)^2 + \mathrm{X}^{2^n} + 1 \\
&= (\mathrm{X}^{2^n}+1)^2 - \mathrm{X}^{2^n} = \big(\mathrm{X}^{2^n}+1\big)^2 - \big(\mathrm{X}^{2^{n-1}}\big)^2 \\
&= \big(\mathrm{X}^{2^n} + 1 - \mathrm{X}^{2^{n-1}}\big)\big(\mathrm{X}^{2^n} + 1 + \mathrm{X}^{2^{n-1}}\big) \\
&= (\mathrm{X}^{2^n} - \mathrm{X}^{2^{n-1}} + 1)P_n,
\end{aligned}$$

ce qui montre : $P_n \mid P_{n+1}$.

2) Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \leqslant m$. On a successivement, d'après *1)* : $P_n \mid P_{n+1} \mid P_{n+2} \mid \cdots \mid P_{m-1} \mid P_m$, donc, par transitivité de la divisibilité : $P_n \mid P_m$.

15.9

En notant sous le symbole $\sum$ le nombre de termes de la sommation concernée, on remarque :

$$S = \Big(\sum_{6} z_1 z_2\Big)\Big(\sum_{4} z_1\Big) - 3\sum_{4} z_1 z_2 z_3.$$

En notant $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les fonctions symétriques élémentaires de z_1, z_2, z_3, z_4, on a donc : $S = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

De plus, d'après les relations entre coefficients et zéros d'un polynôme scindé, on a :

$$\sigma_1 = -a, \quad \sigma_2 = b, \quad \sigma_3 = -c.$$

On conclut : $S = -ab + 3c$.

15.10

En notant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, $(a_0, ..., a_n) \in K^{n+1}$, on a :

$$\begin{aligned}
&P\big(P(\mathrm{X})\big) - \mathrm{X} \\
&= \Big(P\big(P(\mathrm{X})\big) - P(\mathrm{X})\Big) + \big(P(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\big) \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \big(P(\mathrm{X})\big)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k\Big) + \big(P(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\big(P(\mathrm{X})\big)^k - \mathrm{X}^k\Big) + \big(P(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\big).
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(\mathrm{X}) - \mathrm{X} \mid \big(P(\mathrm{X})\big)^k - \mathrm{X}^k$, puisque :

$$\big(P(\mathrm{X})\big)^k - \mathrm{X}^k = \big(P(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\big)\sum_{i=0}^{k-1} \big(P(\mathrm{X})\big)^i \mathrm{X}^{k-1-i}.$$

On conclut : $P(\mathrm{X}) - \mathrm{X} \mid P\big(P(\mathrm{X})\big) - \mathrm{X}$.

15.11

a) On calcule les valeurs de P aux points envisagés :

$$P(-4) = -8 < 0, \quad P(-3) = 18 > 0,$$

$$P(1) = 2 > 0, \quad P(2) = -2 < 0, \quad P(3) = 6 > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque P est continu sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on déduit que P admet au moins trois zéros réels a, b, c tels que :

$$-4 < a < -3, \qquad 1 < b < 2 < c < 3.$$

D'autre part, comme P est de degré 3, P admet au plus trois zéros réels, et on conclut que P admet exactement trois zéros réels, a, b, c.

b) Notons $\alpha = \operatorname{Arctan} a$, $\beta = \operatorname{Arctan} b$, $\gamma = \operatorname{Arctan} c$.

On a, si le dénominateur n'est pas nul, par une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\tan S &= \tan(\alpha + \beta + \gamma) \\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1 - \big(\tan\alpha\tan\beta + \tan\alpha\tan\gamma + \tan\beta\tan\gamma\big)} \\
&= \frac{a + b + c - abc}{1 - (ab + ac + bc)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 - \sigma_2},
\end{aligned}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ désignent les fonctions symétriques élémentaires de a, b, c.

D'autre part, d'après les relations entre coefficients et zéros d'un polynôme scindé, on a :

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = -11, \qquad \sigma_3 = -12.$$

D'où : $\tan S = \dfrac{12}{1 + 11} = 1$.

Enfin, d'après les encadrements obtenus sur a,, b, c, on a :

$$\alpha \in \Big] -\frac{\pi}{2} \,;\, -\frac{\pi}{4}\Big[, \qquad \beta \in \Big]\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{2}\Big[, \qquad \gamma \in \Big]\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{2}\Big[,$$

d'où, par addition : $\alpha + \beta + \gamma \in \Big]0 \,;\, \dfrac{3\pi}{4}\Big[$, et on conclut : $S = \dfrac{\pi}{4}$.

15.12

a) Comme $Q(0) = -|a_0| < 0$, le nombre 0 n'est pas zéro de Q.

Considérons l'application

$$\varphi :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = \frac{Q(x)}{x^n} = 1 - \frac{|a_{n-1}|}{x} - \cdots - \frac{|a_0|}{x^n}.$$

L'application φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \varphi'(x) = \frac{|a_{n-1}|}{x^2} + \cdots + \frac{n|a_0|}{x^{n+1}} > 0,$$

donc φ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

De plus : $\varphi(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\dfrac{|a_0|}{x^n} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

On dresse le tableau de variations de φ :

x	0	ρ	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

D'après le théorème de la bijection monotone, φ admet un zéro et un seul.

On en conclut que Q admet, dans $[0\,;+\infty[$, un zéro et un seul, noté ρ.

b) Soit z un zéro de P dans $\mathbb{C}$.

Comme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = P(z) = 0$, on a, en isolant le terme de degré n, puis en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|z|^n = \big|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\big| \leqslant |a_{n-1}|\,|z|^{n-1} + \cdots + |a_0|,$$

d'où : $Q(|z|) \leqslant 0$.

En utilisant l'application φ introduite en *a)*, on a donc $\varphi(|z|) \leqslant 0$, et on conclut, d'après le tableau de variations de φ : $|z| \leqslant \rho$.

15.13

Notons σ_1, σ_2, σ_3 les fonctions symétriques élémentaires de z_1, z_2, z_3.

D'après les relations entre coefficients et zéros d'un polynôme scindé, on a :

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = p, \qquad \sigma_3 = -q.$$

a) 1) On a : $S_0 = 3$, $S_1 = \sigma_1 = 0$ et :

$$\begin{aligned} S_2 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \\ &= (z_1+z_2+z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) \\ &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2p \end{aligned}$$

2) On a, pour tout $k \in \{1,2,3\}$: $z_k^3 + pz_k + q = 0$, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant par z_k^n : $z_k^{n+3} + pz_k^{n+1} + qz_k^n = 0$, puis en sommant pour $k = 1, 2, 3$:

$$S_{n+3} + pS_{n+1} + qS_n = 0.$$

3) La formule obtenue en *2)* permet de calculer les S_n de proche en proche :

$$\begin{aligned} S_3 &= -pS_1 - qS_0 = -3q, \\ S_4 &= -pS_2 - qS_1 = 2p^2, \\ S_5 &= -pS_3 - qS_2 = -p(-3q) - q(-2p) = 5pq, \\ S_6 &= -pS_4 - qS_3 = -p(2p^2) - q(-3q) = -2p^3 + 3q^2. \end{aligned}$$

b) • On peut calculer S_{-1} de plusieurs façons, par exemple :

$$S_{-1} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2}{z_1z_2z_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -\frac{p}{q}.$$

• Il est clair que la formule obtenue en *a) 2)* pour $n \in \mathbb{N}$ est aussi valable lorsque $q \neq 0$, (c'est-à-dire lorsque z_1, z_2, z_3 sont tous trois $\neq 0$) de manière générale pour $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $S_{n+3} + pS_{n+1} + qS_n = 0$, donc :

$$S_n = -\frac{1}{q}(pS_{n+1} + S_{n+3}).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} S_{-2} &= -\frac{1}{q}(pS_{-1} + S_1) = \frac{p^2}{q^2}, \\ S_{-3} &= -\frac{1}{q}(pS_{-2} + S_0) = -\frac{1}{q}\Big(\frac{p^3}{q^2} + 3\Big) = -\frac{p^3 + 3q^2}{q^3}, \\ S_{-4} &= -\frac{1}{q}(pS_{-3} + S_{-1}) \\ &= -\frac{1}{q}\Big(-p\frac{p^3+3q^2}{q^3} - \frac{p}{q}\Big) = \frac{p^4 + 4pq^2}{q^4}. \end{aligned}$$

15.14

Considérons le polynôme $P = (\mathrm{X} - x)(\mathrm{X} - y)(\mathrm{X} - z)$, qui se développe en $P = \mathrm{X}^3 - \sigma_1\mathrm{X}^2 + \sigma_2\mathrm{X} - \sigma_3$, où σ_1, σ_2, σ_3 sont les fonctions symétriques élémentaires de x, y, z.

Pour la commodité, notons $p = -\sigma_1$, $q = \sigma_2$, $r = -\sigma_3$, de sorte que x, y, z sont les zéros de $P = \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} + r$.

Notons, pour $k \in \{1, 2, 3\}$: $S_k = x^k + y^k + z^k$.

On a : $S_1 = \sigma_1 = -p$, $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = p^2 - 2q$, et d'autre part, en additionnant les trois équations satisfaites par x, y, z : $S_3 + pS_2 + qS_1 + 3r = 0$, d'où :

$$S_3 = -pS_2 - qS_1 - 3r = -p(p^2 - 2q) + qp - 3r = -p^3 + 3pq - 3r.$$

Donc :

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} -p = 1 \\ p^2 - 2q = 1 \\ -p^3 + 3pq - 3r = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} p = -1 \\ q = 0 \\ r = 2. \end{cases}$$

Ainsi, (x, y, z) est solution de (S) si et seulement si x, y, z sont les zéros de $P = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 2$.

Le nombre -1 est solution évidente :

$$\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 2 = (\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 2).$$

Les solutions de cette équation sont -1, $1 - \mathrm{i}$, $1 + \mathrm{i}$.

On conclut que les solutions de (S) sont $(-1, 1 - \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})$ et ses permutés (six solutions en tout).
On peut contrôler que ce triplet convient bien.

15.15

• Notons z_1, z_2, z_3, z_4 les solutions de (1) dans $\mathbb{C}$, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 les fonctions symétriques élémentaires de z_1, z_2, z_3, z_4. En notant (C) la condition proposée, on a, d'après les relations entre coefficients et solutions d'une équation :

$$(\mathrm{C}) \iff \big(\sigma_1 = 4, \ \ \sigma_2 = \lambda, \ \ \sigma_3 = 12, \ \ \sigma_4 = 3, \ \ z_1z_2 = 1\big).$$

Notons s, p les fonctions symétriques élémentaires de z_1, z_2, et s', p' celles de z_3, z_4, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} s = z_1 + z_2 \\ p = z_1z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} s' = z_3 + z_4 \\ p' = z_3z_4. \end{cases}$$

Alors : (C) $\iff$

$$\begin{cases} s + s' = 4 \\ ss' + p + p' = \lambda \\ sp' + s'p = 12 \\ pp' = 3 \\ p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1 \\ p' = 3 \\ s + s' = 4 \\ 3s + s' = 12 \\ ss' = \lambda - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1 \\ p' = 3 \\ s = 4 \\ s' = 0 \\ \lambda = 4. \end{cases}$$

La CNS cherchée est donc : $\lambda = 4$.

• Supposons dorénavant $\lambda = 4$.

En reprenant les calculs précédents, comme $s = 4$ et $p = 1$, z_1 et z_2 sont les solutions de $z^2 - 4z + 1 = 0$, donc, à l'ordre près, $z_1 = 2 - \sqrt{3}$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}$ et, comme $s' = 0$ et $p' = 3$, z_3 et z_4 sont les solutions de $z^2 + 3 = 0$, donc, à l'ordre près, $z_3 = -\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_4 = \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Finalement, dans le cas $\lambda = 4$, les solutions de (1) sont :

$$2 - \sqrt{3}, \quad 2 + \sqrt{3}, \quad -\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

On peut contrôler ce dernier résultat.

Vrai ou Faux ?

15.1 On a, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\deg(P+Q) \leqslant \mathrm{Max}\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ et il y a égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$. V F

15.2 Tout polynôme est pair ou impair. V F

15.3 On a, pour tout $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$: $\deg(P') = \deg(P) - 1$. V F

15.4 Pour tout $A \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, si $(\mathrm{X}^3+1)A = 0$, alors $A = 0$. V F

15.5 Pour tous $a, b \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, si $P(a) = P(b) = 0$, alors $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ divise P. V F

15.6 On a, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$: $P(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k$. V F

15.7 Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. V F

15.8 Si un polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ n'a pas de racine réelle, alors il est irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. V F

15.9 Pour tout $(S, P) \in \mathbb{C}^2$, les deux nombres complexes ayant pour somme S et pour produit P sont les deux racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - SX + P$. V F

15.10 Tout polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré impair admet au moins une racine réelle. V F

Vrai ou Faux, les réponses

15.1 C'est un résultat du cours. **V**

15.2 Contrexemple : $\mathrm{X}+1$. **F**

Ne pas confondre avec l'affirmation vraie : tout polynôme (autre que le polynôme nul) est de degré pair ou de degré impair.

15.3 La formule est fausse si $\deg(P)=0$, car alors $P'=0$ donc $\deg(P')=-\infty \neq -1$. **F**

La formule est vraie si on suppose $\deg(P) \geqslant 1$.

15.4 D'après le cours, si le produit de deux polynômes est le polynôme nul, alors l'un des deux au moins est le polynôme nul. **V**

15.5 Contrexemple : $a=b=0$, $P=\mathrm{X}$. **F**

Il y a oubli de la condition $a \neq b$.

Le résultat correct est : pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$ et pour tout $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, si P s'annule en a et en b, alors le produit $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ divise P.

15.6 C'est un résultat du cours, la formule de Taylor pour les polynômes. **V**

15.7 C'est un résultat du cours, le théorème de D'Alembert. **V**

15.8 Contrexemple : $P=\mathrm{X}^4+1$. **F**

Ce polynôme P n'a pas de racine réelle, mais il n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ car :

$$\mathrm{X}^4+1=(\mathrm{X}^2+1)^2-2\mathrm{X}^2=(\mathrm{X}^2-\sqrt{2}\,\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+\sqrt{2}\,\mathrm{X}+1).$$

15.9 C'est un résultat du cours. **V**

Il se peut que les deux racines soient égales, lorsque $S^2-4P=0$.

15.10 L'application polynomiale P est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de limites infinies de signes opposés en $-\infty$ et en $+\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet au moins une racine réelle. **V**

Chapitre 16

Arithmétique des polynômes

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de pgcd et ppcm dans $K[\mathrm{X}]$
- Étude des zéros d'un polynôme et de leurs ordres de multiplicité
- Factorisation de polynômes dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$
- Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des pgcd et ppcm dans $K[\mathrm{X}]$
- Polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, théorème de Gauss
- Définition des zéros d'un polynôme, de l'ordre de multiplicité, lien avec les dérivées successives
- Caractérisations des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, factorisation d'un trinôme, d'un trinôme bicarré réel
- Définition et propriétés de $K(\mathrm{X})$, technique de la décomposition en éléments simples, formule portant sur $\dfrac{P'}{P}$ lorsque P est scindé.

On note :

K pour un corps commutatif,

$\mathbb{K}$ pour le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer que deux polynômes A, B de $K[\mathrm{X}]$ sont premiers entre eux

Essayer de :

- montrer que, pour tout $D \in K[\mathrm{X}]$, si $D \mid A$ et $D \mid B$, alors D est une constante
- montrer que, si $D \in K[\mathrm{X}]$ est irréductible et si $D \mid A$ et $D \mid B$, alors il y a une contradiction
- montrer l'existence de $U, V \in K[\mathrm{X}]$ tels que $UA + VB = 1$ et utiliser le théorème de Bézout.

➟ **Exercice 16.2**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que les deux polynômes

$$A = \mathrm{X}^{2n} + 1 \text{ et } B = \mathrm{X}^n - 1$$

de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sont premiers entre eux.

On a : $A = \mathrm{X}^{2n} + 1 = (\mathrm{X}^{2n} - 1) + 2 = (\mathrm{X}^n + 1)B + 2,$

donc : $$\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(\mathrm{X}^n + 1)B = 1.$$

D'après le théorème de Bézout, il en résulte que les deux polynômes A et B sont premiers entre eux.

Méthode

Pour montrer que $a \in \mathbb{K}$ est zéro d'ordre α exactement d'un polynôme P de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

Essayer de :

- mettre $(\mathrm{X} - a)^\alpha$ en facteur dans $P(\mathrm{X})$ et montrer que l'autre facteur n'est pas multiple de $\mathrm{X} - a$
- utiliser la caractérisation du cours :
$$P(a) = 0, \quad P'(a) = 0, \ldots, \quad P^{(\alpha-1)}(a) = 0, \quad P^{(\alpha)}(a) \neq 0.$$

➟ **Exercice 16.1**

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$,
$P_n = (n+1)\mathrm{X}^{n+2} - (n+2)\mathrm{X}^{n+1} + 1.$

Montrer que 1 est zéro d'ordre 2 exactement de P_n dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

On a :

- $P_n(1) = (n+1) - (n+2) + 1 = 0$
- $P_n' = (n+1)(n+2)\mathrm{X}^{n+1} - (n+2)(n+1)\mathrm{X}^n$, donc $P_n'(1) = 0$
- $P_n'' = (n+1)(n+2)\big((n+1)\mathrm{X}^n - n\mathrm{X}^{n-1}\big)$

donc $P_n''(1) = (n+1)(n+2) \neq 0.$

D'après le cours, on conclut que 1 est zéro d'ordre 2 exactement de P_n.

Méthode

Pour montrer qu'un polynôme B divise un polynôme A

Essayer de :

- mettre B en facteur dans A, par calculs élémentaires, par utilisation d'identités remarquables
- montrer que le reste de la division euclidienne de A par B est nul
- montrer que tout zéro de B est zéro de A, avec un ordre de multiplicité dans A supérieur ou égal à celui dans B, si B est scindé

➟ **Exercice 16.10**

Exemple

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$P_n = \mathrm{X}^{6n+2} + \mathrm{X}^{3n+1} + 1.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_0 divise P_n dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

On factorise P_0 dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$:
$$P_0 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X} - \mathrm{j})(\mathrm{X} - \mathrm{j}^2).$$
On a : $P_n(\mathrm{j}) = \mathrm{j}^{6n+2} + \mathrm{j}^{3n+1} + 1 = \mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$,
et, de même : $P_n(\mathrm{j}^2) = 0$.
Comme $\mathrm{j} \neq \mathrm{j}^2$, on déduit : $(\mathrm{X} - \mathrm{j})(\mathrm{X} - \mathrm{j}^2) \mid P_n$,
et on conclut que P_0 divise P_n dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Méthode

Pour calculer le pgcd de deux polynômes A, B de $K[\mathrm{X}]$

Essayer de :

- utiliser la méthode des divisions euclidiennes successives
- factoriser A et B en produit de facteurs irréductibles, puis en déduire leur pgcd.

➟ **Exercice 16.11**

Exemple

Calculer le pgcd de
$A = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2$ et $B = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} - 2$
dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Par la méthode des divisions euclidiennes successives :
$$\begin{array}{r|l|l}
 & \mathrm{X} & \mathrm{X} - 1 \\
\hline
\mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2 & \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} - 2 & \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 2 \\
\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 2 & -\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2 & \\
 & 0 &
\end{array}$$
On conclut : $A \wedge B = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 2$.

Exemple

Calculer le pgcd dans $\mathbb{R}[X]$ de
$$A = \prod_{p=1}^{6} (\mathrm{X} - 2p) \quad \text{et} \quad B = \prod_{q=1}^{4} (\mathrm{X} - 3q)$$

Les polynômes A et B sont décomposés en facteurs irréductibles :
$$\begin{aligned}
A &= (\mathrm{X} - 2)(\mathrm{X} - 4)(\mathrm{X} - 6)(\mathrm{X} - 8)(\mathrm{X} - 10)(\mathrm{X} - 12),\\
B &= (\mathrm{X} - 3)(\mathrm{X} - 6)(\mathrm{X} - 9)(\mathrm{X} - 12),
\end{aligned}$$
d'où : $A \wedge B = (\mathrm{X} - 6)(\mathrm{X} - 12) = \prod_{r=1}^{2} (\mathrm{X} - 6r)$.

Méthode

Pour déterminer les éventuels zéros rationnels d'un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}$, $P = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$.

Si $x \in \mathbb{Q}$ est zéro de P, alors il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$, et on a :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0,$$

donc $p \mid a_0 q^n$ et $q \mid a_n p^n$. Comme $p \wedge q = 1$, il s'ensuit, d'après le théorème de Gauss : $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

On essaie alors ces possibilités, qui sont en nombre fini.

➟ **Exercice 16.5**

Exemple

Montrer que le polynôme

$$P = 3X^3 - 5X^2 + 8X - 4$$

de $\mathbb{R}[X]$ admet un zéro rationnel et déterminer celui-ci.

Notons $x = \dfrac{p}{q}$ un éventuel zéro rationnel de P, où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.

On a : $3p^3 - 5p^2 q + 8pq^2 - 4q^3 = 0$, donc : $p \mid 4q^3$ et $q \mid 3p^3$.

Comme $p \wedge q = 1$, on déduit : $p \mid 4$ et $q \mid 3$,

donc $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ et $q \in \{1, 3\}$.

Avant de tester les différentes valeurs possibles pour x, voyons si on peut limiter x dans un intervalle convenable, en utilisant des arguments issus de l'Analyse.

On a : $P(0) = -4 < 0$ et $P(1) = 2 > 0$, donc, comme P est continu sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet au moins un zéro dans $[0\,;\,1]$.

Essayons : $P\left(\dfrac{2}{3}\right) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - 5\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + 8\,\dfrac{2}{3} - 4 = 0.$

On conclut que $\dfrac{2}{3}$ est un zéro rationnel de P.

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,

$$P_n = X^n + X + 1.$$

Montrer que P_n n'admet pas de zéro rationnel.

Raisonnons par l'absurde : supposons que P_n admette au moins un zéro rationnel x. Il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$x = \frac{p}{q}, \quad p \wedge q = 1, \quad P(x) = 0.$$

On a alors : $p^n + pq^{n-1} + q^n = 0$, donc : $p \mid q^n$ et $q \mid p^n$.

Comme $p \wedge q = 1$, on déduit : $p = \pm 1$ et $q = 1$, donc $x = \pm 1$.

On a : $P_n(1) = 3 \neq 0$ et $P_n(-1) = (-1)^n \neq 0$,

d'où une contradiction.

On conclut : P_n n'admet pas de zéro rationnel.

Méthode

Pour factoriser un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles

Se rappeler que, d'après le cours, les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant < 0.

- On sait factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes de degré 2 à discriminant $\geqslant 0$, donc aussi ceux qui s'y ramènent simplement.

- On sait factoriser les trinômes bicarrés X^4+pX^2+q, $(p,q)\in\mathbb{R}^2$:
  - si $p^2-4q \geqslant 0$, mettre sous forme canonique :
  $$\left(X^2+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4},$$
  puis terminer la factorisation à l'aide de l'identité remarquable sur A^2-B^2
  - si $p^2-4q<0$, donc $q>0$, grouper X^4 et q pour débuter un carré :
  $$\left(X^2+\sqrt{q}\right)^2-\left(2\sqrt{q}-p\right)X^2,$$
  puis terminer la factorisation à l'aide de l'identité remarquable sur A^2-B^2.
- Dans le cas d'un polynôme réciproque, faire intervenir $Y=X+\dfrac{1}{X}$, et donc passer par les fractions rationnelles.
- Essayer d'utiliser les identités remarquables : formule du binôme de Newton, sommation géométrique.
- Éventuellement, en dernier recours, passer par les nombres complexes, puis regrouper deux par deux les facteurs conjugués.

➟ **Exercices 16.1, 16.4, 16.5**

Exemple

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:
$$A=X^4+3X^2+2,$$
$$B=X^4+X^2+1,$$
$$C=(X^2-X+1)^2+1.$$

- On a : $A=(X^2+1)(X^2+2)$

et les deux trinômes obtenus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- On a : $B=(X^2+1)^2-X^2=(X^2-X+1)(X^2+X+1)$

et les deux trinômes obtenus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- Pour C, passons par les nombres complexes :
$$C=(\underbrace{X^2-X+1+\mathrm{i}}_{\text{noté } Q})(\underbrace{X^2-X+1-\mathrm{i}}_{\text{noté } R}).$$

Le discriminant Δ de Q est :
$$\Delta=1-4(1+\mathrm{i})=-3-4\mathrm{i}=(1-2\mathrm{i})^2,$$
donc les zéro de Q dans $\mathbb{C}$ sont :
$$\frac{1+(1-2\mathrm{i})}{2}=1-\mathrm{i}\quad\text{et}\quad\frac{1-(1-2\mathrm{i})}{2}=\mathrm{i},$$
d'où : $Q=\big(X-(1-\mathrm{i})\big)(X-\mathrm{i})$.

De même, ou par conjugaison : $R=\big(X-(1+\mathrm{i})\big)(X+\mathrm{i})$.

D'où :
$$\begin{aligned}P&=\big[(X-1+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})\big]\big[(X-1-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})\big]\\&=\big[(X-1+\mathrm{i})(X-1-\mathrm{i})\big]\big[(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})\big]\\&=\big[(X-1)^2+1\big](X^2+1)=(X^2-2X+2)(X^2+1)\end{aligned}$$
et les deux trinômes obtenus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Méthode

Pour décomposer une fraction rationnelle F de $\mathbb{K}(\mathrm{X})$ en éléments simples

Commencer par éventuellement simplifier F, et obtenir $F = \dfrac{P}{Q}$ où $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] - \{0\}$, et où Q est factorisé en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}$.

Écrire la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{K}(\mathrm{X})$, avec des coefficients indéterminés.

Calculer les coefficients de cette décomposition en éléments simples :

- la partie entière est le quotient de la division euclidienne de P par Q
- remarquer une éventuelle parité ou imparité
- utiliser la méthode de multiplication puis remplacement
- pour calculer les éventuels coefficients restants, prendre la valeur en certains points, ou une limite en l'infini (après avoir multiplié par une puissance convenable de X), ou bien faire passer les termes connus de l'autre côté de l'égalité de décomposition en éléments simples.

➟ **Exercice 16.9**

Exemple

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{\mathrm{X}^2+1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)},$$

$$G = \frac{\mathrm{X}^2-1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)}.$$

• La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ est de la forme : $F = \dfrac{\mathrm{X}^2+1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)} = E + \dfrac{a}{\mathrm{X}} + \dfrac{b}{\mathrm{X}-1}$,

où $E \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est à calculer.

On calcule E par division euclidienne de X^2+1 par $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}$ et on obtient : $E = 1$.

On multiplie par X puis on remplace X par 0, d'où : $-1 = a$.

On multiplie par $\mathrm{X}-1$ puis on remplace X par 1, d'où : $2 = b$.

On conclut : $F = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{X}} + \dfrac{2}{\mathrm{X}-1}$.

• La partie entière de G est nulle, donc la décomposition en éléments simples de G dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ est de la forme :

$$G = \frac{\mathrm{X}^2-1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)} = \frac{a}{\mathrm{X}} + \frac{b\mathrm{X}+c}{\mathrm{X}^2+1},$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est à déterminer.

On multiplie par X puis on remplace X par 0, d'où : $-1 = a$.

On multiplie par X^2+1 puis on remplace X par i, d'où : $\dfrac{-2}{\mathrm{i}} = b\,\mathrm{i} + c$, donc : $b = 2$ et $c = 0$.

On conclut : $G = -\dfrac{1}{\mathrm{X}} + \dfrac{2\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2+1}$.

Méthode

Dans une étude faisant intervenir P et P', où P est scindé sur $\mathbb{K}$

Penser à utiliser éventuellement la formule du cours relative à la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$.

➟ **Exercice 16.13**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On note, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$:
$$\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}.$$
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2-\omega_k}$.

Considérons le polynôme $P = \mathrm{X}^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - \omega_k)$.

D'après le cours, puisque P est scindé sur $\mathbb{C}$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mathrm{X} - \omega_k} = \frac{P'}{P} = \frac{n\mathrm{X}^{n-1}}{\mathrm{X}^n - 1}.$$
En remplaçant X par 2, qui est bien différent des ω_k, on conclut :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 - \omega_k} = \frac{n2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

Énoncés des exercices

16.1 Exemple de zéro multiple d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. On note :
$$P_n = (n-1)\mathrm{X}^{2n} - 2(2n-1)\mathrm{X}^n + 2n^2\mathrm{X} - (2n^2 - 3n + 1) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}].$$
Montrer que 1 est zéro d'ordre trois exactement de P_n.

16.2 Étude de polynômes premiers entre eux

Soit $(A, B) \in \big(K[\mathrm{X}] - \{0\}\big)^2$. Montrer : $\quad A \wedge B = 1 \iff (A + B) \wedge (AB) = 1.$

16.3 Exemple d'étude de divisibilité en liaison avec les zéros d'un polynôme

Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ divise $(\mathrm{X}^4 + 1)^n - \mathrm{X}^n$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

16.4 Exemples de factorisations de polynômes dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ les polynômes suivants :

a) $\mathrm{X}^6 + 9\mathrm{X}^3 + 8$
b) $\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2 + 9$
c) $\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 - 6$
d) $(\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 1)^2 + (3\mathrm{X} - 5)^2$
e) $\mathrm{X}^5 + 1$
f) $\mathrm{X}^6 - 1$.

16.5 Exemple de factorisation dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, intervention de zéros rationnels

Factoriser $P = 2\mathrm{X}^4 - 3\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 - 13\mathrm{X} + 6$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, sachant que P admet deux zéros rationnels.

16.6 Exemple d'étude de deux polynômes ayant deux zéros communs

Déterminer une CNS sur $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ pour que les deux polynômes

$$A = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + a, \qquad B = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 + b$$

de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ aient au moins deux zéros communs.

16.7 Exemple de calcul d'un polynôme

Trouver tous les polynômes de degré 3 de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que :

$$P(\mathrm{j}) = \mathrm{j}^2, \qquad P(\mathrm{j}^2) = \mathrm{j}, \qquad P'(\mathrm{j}) = \mathrm{j}, \qquad P'(\mathrm{j}^2) = \mathrm{j}^2.$$

16.8 Condition pour qu'un polynôme de degré 4 soit le carré d'un polynôme de degré 2

a) Déterminer une CNS sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que le polynôme

$$P = \mathrm{X}^4 + a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + 12\mathrm{X} + 9$$

soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b) Dans ce cas, factoriser P et $P-1$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

16.9 Exemples de décompositions en éléments simples

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ les fractions rationnelles F suivantes :

a) $\dfrac{\mathrm{X}^3}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)}$ *b)* $\dfrac{\mathrm{X}}{(\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+2)}$ *c)* $\dfrac{\mathrm{X}^5+1}{\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)^2}$ *d)* $\dfrac{\mathrm{X}^4+\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)^3}$.

16.10 Exemple de divisibilité de polynômes, utilisation du théorème de Gauss

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$, $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^{kn} \in K[\mathrm{X}]$. Montrer : $P \mid Q$.

16.11 Pgcd de $\mathrm{X}^a - 1$ et $\mathrm{X}^b - 1$

Soient $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\delta = a \wedge b$. Montrer, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$: $(\mathrm{X}^a - 1) \wedge (\mathrm{X}^b - 1) = \mathrm{X}^\delta - 1$.

16.12 Exemple d'équation dont les inconnues sont deux polynômes

Soient $(a,b) \in \big(\mathbb{N} - \{0,1\}\big)^2$, $(P,Q) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2$ tels que $P^a - Q^b = 1$.
Montrer que P et Q sont constants.

16.13 Exemple d'utilisation de la formule portant sur $\dfrac{P'}{P}$

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$.

a) Montrer que, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P'^2 - PP'')(x) \geqslant 0$.

b) Ce résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que P est scindé sur $\mathbb{R}$?

16.14 Polynômes réels positifs

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0$ (ii) $\exists (A,B) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2, \quad P = A^2 + B^2$.

Du mal à démarrer ?

16.1 Montrer :
$$P_n(1) = 0,\ P_n'(1) = 0,\ P_n''(1) = 0,\ P_n^{(3)}(1) \neq 0.$$

16.2 Séparer l'équivalence logique demandée en deux implications.

16.3 Utiliser les zéros complexes j et j^2 de $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$.

16.4 *a)* Remarquer qu'il s'agit d'un trinôme en X^3.

b)

c) Il s'agit de trinômes bicarrés. On peut donc appliquer la méthode du cours, qui consiste à grouper deux des trois termes pour faire apparaître un début de carré parfait.

d) Passer par les nombres complexes, en remarquant que, pour tout $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2$:
$$P^2 + Q^2 = (P + \mathrm{i}\,Q)(P - \mathrm{i}\,Q).$$

e) Factoriser d'abord par $\mathrm{X} + 1$. L'autre facteur est un polynôme réciproque. Utiliser la notation $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + \dfrac{1}{\mathrm{X}}$.

f) Factoriser d'abord par $\mathrm{X}^2 - 1$. L'autre facteur est un trinôme bicarré.

Dans chaque exemple, on contrôlera le résultat obtenu, en développant le produit.

16.5 Noter $x = \dfrac{p}{q}$ un zéro rationnel de P, où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Déduire $p \mid 6$ et $q \mid 2$, en utilisant le théorème de Gauss. On obtiendra 2 et $\dfrac{1}{2}$ comme zéros rationnels de P.

16.6 Envisager le pgcd de A et B dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

16.7 Travailler d'abord sur P' (qui est de degré 2) et pour lequel on connaît la valeur en deux points, puis sur P par primitivation.

16.8 *a)* Si P est le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, alors celui-ci est de la forme $\mathrm{X}^2 + \dfrac{a}{2}\mathrm{X} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

b) Utiliser les résultats obtenus dans la résolution de *a)*.

16.9 *a)* Ne pas oublier la partie entière, que l'on calculera, par exemple, par division euclidienne.

b) Une fois obtenus deux des trois coefficients, on pourra calculer le troisième en faisant tendre X vers l'infini, après avoir multiplié par X.

c) Ne pas oublier la partie entière, que l'on calculera, par exemple, par division euclidienne. Une fois obtenus deux des quatre coefficients, on pourra calculer les deux autres en faisant passer les termes connus de l'autre côté de l'égalité.

d) Calculer d'abord le coefficient relatif au pôle 0, puis faire passer ce terme de l'autre côté de l'égalité, et enfin utiliser des divisions euclidiennes successives.

16.10 Remarquer :
$(\mathrm{X} - 1)P = \mathrm{X}^{n+1} - 1$ et $(\mathrm{X}^n - 1)Q = (\mathrm{X}^n)^{n+1} - 1$.

16.11 En supposant, par exemple, $a \geqslant b$, effectuer la division euclidienne de a par b (dans $\mathbb{N}^*$) et la division euclidienne de $\mathrm{X}^a - 1$ par $\mathrm{X}^b - 1$ (dans $K[\mathrm{X}]$) en parallèle.

16.12 Montrer d'abord $P \wedge Q = 1$.

En dérivant dans l'égalité de l'énoncé, déduire $P \mid Q'$ et $Q \mid P'$, puis raisonner sur les degrés.

16.13 *a)* Utiliser la formule du cours portant sur $\dfrac{P'}{P}$ puis dériver.

b) Trouver un contrexemple.

16.14 Séparer l'équivalence logique en deux implications.

Pour l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii), utiliser la décomposition primaire de P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et montrer, en notant
$F = \big\{P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\,;\ \exists\,(A, B) \in \big(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\big)^2,\ P = A^2 + B^2\big\}$,
que F est stable par multiplication.

Corrigés des exercices

16.1

On calcule :

- $P_n(1) = (n-1) - 2(2n-1) + 2n^2 - (2n^2 - 3n + 1) = 0$
- $P_n' = 2n(n-1)X^{2n-1} - 2n(2n-1)X^{n-1} + 2n^2$,

donc $P_n'(1) = 2n(n-1) - 2n(2n-1) + 2n^2 = 0$

- $P_n'' = 2n(n-1)(2n-1)X^{2n-2} - 2n(2n-1)(n-1)X^{n-2}$
$= 2n(2n-1)(n-1)(X^{2n-2} - X^{n-2})$,

donc $P_n''(1) = 0$

- $P_n^{(3)} = 2n(2n-1)(n-1)\big((2n-2)X^{2n-3} - (n-2)X^{n-3}\big)$,

donc $P_n^{(3)}(1) = 2n(2n-1)(n-1)n \neq 0$.

Ainsi : $P_n(1) = 0,\quad P_n'(1) = 0,\quad P_n''(1) = 0,\quad P_n^{(3)}(1) \neq 0$.

On conclut, d'après un théorème du cours, que 1 est zéro d'ordre trois exactement de P_n.

16.2

$\Longrightarrow$: Puisque $A \wedge B = 1$,

on a $\begin{cases}(A+B)\wedge A = 1\\(A+B)\wedge B = 1\end{cases}$ donc $(A+B)\wedge(AB) = 1$.

$\Longleftarrow$: Puisque $A \wedge B$ divise A et B, $A \wedge B$ divise $A+B$ et AB, donc $A \wedge B = 1$.

16.3

Notons $A = X^2 + X + 1$ et $P_n = (X^4+1)^n - X^n$.

Comme $A = (X - \mathrm{j})(X - \mathrm{j}^2)$ dans $\mathbb{C}[X]$, A est scindé simple sur $\mathbb{C}$, donc : $A \mid P_n \iff \big(P_n(\mathrm{j}) = 0 \quad\text{et}\quad P_n(\mathrm{j}^2) = 0\big)$.

De plus, comme $P_n \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P_n(\mathrm{j}^2) = P_n(\overline{\mathrm{j}}) = \overline{P_n(\mathrm{j})}$,

donc : $A \mid P_n \iff P_n(\mathrm{j}) = 0$.

Et :

$$P_n(\mathrm{j}) = 0 \iff (\mathrm{j}^4+1)^n - \mathrm{j}^n = 0 \iff (\mathrm{j}+1)^n = \mathrm{j}^n$$
$$\iff (-\mathrm{j}^2)^n = \mathrm{j}^n \iff \big(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\big)^n = \big(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\big)^n$$
$$\iff \frac{n\pi}{3} \equiv \frac{2n\pi}{3}\ [2\pi] \iff \frac{n\pi}{3} \equiv 0\ [2\pi] \iff n \equiv 0\ [6].$$

On conclut que l'ensemble des n convenant est l'ensemble des multiples de 6 dans $\mathbb{N}^*$.

16.4

a) Il s'agit d'un trinôme en X^3 :

$$X^6 + 9X^3 + 8 = (X^3+1)(X^3+8)$$
$$= (X+1)(X^2 - X + 1)(X+2)(X^2 - 2X + 4).$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, car de discriminants < 0.

b) Il s'agit d'un trinôme bicarré :

$$X^4 - 2X^2 + 9 = (X^2+3)^2 - 8X^2$$
$$= (X^2 + 3 - 2\sqrt{2}X)(X^2 + 3 + 2\sqrt{2}X)$$
$$= (X^2 - 2\sqrt{2}X + 3)(X^2 + 2\sqrt{2}X + 3).$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, car de discriminants < 0.

c) Il s'agit d'un trinôme bicarré :

$$X^4 + X^2 - 6 = (X^2-2)(X^2+3) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2+3).$$

d) Passons par les nombres complexes :

$$(X^2 - 4X + 1)^2 + (3X-5)^2$$
$$= \big((X^2 - 4X + 1) + \mathrm{i}(3X-5)\big)\big((X^2 - 4X + 1) - \mathrm{i}(3X-5)\big)$$
$$= \big(\underbrace{X^2 - (4 - 3\mathrm{i})X + (1 - 5\mathrm{i})}_{\text{noté } Q}\big)\big(\underbrace{X^2 - (4 + 3\mathrm{i})X + (1 + 5\mathrm{i})}_{\text{c'est } \overline{Q}}\big).$$

Le polynôme Q est du second degré. Son discriminant est :

$$\Delta = (4 - 3\mathrm{i})^2 - 4(1 - 5\mathrm{i}) = 3 - 4\mathrm{i} = (2 - \mathrm{i})^2.$$

Les zéros de Q dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\frac{4 - 3\mathrm{i} - (2 - \mathrm{i})}{2} = 1 - \mathrm{i} \quad\text{et}\quad \frac{4 - 3\mathrm{i} + (2 - \mathrm{i})}{2} = 3 - 2\mathrm{i}.$$

D'où : $Q = \big(X - (1 - \mathrm{i})\big)\big(X - (3 - 2\mathrm{i})\big)$,

puis :

$$\begin{aligned}
P &= Q\overline{Q}\\
&= \Big[\big(X-(1-\mathrm{i})\big)\big(X-(3-2\mathrm{i})\big)\Big]\Big[\big(X-(1+\mathrm{i})\big)\big(X-(3+2\mathrm{i})\big)\Big]\\
&= \Big[\big(X-(1-\mathrm{i})\big)\big(X-(1+\mathrm{i})\big)\Big]\Big[\big(X-(3-2\mathrm{i})\big)\big(X-(3+2\mathrm{i})\big)\Big]\\
&= \Big[\big((X-1)+\mathrm{i}\big)\big((X-1)-\mathrm{i}\big)\Big]\Big[\big((X-3)+2\mathrm{i}\big)\big((X-3)-2\mathrm{i}\big)\Big]\\
&= \big((X-1)^2+1\big)\big((X-3)^2+4\big)\\
&= (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 6X + 13).
\end{aligned}$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, car de discriminants < 0.

e) On a : $X^5 + 1 = (X+1)(\underbrace{X^4 - X^3 + X^2 - X + 1}_{\text{noté } P})$.

Le polynôme P est réciproque. On a, en passant par les fractions rationnelles :

$$P = X^2\Big(X^2 - X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}\Big) = X^2\Big(\Big(X^2 + \frac{1}{X^2}\Big) - \Big(X + \frac{1}{X}\Big) + 1\Big).$$

En notant $Y = X + \dfrac{1}{X}$, on obtient :

$$P = X^2\big((Y^2 - 2) - Y + 1\big) = X^2(Y^2 - Y - 1).$$

On factorise, dans $\mathbb{R}[Y]$, le trinôme du second degré apparu, et on revient à la notation X :

$$\begin{aligned}
P &= X^2\Big(Y - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(Y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)\\
&= X^2\Big(X + \frac{1}{X} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(X + \frac{1}{X} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \Big(\mathrm{X}^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{X} + 1\Big)\Big(\mathrm{X}^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathrm{X} + 1\Big).$$

On conclut :

$$\mathrm{X}^5 + 1 = (\mathrm{X}+1)\Big(\mathrm{X}^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{X} + 1\Big)\Big(\mathrm{X}^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathrm{X} + 1\Big).$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, car de discriminants < 0.

f) 1re méthode :

On a :

$$\mathrm{X}^6 - 1 = (\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1).$$

On factorise le trinôme bicarré obtenu :

$$\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 + 1 = (\mathrm{X}^2+1)^2 - \mathrm{X}^2$$
$$= \big((\mathrm{X}^2+1) - \mathrm{X}\big)\big((\mathrm{X}^2+1) + \mathrm{X}\big) = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1).$$

On conclut :

$$\mathrm{X}^6 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1).$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, car de discriminants < 0.

2è méthode :

Les zéros de $\mathrm{X}^6 - 1$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines sixièmes de 1, qui sont $1,\ -1,\ \mathrm{j},\ -\mathrm{j},\ \mathrm{j}^2,\ -\mathrm{j}^2$, donc :

$$\mathrm{X}^6 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)\big((\mathrm{X}-\mathrm{j})(\mathrm{X}-\mathrm{j}^2)\big)\big((\mathrm{X}+\mathrm{j})(\mathrm{X}+\mathrm{j}^2)\big)$$
$$= (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1).$$

16.5

Soit $x \in \mathbb{Q},\ x = \dfrac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1.$

• On a :

$$P(x) = 0 \iff 2p^4 - 3p^3q + 3p^2q^2 - 13pq^3 + 6q^4 = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} p \mid 6q^4 \\ q \mid 2p^4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p \mid 6 \\ q \mid 2, \end{cases}$$

d'après le théorème de Gauss, puisque $p \wedge q = 1$.

Ceci montre que les éventuels zéros rationnels de P sont nécessairement de la forme $\dfrac{p}{q}$ où :

$$p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}, \quad q \in \{1,\ 2\}.$$

On essaie toutes les possibilités, ou on remarque que $P(2) = 0$ et $P\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = 0$.

• On peut donc factoriser P par $\mathrm{X} - 2$ et par $\mathrm{X} - \dfrac{1}{2}$, ou encore par $2\mathrm{X} - 1$:

$$P = (\mathrm{X}-2)(2\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2+5\mathrm{X}-3) = (\mathrm{X}-2)(2\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+3).$$

Le trinôme qui apparaît est irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ car son discriminant est < 0.

16.6

• Calculons le pgcd de A et B dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, par divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{r|c|c} & \mathrm{X} & \mathrm{X}+a \\ \hline \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 + b & \mathrm{X}^3 \qquad + \mathrm{X} + a & \mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} + b \\ \mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} + b & a\mathrm{X}^2 + (1-b)\mathrm{X} + a & \\ & (1-b+a^2)\mathrm{X} + (a-ab) & \end{array}$$

Si A et B ont au moins deux zéros communs, alors $\deg(A \wedge B) \geqslant 2$, donc : $(1-b+a^2)\mathrm{X} + (a-ab) = 0$,

d'où : $\begin{cases} 1 - b + a^2 = 0 \\ a - ab = 0 \end{cases}$ et donc $a = 0$ et $b = 1$.

• Réciproquement, pour $a = 0$ et $b = 1$, on a :

$$A = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 + 1 = (\mathrm{X}^2+1)^2,$$

donc A et B ont deux zéros communs dans $\mathbb{C}$, les nombres complexes i et $-\mathrm{i}$.

On conclut que A et B ont au moins deux zéros communs dans $\mathbb{C}$ si et seulement si : $(a,b) = (0,1)$.

16.7

Soit $P \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, de degré 3.

1) On a :

$$\begin{cases} P'(\mathrm{j}) = \mathrm{j} \\ P'(\mathrm{j}^2) = \mathrm{j}^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (P' - \mathrm{X})(\mathrm{j}) = 0 \\ (P' - \mathrm{X})(\mathrm{j}^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X} - \mathrm{j} \mid P' - \mathrm{X} \\ \mathrm{X} - \mathrm{j}^2 \mid P' - \mathrm{X} \end{cases}$$

$$\underset{\mathrm{j} \neq \mathrm{j}^2}{\iff} (\mathrm{X}-\mathrm{j})(\mathrm{X}-\mathrm{j}^2) \mid P' - \mathrm{X} \iff \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1 \mid P' - \mathrm{X}.$$

Comme de plus $P' - \mathrm{X}$ est de degré 2, si P convient, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que : $P' - \mathrm{X} = a(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$, d'où :

$$P' = a(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1) + \mathrm{X}.$$

En primitivant, si P convient, alors il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P = \frac{a}{3}\mathrm{X}^3 + \frac{a+1}{2}\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b.$$

2) On a alors, pour un tel polynôme P :

$$\begin{cases} P(\mathrm{j}) = \mathrm{j}^2 \\ P(\mathrm{j}^2) = \mathrm{j} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{a+1}{2}\mathrm{j}^2 + a\mathrm{j} + b = \mathrm{j}^2 \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{a+1}{2}\mathrm{j} + a\mathrm{j}^2 + b = \mathrm{j} \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{2a}{3} - \dfrac{a+1}{2} - a + 2b = -1 \\ \Big(\dfrac{a+1}{2} - a\Big)(\mathrm{j}^2 - \mathrm{j}) = \mathrm{j}^2 - \mathrm{j} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\dfrac{5a}{6} + 2b = -\dfrac{1}{2} \\ 1 - a = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

On conclut qu'il y a un polynôme P et un seul convenant :

$$P = -\tfrac{1}{3}\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - \tfrac{2}{3}.$$

On peut contrôler que P convient bien.

16.8

a) Pour que P soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, puisque P est de degré 4, il faut et il suffit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $P = \left(X^2 + \frac{a}{2}X + c\right)^2$ (1).

Et :

$$(1) \iff P = X^4 + aX^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2c\right)X^2 + acX + c^2$$

$$\iff \begin{cases} \frac{a^2}{4} + 2c = b \\ ac = 12 \\ c^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 3 \\ a = 4 \\ b = 10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} c = -3 \\ a = -4 \\ b = -2. \end{cases}$$

On conclut que P est le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si : $(a,b) = (4,10)$ ou $(a,b) = (-4,-2)$.

b) 1) Cas $(a,b) = (4,10)$:

On a alors $c = 3$, donc $P = (X^2 + 2X + 3)^2$ et :

$$P - 1 = (X^2 + 2X + 3)^2 - 1 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + 2X + 4)$$

et les trois trinômes du second degré qui apparaissent sont irréductibles puisque leurs discriminants sont < 0.

2) Cas $(a,b) = (-4,-2)$:

On a alors $c = -3$ et :

$$P = (X^2 - 2X - 3)^2 = \big((X+1)(X-3)\big)^2 = (X+1)^2(X-3)^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} P - 1 &= (X^2 - 2X - 3)^2 - 1 = (X^2 - 2X - 4)(X^2 - 2X - 2) \\ &= \big((X-1)^2 - 5\big)\big((X-1)^2 - 3\big) \\ &= (X - 1 - \sqrt{5})(X - 1 + \sqrt{5})(X - 1 - \sqrt{3})(X - 1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

16.9

a) La décomposition en éléments simples de F est de la forme : $F = E + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2}$,

où $E \in \mathbb{R}[X]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sont à calculer.

• La partie entière E est le quotient de la division euclidienne de X^3 par $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$:

$$\begin{array}{r|l} X^3 & X^2 - 3X + 2 \\ \cline{2-2} 3X^2 - 2X & \qquad X + 3 \\ 7X - 6 & \end{array}$$

On a donc : $E = X + 3$.

• On calcule a par multiplication par $X - 1$ puis remplacement de X par 1. On obtient : $a = -1$.

• On calcule b par multiplication par $X - 2$ puis remplacement de X par 2. On obtient : $b = 8$.

On conclut à la décomposition en éléments simples :

$$\frac{X^3}{(X-1)(X-2)} = X + 3 - \frac{1}{X-1} + \frac{8}{X-2}.$$

b) La décomposition de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est à calculer.

On calcule a par multiplication par $(X-1)^2$ puis remplacement de X par 1. On obtient : $a = \dfrac{1}{3}$.

• On calcule c par multiplication par $X+2$ puis remplacement de X par -2. On obtient : $c = -\dfrac{2}{9}$.

• Pour calculer ensuite b, on multiplie par X puis on fait tendre X vers l'infini. On obtient $0 = b + c$, donc $b = -c = \dfrac{2}{9}$.

On conclut à la décomposition en éléments simples :

$$\frac{X}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{X-1} - \frac{2}{9}\frac{1}{X+2}.$$

c) La partie entière est le quotient de la division euclidienne de $X^5 + 1$ par $X^2(X-1)^2$:

$$\begin{array}{r|l} X^5 \qquad\qquad +1 & X^4 - 2X^3 + X^2 \\ \cline{2-2} 2X^4 - X^3 \qquad +1 & \qquad\qquad X + 2 \\ 3X^3 - 2X^2 + 1 & \end{array}$$

La DES de la fraction rationnelle F proposée est de la forme :

$$F = X + 2 + \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X-1}, \quad a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}.$$

On calcule a par multiplication par X^2 puis remplacement de X par 0 : $a = 1$.

De même, par multiplication par $(X-1)^2$ puis remplacement de X par 1 : $c = 2$.

Puis :

$$\begin{aligned} \frac{b}{X} + \frac{d}{X-1} &= \big(F - (X+2)\big) - \frac{1}{X^2} - \frac{2}{(X-1)^2} \\ &= \frac{3X^3 - 2X^2 + 1}{X^2(X-1)^2} - \frac{1}{X^2} - \frac{2}{(X-1)^2} \\ &= \frac{3X^3 - 5X^2 + 2X}{X^2(X-1)^2} = \frac{3X - 2}{X(X-1)}. \end{aligned}$$

On calcule b par multiplication par X puis remplacement de X par 0 : $b = 2$.

De même, par multiplication par $X - 1$ puis remplacement de X par 1 : $d = 1$.

Finalement : $F = X + 2 + \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{2}{X} + \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{X-1}$.

d) La partie entière de la fraction rationnelle proposée est nulle, et la DES est de la forme :

$$F = \frac{\lambda}{X} + \frac{aX + b}{(X^2+1)^3} + \frac{cX + d}{(X^2+1)^2} + \frac{eX + f}{X^2 + 1},$$

où $\lambda,\ a, \dots, f \in \mathbb{R}$.

On calcule λ par multiplication par X puis remplacement de X par 0 : $\lambda = 1$.

Puis :

$$\begin{aligned} F - \frac{1}{X} &= \frac{X^4 + X + 1 - (X^2+1)^2}{X(X^2+1)^3} \\ &= \frac{-X^6 - 2X^4 - 3X^2 + X}{X(X^2+1)^3} = \frac{-X^5 - 2X^3 - 3X + 1}{(X^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Par divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{r|l} -\mathrm{X}^5-2\mathrm{X}^3-3\mathrm{X}+1 & \mathrm{X}^2+1 \\ \cline{2-2} -\mathrm{X}^3-3\mathrm{X}+1 & -\mathrm{X}^3-\mathrm{X} \\ -2\mathrm{X}+1 & \qquad\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \mathrm{X}^2+1 \\ \hline \quad -\mathrm{X} \end{array}$$

D'où : $a=-2,\ b=1,\ c=0,\ d=0,\ e=-1,\ f=0.$

Finalement : $F=\dfrac{1}{\mathrm{X}}+\dfrac{-2\mathrm{X}+1}{(\mathrm{X}^2+1)^3}-\dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2+1}.$

16.10

1) On a :

$$(\mathrm{X}^n-1)Q=(\mathrm{X}^n-1)\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{X}^n)^k=(\mathrm{X}^n)^{n+1}-1$$
$$=(\mathrm{X}^{n+1})^n-1=(\mathrm{X}^{n+1}-1)S,$$

en notant $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{X}^{n+1})^k\in K[\mathrm{X}].$

Ceci montre : $\mathrm{X}^{n+1}-1 \mid (\mathrm{X}^n-1)Q.$

2) Montrons : $(\mathrm{X}^n-1)\wedge(\mathrm{X}^{n+1}-1)=\mathrm{X}-1.$

• On sait : $\mathrm{X}-1 \mid \mathrm{X}^n-1$ et $\mathrm{X}-1 \mid \mathrm{X}^{n+1}-1$,
donc : $\mathrm{X}-1 \mid (\mathrm{X}^n-1)\wedge(\mathrm{X}^{n+1}-1).$

• D'autre part : $\mathrm{X}^{n+1}-1=\mathrm{X}(\mathrm{X}^n-1)+(\mathrm{X}-1)$,
donc, si un polynôme D de $K[\mathrm{X}]$ divise X^n-1 et divise $\mathrm{X}^{n+1}-1$, alors D divise $\mathrm{X}-1$.

Ceci montre : $(\mathrm{X}^n-1)\wedge(\mathrm{X}^{n+1}-1)=\mathrm{X}-1.$

3) En notant $T=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{X}^k$, on a donc :

$$\mathrm{X}^{n+1}-1=(\mathrm{X}-1)P,\ \mathrm{X}^n-1=(\mathrm{X}-1)T,$$

et $\big((\mathrm{X}-1)P\big)\wedge\big((\mathrm{X}-1)T\big)=\mathrm{X}-1$, donc $P\wedge T=1.$

On a : $(\mathrm{X}-1)P \mid (\mathrm{X}-1)TQ$, c'est-à-dire : $P \mid TQ.$

Comme $P\wedge T=1$, il en résulte, d'après le théorème de Gauss :

$$P \mid Q.$$

16.11

Il est clair que l'on peut supposer $a\geqslant b$.

Effectuons la division euclidienne de a par b dans $\mathbb{N}^*$:

$$a=bq+r,\quad (q,r)\in\mathbb{N}^2,\quad 0\leqslant r<b,$$

puis celle de X^a-1 par X^b-1 :

$$\begin{array}{lr|l} \mathrm{X}^a & -1 & \qquad\qquad \mathrm{X}^b-1 \\ \cline{3-3} \quad \mathrm{X}^{a-b} & -1 & \mathrm{X}^{a-b}+\cdots\cdots+\mathrm{X}^{a-qb} \\ \qquad \ddots & \vdots & \\ \qquad\quad \mathrm{X}^{a-qb} & -1 & \end{array}$$

Ceci montre que le reste de la division euclidienne de X^a-1 par X^b-1 dans $K[\mathrm{X}]$ est X^r-1.

Ainsi, les algorithmes d'Euclide pour (a,b) dans $\mathbb{Z}$ et pour $(\mathrm{X}^a-1,\mathrm{X}^b-1)$ dans $K[\mathrm{X}]$ sont menés simultanément.

Le dernier reste non nul, dans la suite des divisions euclidiennes donnant le pgcd de X^a-1 et X^b-1 est donc $\mathrm{X}^\delta-1$, d'où : $(\mathrm{X}^a-1)\wedge(\mathrm{X}^b-1)=\mathrm{X}^\delta-1.$

16.12

• Puisque $PP^{a-1}+Q(-Q^{b-1})=1$, d'après le théorème de Bézout : $P\wedge Q=1$.

• D'autre part, puisque $P^a-Q^b=1$, en dérivant, on déduit : $aP^{a-1}P'=bQ^{b-1}Q'$.

Comme $a-1\in\mathbb{N}^*$, on a $P \mid P^{a-1}$, donc $P \mid bQ^{b-1}Q'$.

Comme $P\wedge Q=1$, on a $P\wedge(bQ^{b-1})=1$, puis, d'après le théorème de Gauss : $P \mid Q'$.

De même, par rôles symétriques de (P,a) et (Q,b), on obtient :

$$Q \mid P'.$$

• Si P et Q ne sont pas constants, alors $\deg(P')=\deg(P)-1$ et $\deg(Q')=\deg(Q)-1$, d'où, d'après le résultat précédent :

$$\deg(P)\leqslant\deg(Q)-1 \quad\text{et}\quad \deg(Q)\leqslant\deg(P)-1,$$

contradiction.

Ceci montre que P ou Q est constant.

• Si, par exemple, P est constant, alors $Q^b=P^a-1$ est constant, $\deg(Q^b)=0$, puis $b\deg(Q)=0$ donc $\deg(Q)=0$, et on déduit que Q est constant.

Finalement, P et Q sont constants.

16.13

a) Puisque P est scindé sur $\mathbb{R}$, en notant $n=\deg(P)$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*,\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ tels que : $P=\lambda\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-x_k)$.

On a alors, d'après le cours, dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$: $\dfrac{P'}{P}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\mathrm{X}-x_k}.$

En dérivant, on déduit : $\left(\dfrac{P'}{P}\right)'=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}-\dfrac{1}{(\mathrm{X}-x_k)^2},$

c'est-à-dire : $\dfrac{P''P-P'^2}{P^2}=-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(\mathrm{X}-x_k)^2}.$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

• Si x n'est pas un zéro de P, c'est-à-dire si, pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $x\neq x_k$, alors on peut remplacer X par x_k dans le résultat précédent, d'où :

$$(P'^2-PP'')(x)=\big(P(x)\big)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}>0.$$

• Si x est zéro de P, alors : $(P'^2-PP'')(x)=\big(P'(x)\big)^2\geqslant 0.$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R},\ (P'^2-PP'')(x)\geqslant 0.$

b) Le résultat précédent ne s'étend pas à tous les polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ (non constants).

Par exemple, pour $P=\mathrm{X}^2+1$, qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, on a : $P'=2\mathrm{X},\ P''=2$, donc

$$P'^2-PP''=4\mathrm{X}^2-2(\mathrm{X}^2+1)=2\mathrm{X}^2-2=2(\mathrm{X}^2-1),$$

et, en particulier : $(P'^2-PP'')\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$, ce qui montre qu'on n'a pas : $\forall x\in\mathbb{R},\ (P'^2-PP'')(x)\geqslant 0.$

16.14

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,;\ \forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) \geqslant 0\}$

et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,;\ \exists\,(A,B) \in (\mathbb{R}[X])^2,\quad P = A^2 + B^2\}$.

Il est clair que $F \subset E$, autrement dit : (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Réciproquement, soit $P \in E$.

Remarquons d'abord que F contient tous les polynômes de la forme M^2 pour tout $M \in \mathbb{R}[X]$, et que F est stable par multiplication, car, pour tous A, B, C, $D \in \mathbb{R}[X]$:

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$

Le cas où P est une constante étant d'étude immédiate, supposons $\deg(P) \geqslant 1$.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$, $x_1, ..., x_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $\alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbb{N}$, $(p_1, q_1), ..., (p_M, q_M) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall j \in \{1, ..., M\}$, $p_j^2 - 4q_j < 0$

et $P = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{N} (X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{M} (X^2 + p_j X + q_j)$.

Puisque $P \in E$, on déduit, en faisant tendre la variable vers $+\infty$: $\lambda > 0$.

D'autre part, pour chaque $i \in \{1, ..., N\}$, α_i est pair, car sinon, P changerait strictement de signe au voisinage de x_i. Pour chaque $i \in \{1, ..., N\}$, il existe donc $\beta_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_i = 2\beta_i$.

En notant :

$$Q = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{N} (X - x_i)^{\beta_i} \quad \text{et} \quad S = \prod_{j=1}^{M} (X^2 + p_j X + q_j),$$

on a donc : $P = Q^2 S$.

D'autre part, par mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré, on a, pour tout $j \in \{1, ..., M\}$:

$$X^2 + p_j X + q_j = \left(X + \frac{p_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{4q_j - p_j^2}\right)^2 \in F.$$

Comme F est stable par multiplication, on déduit $S \in F$, puis : $P = Q^2 S \in F$.

Vrai ou Faux ?

16.1 L'ensemble des diviseurs communs à deux polynômes A, B de $\mathbb{K}[\mathrm{X}] - \{0\}$ est égal à l'ensemble des diviseurs du pgcd de A et B. **V F**

16.2 Pour tous polynômes A, B de $\mathbb{K}[\mathrm{X}] - \{0\}$, on a : $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$. **V F**

16.3 Si deux polynômes A, B de $\mathbb{R}[\mathrm{X}] - \{0\}$ n'ont pas de zéro réel commun, alors $A \wedge B = 1$. **V F**

16.4 Si deux polynômes A, B de $\mathbb{C}[\mathrm{X}] - \{0\}$ n'ont pas de zéro complexe commun, alors $A \wedge B = 1$. **V F**

16.5 Pour trois polynômes A, B, C de $\mathbb{K}[\mathrm{X}] \setminus \{0\}$, si A divise BC et si $A \wedge B = 1$, alors A divise C. **V F**

16.6 Si un polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ n'a pas de zéro réel, alors P est irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. **V F**

16.7 La décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)}$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est de la forme $F = \dfrac{a}{\mathrm{X}} + \dfrac{b}{\mathrm{X}^2+1}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. **V F**

16.8 La décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{\mathrm{X}^3}{\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2}$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est de la forme $F = \dfrac{a}{\mathrm{X}-1} + \dfrac{b}{\mathrm{X}-2}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. **V F**

16.9 Si z_0 est un pôle simple de la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$, où $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] - \{0\}$, alors le coefficient de $\dfrac{1}{\mathrm{X} - z_0}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$. **V F**

16.10 Si $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - z_k)$ où $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$, alors la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est : $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\mathrm{X} - z_k}$. **V F**

Vrai ou Faux, les réponses

16.1 C'est un résultat du cours. **V**

16.2 Il y a eu oubli d'une hypothèse sur les coefficients dominants des polynômes. **F**

Un résultat correct est : pour tous polynômes unitaires A, B de $\mathbb{K}[X] - \{0\}$, on a : $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.

16.3 Contrexemple : $A = B = X^2 + 1$. **F**

16.4 En raisonnant par l'absurde, si $A \wedge B \neq 1$, alors $\deg(A \wedge B) \geqslant 1$, donc, comme $A \wedge B \in \mathbb{C}[X]$, $A \wedge B$ admet au moins un zéro $z_0 \in \mathbb{C}$, donc $(X - z_0) \mid A$ et $(X - z_0) \mid B$, contradiction avec l'hypothèse. **V**

16.5 C'est un résultat du cours, le théorème de Gauss. **V**

16.6 Contrexemple : $P = X^4 + X^2 + 1$ n'a pas de zéro réel, mais P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, car : $P = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$. **F**

16.7 D'après le cours, la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{bX + c}{X^2 + 1}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. **F**

Après calcul, on obtient $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, donc $F = \dfrac{1}{X} + \dfrac{X}{X^2 + 1}$.

16.8 Il y a eu oubli de la partie entière de F. **F**

La décomposition en éléments simples de F est de la forme $F = E + \dfrac{a}{X - 1} + \dfrac{b}{X - 2}$, où $E \in \mathbb{R}_1[X]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$;

Après calcul, on obtient : $E = X + 3$, $a = -1$, $b = 8$.

16.9 C'est un résultat du cours. **V**

16.10 C'est un résultat du cours. **V**

Chapitre 17

Espaces vectoriels

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'un ensemble est un ev, un sev
- Études d'intersections, de sommes, de sommes directes de sev
- Montrer que deux sev sont supplémentaires dans un ev
- Montrer qu'une famille de vecteurs est libre, qu'une famille est liée, qu'une famille est génératrice.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions et propriétés des ev et des sev
- Définitions et propriétés des combinaisons linéaires de vecteurs, des familles libres, des familles liées, des familles génératrices
- Définition et propriétés de l'intersection et de la somme de sev
- Définition et caractérisation d'une somme directe de sev
- Définition de deux sev supplémentaires dans un ev.

K désigne un corps commutatif.

On utilise les abréviations :

ev pour espace vectoriel,

sev pour sous-espace vectoriel.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble E muni de lois usuelles est un ev

Montrer que E est un sev d'un ev connu.

Exemple

a) Montrer que

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X]\,;\ P(1) = 0\}$$

est un $\mathbb{R}$-ev.

b) Est-ce que

$$G = \{P \in \mathbb{R}[X]\,;\ P(0) = 1\}$$

est un $\mathbb{R}$-ev ?

D'après le cours, $\mathbb{R}[X]$ est bien un $\mathbb{R}$-ev.

a) On a $F \subset \mathbb{R}[X]$, $0 \in F$ et, pour tous $a \in \mathbb{R}$, $P, Q \in F$:

$$(aP + Q)(1) = a\underbrace{P(1)}_{=0} + \underbrace{Q(1)}_{=0} = 0,$$

donc $aP + Q \in F$.

Ceci montre que F est un sev de $\mathbb{R}[X]$, donc F est un ev.

b) On a $0 \notin G$, donc G n'est pas un ev.

Méthode

Pour montrer qu'une partie F d'un ev E est un sev de E

Essayer de :

- revenir à la définition d'un sev, c'est-à-dire montrer que F n'est pas vide et que F est stable par addition et stable par loi externe
- montrer que F est une intersection de sev, ou est une somme de sev de E
- montrer que F est le sev de E engendré par une certaine famille, comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de cette famille
- montrer que F est le noyau ou l'image d'une certaine application linéaire (voir chapitre 19).

➟ **Exercice 17.4**

Exemple

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-ev des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

a) Montrer que

$F = \{(u_n)_n \in E\,;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\}$

est un sev de E.

b) Est-ce que

$$G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E\,;\ u_1 = 2\}$$

est un sev de E ?

a) On a : $F \subset E$, $0 \in F$ et, pour tous $a \in \mathbb{R}$, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad au_{n+1} + v_{n+1} = a(2u_n) + 2v_n = 2(au_n + v_n),$$

donc $au + v \in F$.
Ceci montre que F est un sev de E.

b) La suite constante nulle n'est pas dans G, donc G n'est pas un sev de E.

Méthode

Pour établir des relations (souvent des inclusions) entre sev d'un ev

Essayer de :

- passer par les éléments
- utiliser les propriétés des opérations sur les sev.

➟ **Exercices 17.3, 17.7**

Exemple

Soient E un K-ev, F, G, H des sev de E. Montrer :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$.
Il existe $u \in F \cap G$, $v \in F \cap H$ tels que $x = u + v$.
Puisque $u \in F$, $v \in F$ et que F est un sev de E, on a : $x \in F$.
Puisque $u \in G$ et $v \in H$, on a, par définition : $x \in G + H$.
On obtient : $x \in F \cap (G + H)$.

On conclut : $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.

Méthode

Pour montrer que deux sev F, G d'un ev E sont supplémentaires dans E

Essayer de montrer $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

➟ **Exercices 17.2, 17.6**

Voir aussi les méthodes à retenir du chapitre 18.

Exemple

Soient E un ev, A, B deux sev de E, C un sev de E supplémentaire de A dans E et tel que : $C \subset B$.

Montrer que C est un supplémentaire de $A \cap B$ dans B.

1) On a : $(A \cap B) \cap C = (C \cap A) \cap B = \{0\} \cap B = \{0\}$.

2) • On a : $A \cap B \subset B$ et $C \subset B$, donc, puisque B est un sev de E : $(A \cap B) + C \subset B$.

• Soit $b \in B$.
On a : $b \in B \subset E = A \oplus C$.
Il existe donc $a \in A$, $c \in C$ tels que : $b = a + c$.
On a : $a = b - c$, $b \in B$, $c \in C \subset B$ et B est un sev de E, donc : $a \in B$.

Ainsi : $b = a + c,\ a \in A \cap B,\ c \in C$.
Ceci montre : $B \subset (A \cap B) + C$.
On obtient : $(A \cap B) + C = B$.

On conclut : $A \cap B$ et C sont supplémentaires dans B.

Méthode

Pour montrer qu'une famille finie de vecteurs d'un ev E est libre

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que, si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle, alors nécessairement tous les coefficients sont nuls.

➟ **Exercice 17.5**

Voir aussi les méthodes à retenir des chapitres 18 à 20.

Exemple

On note, dans $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1,1,0),\ v = (1,0,1),\ w = (1,1,1).$$

Montrer que la famille $(u,\ v,\ w)$ est libre.

Soit $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au + bv + cw = 0$.
On a alors : $a + b + c = 0,\quad a + c = 0,\quad b + c = 0$,
d'où, par soustraction, $b = 0$, puis $c = 0$ et $a = 0$.

On conclut : la famille $(u,\ v,\ w)$ est libre.

Méthode

Pour montrer qu'une famille de fonctions est libre pour les lois usuelles

Revenir à la définition de famille libre, et, suivant les exemples, essayer de :

- remplacer la variable par des valeurs particulières
- utiliser des passages à la limite
- dériver une ou plusieurs fois, ou primitiver
- utiliser des développements limités.

➟ **Exercice 17.5**

Exemple

On considère les applications

$$f,\ g,\ h :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

définies, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x, \qquad g(x) = \ln(2x),$$
$$h(x) = \ln(3x).$$

a) Est-ce que la famille $(f,\ g)$ est libre ?

b) Est-ce que la famille $(f,\ g,\ h)$ est libre ?

a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $af + bg = 0$.
On a alors : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad a\ln x + b\ln(2x) = 0$.
En remplaçant x par 1, on déduit $b = 0$, d'où :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad a\ln x = 0.$$

En remplaçant x par 2, on déduit $a = 0$.

On conclut que la famille $(f,\ g)$ est libre.

b) On remarque : $g = \ln 2 + f, \qquad h = \ln 3 + f$,
d'où : $\quad (\ln 3)(g - f) = (\ln 3)(\ln 2) = (\ln 2)(h - f)$.
Ainsi : $\qquad (\ln 2 - \ln 3)f + (\ln 3)g - (\ln 2)h = 0$.

Comme, par exemple, $\ln 3 \neq 0$, ceci montre que la famille $(f,\ g,\ h)$ n'est pas libre, c'est-à-dire qu'elle est liée.

Méthode

Pour montrer qu'une famille finie de vecteurs est liée	Revenir à la définition, c'est-à-dire trouver une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle et dont les coefficients ne soient pas tous nuls

Exemple

On note $A = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$, $B = 1 + 2\mathrm{X} + 3\mathrm{X}^2$, $C = 1 + 3\mathrm{X} + 5\mathrm{X}^2$.

Montrer que la famille (A, B, C) est liée dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

On a : $B - A = \mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2$ et $C - B = \mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2$,
donc $B - A = C - B$, d'où $A - 2B + C = 0$.

Ceci montre que la famille (A, B, C) est liée.

Méthode

Pour montrer qu'un vecteur x d'un ev est dans le sev engendré par une famille $\mathcal{F}$	Montrer que x s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$. ➟ **Exercice 17.1**

Exemple

Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $x = (2, 1, 7)$ est dans le sev engendré par les deux vecteurs $y = (1, 1, 2)$ et $z = (1, 2, -1)$.

Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de façon que $x = ay + bz$.
On a :

$$\begin{aligned} x = ay + bz &\iff (2, 1, 7) = a(1, 1, 2) + b(1, 2, -1) \\ &\iff (2, 1, 7) = (a + b, a + 2b, 2a - b) \\ &\iff \begin{cases} a + b = 2 \\ a + 2b = 1 \\ 2a - b = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1 \\ a = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi : $x = 3y - z$, donc x est dans le sev engendré par y et z.

Énoncés des exercices

17.1 Exemple de deux familles de deux vecteurs engendrant le même sev

Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $\overrightarrow{x} = (1,\ 1,\ 0)$ et $\overrightarrow{y} = (1,\ 0,\ 1)$ engendrent le même sev que les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,\ 3,\ -2)$ et $\overrightarrow{v} = (1,\ 4,\ -3)$.

17.2 Supplémentaires et intersection

Soient E un K-ev, A, B des sev de E, C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B, c'est-à-dire un sev de E tel que : $(A \cap B) \oplus C = B$. Montrer que A et C sont supplémentaires dans $A + B$.

17.3 Intersection et somme de sev

Soient E un K-ev, F, G, H des sev de E.

On suppose : $\quad F \cap G \subset F \cap H, \qquad F + G \subset F + H, \qquad H \subset G.$

Montrer : $H = G$.

17.4 Étude d'une partie de $\mathbb{K}^3$ définie par une équation homogène de degré 2

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note : $E_{\mathbb{K}} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3\ ;\ \ x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0\big\}$.

Est-ce que E est un $\mathbb{K}$-ev ?

17.5 Exemples d'études de liberté de familles finies de fonctions

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 < ... < a_n$. La famille d'applications $(f_{a_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est-elle libre ou est-elle liée, dans les exemples suivants :

a) $f_{a_i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |x - a_i|$

b) $f_{a_i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{a_i x}$

c) $f_{a_i} : \mathbb{R} - \{a_1, ..., a_n\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x - a_i}$.

17.6 Exemple de deux sev supplémentaires dans un ev, dans le contexte de l'analyse

On note $E = C^1([0\,;\,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de classe C^1 sur $[0\,;\,1]$ et à valeurs réelles, $F = \left\{f \in E\,;\ \int_0^1 f = 0,\ \ f(0) = 0,\ \ f'(1) = 0\right\}$, $e_k\ :\ [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^k$ pour $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$, $G = \big\{a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2\ ;\ (a_0,\ a_1,\ a_2) \in \mathbb{R}^3\big\}$.

Montrer que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

17.7 Étude du cas où la réunion de deux sev est un sev

Soient E un K-ev, A, B deux sev de E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \cup B$ est un sev de E $\qquad$ (ii) $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Du mal à démarrer ?

17.1 Montrer que $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ se décomposent linéairement sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ se décomposent linéairement sur $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$.

17.2 Revenir à la définition de deux sev supplémentaires dans un ev, en montrant :

$$A \cap C = \{0\} \quad \text{et} \quad A + C = A + B.$$

17.3 Partir d'un élément quelconque x de G et exploiter les hypothèses.

Pour exploiter $x \in F + H$, décomposer x en somme d'un élément de F et d'un élément de H : avoir l'initiative de prendre des notations.

17.4 Remarquer que la condition proposée revient à :

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = 0.$$

Utiliser, pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$:

$a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$a^2 + b^2 = 0 \iff \big(a + \mathrm{i}\, b = 0$ ou $a - \mathrm{i}\, b = 0\big)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

17.5 Montrer que, pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$, alors : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_i = 0$.

a) Remarquer que f_{a_n} n'est pas dérivable en a_n, tandis que $f_{a_1}, ..., f_{a_{n-1}}$ sont dérivables en a_n.

b) Multiplier par $\mathrm{e}^{-a_n x}$ puis faire tendre x vers $+\infty$.

c) Isoler f_{a_n} et étudier la limite lorsque x tend vers a_i.

17.6 *1)* Remarquer que G est donné comme sev engendré par une certaine famille de E.

2) Pour montrer que F est un sev de E, revenir à la définition d'un sev.

3) Montrer : $F \cap G = \{0\}$.

4) Pour $u \in E$ donnée, chercher $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$, en cherchant d'abord g.

17.7 L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est immédiate.

Pour (i) $\Longrightarrow$ (ii), raisonner par l'absurde.

Corrigés des exercices

17.1

1) Il est clair, par exemple, que $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{x} - 3\overrightarrow{y}$. Ceci montre que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ se décomposent linéairement sur $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$, donc : $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \subset \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y})$.

2) De même, on déduit $\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{y} = 4\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ se décomposent linéairement sur $\overrightarrow{x}$, et $\overrightarrow{y}$, donc :

$$\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y}) \subset \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}).$$

On peut aussi remarquer que $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est libre et que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre, donc $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ et $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont deux sev de même dimension finie égale à 2.

Finalement, $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y})$, donc $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ engendrent le même sev que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

17.2

On a, en, utilisant l'associativité de l'addition :

$$A + B = A + \big((A \cap B) + C\big) = \big(A + (A \cap B)\big) + C = A + C$$

et, en utilisant la commutativité et l'associativité de l'intersection : $A \cap C = A \cap (C \cap B) = (A \cap B) \cap C = \{0\}$.

On conclut que A et C sont deux sev supplémentaires dans $A + B$.

17.3

Soit $x \in G$.

Puisque $x \in G \subset F + G \subset F + H$,

il existe $f \in F$, $h \in H$ tels que : $x = f + h$.

On a alors : $x \in G,\ h \in H \subset G$,

donc, puisque G est un sev de E : $f = x - h \in G$.

On a donc : $f \in F$ et $f \in G$, donc $f \in F \cap G \subset F \cap H$,

d'où $f \in H$.

Ainsi, $f \in H$ et $h \in H$,

donc, puisque H est un sev de E : $x = f + h \in H$.

Ceci montre : $G \subset H$.

Comme, de plus, par hypothèse, $H \subset G$, on conclut : $H = G$.

17.4

On a, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$= (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 2yz + z^2) = (x+y)^2 + (y+z)^2.$$

1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors :

$$E_{\mathbb{R}} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ \underbrace{(x+y)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{(y+z)^2}_{\geqslant 0} = 0\big\}$$

$$= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y = 0 \ \text{ et } \ y + z = 0\big\},$$

donc $E_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-ev, c'est la droite vectorielle engendrée par $(1,\ -1,\ 1)$.

2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{C}} &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ (x+y)^2 + (y+z)^2 = 0\big\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3\,;\ \left| \begin{array}{l} (x+y) + \mathrm{i}\,(y+z) = 0 \\ \text{ou} \\ (x+y) - \mathrm{i}\,(y+z) = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= P \cup Q, \end{aligned}$$

où P est le plan vectoriel d'équation $x + (1 + \mathrm{i}\,)y + z = 0$, et Q est le plan vectoriel d'équation $x + (1 - \mathrm{i}\,)y + z = 0$.

On peut constater que $E_{\mathbb{C}}$ est la réunion de deux plans vectoriels de $\mathbb{C}^3$, distincts entre eux.

On peut trouver deux éléments de $E_{\mathbb{C}}$ donc la somme n'est pas dans $E_{\mathbb{C}}$. Par exemple, $u = (\mathrm{i}\,, -1, 1) \in E_{\mathbb{C}}$ et $v = (-\,\mathrm{i}\,, -1, 1) \in E_{\mathbb{C}}$, mais $u + v = (0, -2, 2) \notin E_{\mathbb{C}}$.

Ceci montre que $E_{\mathbb{C}}$ n'est pas un sev de $\mathbb{C}^3$.

17.5

a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$.

Supposons $\lambda_n \neq 0$.

Alors, en isolant le terme $\lambda_n f_{a_n}$ et en divisant par λ_n, on a :

$$f_{a_n} = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} f_{a_i}.$$

Mais f_{a_n} n'est pas dérivable en a_n et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} f_{a_i}$ est dérivable en a_n, car chaque f_{a_i}, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, est dérivable en a_n.

Ceci amène une contradiction et montre : $\lambda_n = 0$.

Puis, de proche en proche : $\lambda_{n-1} = 0, ..., \lambda_1 = 0$.

On conclut que $(f_{a_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

b) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$,

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,\mathrm{e}^{\,a_i x} = 0$.

Remarquons que, pour tout $\alpha \in \,]-\infty\,; 0[$ fixé, on a :

$$\mathrm{e}^{\,\alpha x} \underset{x\ \longrightarrow\ +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Multiplions par $\mathrm{e}^{\,-a_n x}$ et isolons le terme d'indice n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \,\mathrm{e}^{\,(a_i - a_n)x} + \lambda_n = 0.$$

Et, pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$: $\mathrm{e}^{\,(a_i - a_n)x} \underset{x\ \longrightarrow\ +\infty}{\longrightarrow} 0$, puisque $a_i - a_n < 0$.

On déduit $\lambda_n = 0$,

puis, en réitérant : $\lambda_{n-1} = 0, ..., \lambda_1 = 0$.

On conclut que $(f_{a_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

c) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R} - \{a_1, ..., a_n\}, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i} = 0$.

Isolons, par exemple, le terme d'indice n, et exprimons λ_n :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a_1, ..., a_n\}, \quad \lambda_n = -(x - a_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$

Comme $a_1, ...a_{n-1}$ sont tous différents de a_n, pour chaque $i \in \{1, ..., n-1\}$, $\dfrac{\lambda_i}{x - a_i}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a_n, donc, par opérations, $-(x - a_n) \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{x - a_i} \underset{x \longrightarrow a_n}{\longrightarrow} 0$, d'où $\lambda_n = 0$.

En réitérant, on déduit $\lambda_{n-1} = 0, ..., \lambda_1 = 0$.

On conclut que $(f_{a_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

17.6

1) • On a : $F \subset E$ et $0 \in F$.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in F$:

$$\int_0^1 (\alpha f + g) = \alpha \int_0^1 f + \int_0^1 g = \alpha 0 + 0 = 0,$$
$$(\alpha f + g)(0) = \alpha f(0) + g(0) = \alpha 0 + 0 = 0,$$
$$(\alpha f + g)'(1) = \alpha f'(1) + g'(1) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

donc $\alpha f + g \in F$.

Ceci montre que F est un sev de E.

2) Il est clair que $G = \operatorname{Vect}(e_0, e_1, e_2)$, donc G est un sev de E.

3) Soit $f \in F \cap G$.

D'une part, $\displaystyle\int_0^1 f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(1) = 0$, et, d'autre part, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2$, c'est-à-dire tel que : $\forall x \in [0\,;1], \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

On a alors :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{3} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0, \end{cases}$$

d'où $f = 0$.

Ceci montre : $F \cap G = \{0\}$.

4) Soit $u \in E$. Cherchons $f \in F$, $g \in G$ telles que $u = f + g$.

Soient $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, $g = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2$, $f = u - g$. On a donc déjà $u = f + g$ et $g \in G$. On a :

$$f \in F \iff u - g \in F \iff \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (u - g) = 0 \\ (u - g)(0) = 0 \\ (u - g)'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{3} = \displaystyle\int_0^1 u \\ a_0 = u(0) \\ a_1 + 2a_2 = u'(1) \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = u(0) \\ \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{3} = \displaystyle\int_0^1 u - u(0) \\ a_1 + 2a_2 = u'(1). \end{cases}$$

Il est clair que ce dernier système d'équations, d'inconnue $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, admet une solution (et une seule). Il existe donc $(f, g) \in F \times G$ (unique) tel que $u = f + g$, ce qui montre $E = F + G$.

On conclut que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

Le point ci-dessus numéro *4)*, traité avec l'unicité, rend alors inutile le point numéro *3)*.

On peut enfin remarquer que G est de dimension trois et que F n'est pas de dimension finie (on dit aussi que F est de dimension infinie).

17.7

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Supposons que $A \cup B$ soit un sev de E.

Raisonnons par l'absurde : supposons : $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

Il existe alors $a \in A$ tel que $a \notin B$, et $B \in B$ tel que $b \notin A$.

Comme $a \in A \subset A \cup B$ et $b \in B \subset A \cup B$, on a, par hypothèse : $a + b \in A \cup B$, c'set-à-dire : $a + b \in A$ ou $a + b \in B$.

Si $a + b \in A$, comme $b = (a + b) - a$ et que A est un sev de E, on déduit $b \in A$, contradiction.

De même, si $a + b \in B$, comme $a = (a + b) - b$, on déduit $a \in B$, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $A \subset B$ ou $B \subset A$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Si, par exemple, $A \subset B$, alors $A \cup B = B$, donc $A \cup B$ est un sev de E.

Vrai ou Faux ?

17.1 Toute intersection de sev d'un ev est un sev de cet ev. V F

17.2 Si deux sev F, G d'un ev E sont en somme directe, alors $E = F \oplus G$. V F

17.3 Pour trois vecteurs x, y, z d'un ev E, si les familles (x, y) et (y, z) sont toutes deux liées, alors la famille (x, z) est liée V F

17.4 Pour trois vecteurs x, y, z d'un ev E, si la famille (x, y, z) est liée, alors $z \in \operatorname{Vect}(x, y)$. V F

17.5 Pour $n \geqslant 3$, si une famille $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs d'un ev E est liée, alors les vecteurs $v_1, ..., v_n$ sont deux à deux colinéaires. V F

17.6 L'ensemble c_0 des suites réelles convergeant vers 0 est un $\mathbb{R}$-ev pour les lois usuelles. V F

17.7 L'ensemble c_1 des suites réelles convergeant vers 1 est un $\mathbb{R}$-ev pour les lois usuelles. V F

17.8 Les fonctions $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : V F

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad h(x) = \sin^2 x,$$

forment une famille liée.

17.9 Pour trois sev F, G, H d'un ev E, si $F + G = F + H$, alors $G = H$. V F

17.10 On a, pour tous sev F, G, H d'un ev E : $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$. V F

Vrai ou Faux, les réponses

17.1 C'est un résultat du cours. **V**

17.2 Contrexemple : $E = \mathbb{R}^3,\ F = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\},\ G = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$. **F**

Une somme directe de deux sev de E n'est pas nécessairement égale à E.

Il y a confusion avec la notion de sev supplémentaires dans E.

17.3 Contrexemple : $E = \mathbb{R}^2,\ x = (1,0),\ y = (0,0),\ z = (0,1)$. **F**

Un résultat correct est : si les familles (x,y) et (y,z) sont liées et si $y \neq 0$, alors la famille (x,z) est liée.

17.4 Contrexemple : $E = \mathbb{R}^2,\ x = y = (0,0),\ z = (1,0)$. **F**

Un résultat correct est : si la famille (x,y,z) est liée et si la famille (x,y) est libre, alors $z \in \operatorname{Vect}(x,y)$.

17.5 Contrexemple : $E = \mathbb{R}^2,\ n = 3,\ v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ v_3 = (1,1)$. **F**

17.6 On a $(0) \in c_0$ et, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, on a $\alpha u_n + v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\alpha u + v \in c_0$. **V**

17.7 L'ensemble c_1 ne contient pas la suite nulle. **F**

17.8 On a : $f = g + h$, donc la famille $(f,\ g,\ h)$ est liée. **V**

17.9 Contrexemple : $E = \mathbb{R},\ F = G = \mathbb{R},\ H = \{0\}$. **F**

17.10 Contrexemple : $E = \mathbb{R}^2,\ F = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big),\ G = \operatorname{Vect}\big((1,0)\big),\ H = \operatorname{Vect}\big((0,1)\big)$. **F**

Dans cet exemple, on a $G \cap H = \{0\}$, $F + (G \cap H) = F$, mais $F + G = F + H = E$ donc $(F+G) \cap (F+H) = E \neq F$.

Chapitre 18

Espaces vectoriels de dimension finie

Plan

K désigne un corps commutatif.

On utilise les abréviations :

ev pour espace vectoriel,

sev pour sous-espace vectoriel.

Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'un ev est de dimension finie et en trouver une base
- Déterminer la dimension d'un sev d'un ev de dimension finie
- Montrer qu'une famille est une base d'un ev de dimension finie
- Déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des combinaisons linéaires finies de vecteurs, des familles libres, familles liées, familles génératrices
- Si deux sev ont la même dimension et si l'un est inclus dans l'autre, alors ils sont égaux
- Définition du rang d'une famille finie de vecteurs.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer qu'un sev F, ou un ev, est de dimension finie

Essayer de :

- montrer que F admet une famille génératrice finie
- montrer que F est inclus dans un sev de dimension finie
- montrer que F est somme d'un nombre fini de sev de dimensions finies.

Exemple

Montrer que l'ensemble F des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n$$

est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

En notant $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les éléments de F définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, il est clair que $F = \mathrm{Vect}\,(a, b)$, ce qui montre que F est un sev de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc F est un ev de dimension finie.

Méthode

Pour trouver une base d'un sev engendré par une famille $\mathcal{F}$

Extraire de $\mathcal{F}$ une famille libre ayant le plus grand cardinal.

➟ **Exercice 18.1**

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (1, 2, -1)$ et

$$F = \mathrm{Vect}\,(u, v, w).$$

Trouver une base de F.

Par définition de F, la famille (u, v, w) engendre F.

On remarque que d'une part, (u, v) est libre, et que, d'autre part, (u, v, w) est liée car :

$$2u - v = 2(1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1) = w.$$

On conclut que (u, v) est une base de F.

Méthode

Pour déterminer la dimension d'un sev de dimension finie d'un ev

Essayer de :

- trouver une base $\mathcal{B}$ de F, et on aura alors : $\dim(F) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{B})$
- utiliser la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

➟ **Exercices 18.7, 18.8**

Exemple

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \mathrm{e}^{x}, \quad h(x) = \mathrm{e}^{-x},$$

et $F = \mathrm{Vect}\,(f, g, h)$.

Déterminer $\dim(F)$.

Par définition de F, la famille (f, g, h) engendre F.

Montrons que (f, g, h) est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af + bg + ch = 0$.

On a : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a + b\,\mathrm{e}^{x} + c\,\mathrm{e}^{-x} = 0.$

Par le changement de variable $t = \mathrm{e}^{x}$, on déduit :

$$\forall t \in]0\,;+\infty[, \quad a + bt + c\frac{1}{t} = 0,$$

c'est-à-dire : $\quad \forall t \in]0\,;+\infty[, \quad bt^2 + at + c = 0.$

Le polynôme $b\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + c$ s'annule donc en une infinité de réels (les réels > 0), donc c'est le polynôme nul, d'où :

$$b = 0, \; a = 0, \; c = 0.$$

Ainsi, (f, g, h) est libre.

Puisque (f, g, h) est libre et engendre F, (f, g, h), est une base de F et on conclut : $\dim(F) = 3$.

Méthode

Pour montrer que deux sev F, G d'un ev E de dimension finie sont égaux

Il suffit de montrer, par exemple : $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on note :

$$u = (1, 1, 0), \; v = (1, 0, 1),$$

$$x = (3, 1, 2), \; y = (1, 3, -2),$$

$$F = \mathrm{Vect}\,(u, v), \; G = \mathrm{Vect}\,(x, y).$$

Montrer : $F = G$.

On remarque : $x = u + 2v$ et $y = 3u - 2v$. donc $G \subset F$.

De plus, il est clair que (u, v) est libre et que (x, y) est libre, donc : $\dim(G) = 2 = \dim(F)$.

On conclut : $F = G$.

Méthode

Pour montrer que deux sev F, G d'un ev E de dimension finie sont supplémentaires dans E

Essayer de :

- montrer l'une des deux égalités $F \cap G = \{0\}$ ou $F + G = E$, et montrer : $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- montrer qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de F et une base $\mathcal{G}$ de G telles que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, obtenue en juxtaposant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, soit une base de E.

➟ **Exercice 18.3**

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note

$$u = (1,\,1,\,1), \quad F = \mathbb{R}u,$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y + z = 0\}.$$

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires dans E.

Il est clair que F et G sont bien des sev de E.

Soit $X = (x, y, z) \in F \cap G$.

On a $x = y = z$ et $x + y + z = 0$, donc $3x = 0$, $x = 0$, $X = 0$.

Ainsi : $F \cap G = \{0\}$.

Le sev F est une droite vectorielle, c'est-à-dire $\dim(F) = 1$, et le sev G est un plan vectoriel, c'est-à-dire $\dim(G) = 2$.

Il en résulte : $\dim(F) + \dim(G) = 1 + 2 = 3 = \dim(E)$.

On conclut que F et G sont des sev de E supplémentaires dans E.

Méthode

Pour déterminer le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ de vecteurs d'un ev

Extraire de $\mathcal{F}$ une sous-famille libre de plus grand cardinal. Le rang de $\mathcal{F}$ est alors le cardinal de cette sous-famille.

➟ **Exercice 18.4**

Exemple

Déterminer le rang de la famille

$$\mathcal{F} = (e,\, c_1,\, c_2,\, s_1,\, s_2)$$

d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$e(x) = 1, \quad c_1(x) = \cos x, \quad s_1(x) = \sin x,$$

$$c_2(x) = \cos^2 x, \quad s_2(x) = \sin^2 x.$$

• On remarque : $c_2 + s_2 = e$, donc, par exemple, s_2 se décompose linéairement sur e et c_2.

• Montrons que la famille $(e,\, c_1,\, s_1,\, c_2)$ est libre.

Soit $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\alpha e + \beta c_1 + \gamma s_1 + \delta c_2 = 0$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x + \delta \cos^2 x = 0$.

En remplaçant x par $\pi/2$, par $-\pi/2$, on déduit : $\alpha + \gamma = 0$ et $\alpha - \gamma = 0$, donc : $\alpha = \gamma = 0$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta \cos x + \delta \cos^2 x = 0$.

En remplaçant x par 0, par π, on déduit : $\beta + \delta = 0$ et $-\beta + \delta = 0$, d'où $\beta = \delta = 0$.

Ceci montre que la famille $(e,\, c_1,\, s_1,\, c_2)$ est libre.

On conclut : $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = 4$.

Énoncés des exercices

18.1 Exemple de recherche d'un supplémentaire d'un sev dans un ev

On note $E = \mathbb{R}^4$ et : $\overrightarrow{x} = (1, -1, 1, -1)$, $\overrightarrow{y} = (1, 2, 3, 4)$, $F = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

a) Former un système d'équations cartésiennes de F.

b) Déterminer un supplémentaire de F dans E, par une base, et par un système d'équations cartésiennes.

18.2 Exemple de base de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$

On note, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \mathrm{X}, \quad P_2 = (\mathrm{X}-1)\mathrm{X}(\mathrm{X}+1), \quad P_3 = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}+1), \quad P_4 = (\mathrm{X}-1)\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)^2.$$

Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, ..., P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

18.3 Exemple de deux sev supplémentaires dans un ev de dimension infinie

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-ev de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$F = \{f \in E\,;\ f(0) = 0\}, \qquad A = \complement_E(F) = \{g \in E\,;\ g(0) \neq 0\}.$$

a) Vérifier que F est un sev de E. Est-ce que A est un sev de E ?

b) Montrer que, pour toute $g \in A$, la droite vectorielle $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

18.4 Exemple de calcul du rang d'une famille de fonctions

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x+1, \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$

Quel est le rang de la famille $\mathcal{A} = \big(f,\ g,\ f\circ f,\ f\circ g,\ g\circ f,\ g\circ g\big)$?

18.5 Une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$.

On note, pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$: $P_i = (\mathrm{X}-a)^i(\mathrm{X}-b)^{n-i}$.

Montrer que la famille $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

18.6 Racine carrée d'un entier non carré parfait

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que N ne soit le carré d'aucun entier. Montrer :

a) $\sqrt{N} \notin \mathbb{Q}$

b) $(1, \sqrt{N})$ est $\mathbb{Q}$-libre.

18.7 Une inégalité sur des carrés de dimensions de sev

Soient E un K-ev de dimension finie, F, G deux sev de E. Montrer :

$$\big(\dim(F+G)\big)^2 + \big(\dim(F\cap G)\big)^2 \geqslant \big(\dim(F)\big)^2 + \big(\dim(G)\big)^2$$

et étudier le cas d'égalité.

18.8 Inégalité sur des dimensions pour trois sev

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, A, B, C des sev de E. On note, pour abréger, $d(.)$ la dimension d'un sev de E. Montrer :

$$d(A+B+C) + \mathrm{Max}\big[d(A\cap B),\ d(A\cap C),\ d(B\cap C)\big] \leqslant d(A) + d(B) + d(C).$$

18.9 Base formée de polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

On note, pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$: $L_i = \dfrac{\displaystyle\prod_{0 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} (\mathrm{X} - a_j)}{\displaystyle\prod_{0 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} (a_i - a_j)}$.

Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_0, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

Du mal à démarrer ?

18.1 *a)* En notant $\overrightarrow{w} = (x,\ y,\ z,\ t)$ un élément quelconque de E, éliminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dans :

$$\overrightarrow{w} = a\,\overrightarrow{x} + b\,\overrightarrow{y}.$$

b) Considérer, par exemple :

$$\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ 0,\ 0) \text{ et } \overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ 0,\ 0).$$

18.2
- Vérifier d'abord que $P_0, ..., P_4$ sont dans $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.
- Montrer que $\mathcal{B}$ est libre.
- Utiliser un argument de dimension.

18.3 *a)* Remarquer que A ne contient pas 0.

b) Pour $g \in A$ fixée, montrer que $\mathbb{R}g$ et F sont supplémentaires dans E en revenant à la définition de deux sev supplémentaires dans un ev.

Pour décomposer un élément quelconque de E sur $\mathbb{R}g$ et F, on pourra raisonner par analyse et synthèse.

18.4 Exprimer les éléments de $\mathcal{A}$.

18.5 *1)* Vérifier : $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!],\quad P_i \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

2) Montrer que $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, en revenant à la définition et en évaluant les polynômes en a_i par exemple.

3) Utiliser un argument de dimension.

18.6 *a)* Raisonner par l'absurde et utiliser (par exemple) le théorème de Gauss.

b) Utiliser *a)*.

18.7 Calculer la différence entre les deux membres de l'inégalité voulue et utiliser la formule de Grassmann.

18.8 Remarquer que, d'après la formule de Grassmann, pour tous sev F, G de E : $d(F + G) \leqslant d(F) + d(G)$.

Appliquer à $A + B$ et C et permuter.

18.9
- Vérifier : $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!],\quad L_i \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
- Montrer que $\mathcal{L}$ est libre, en revenant à la définition.
- Utiliser un argument de dimension.

Corrigés des exercices

18.1

a) Soit $\overrightarrow{w} = (x,\ y,\ z,\ t) \in E$. On a :

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{w} \in F \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y} \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} x = a + b \\ y = -a + 2b \\ z = a + 3b \\ t = -a + 4b \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} 2x - y = 3a \\ x + y = 3b \\ 4z - 3t = 7a \\ z + t = 7b \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\quad & \begin{cases} \dfrac{2x-y}{3} = \dfrac{4z-3t}{7} \\ \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{z+t}{7} \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\quad & \begin{cases} 14x - 7y - 12z + 9t = 0 \\ 7x + 7y - 3z - 3t = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi un système d'équations cartésiennes de F, et il n'y a pas unicité d'un système d'équations cartésiennes de F.

b) • Considérons, par exemple : $\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $G = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$. Pour montrer que G est un supplémentaire de F dans E, il suffit de montrer que la famille $(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ est libre.

1re méthode :

Soit $(a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$
a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y} + c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}
$$

$$
\Longleftrightarrow\quad a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + 2b + d = 0 \\ a + 3b = 0 \\ -a + 4b = 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}
$$

Ceci montre que $(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ est libre, et on conclut que G est un supplémentaire de F dans E et qu'une base de G est $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

2è méthode : utilisation d'un déterminant

D'après le cours sur les déterminants, puisque E est de dimension 4 et que la famille considérée contient 4 vecteurs, il suffit de montrer que le déterminant D de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ n'est pas nul. On a, en développant par rapport à la dernière colonne, deux fois de suite :

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -7,
$$

ainsi $D \neq 0$,

et on conclut que G est un supplémentaire de F dans E.

• Il est clair qu'un système d'équations cartésiennes de G est :

$$
\begin{cases} z = 0 \\ t = 0. \end{cases}
$$

18.2

• D'abord, il est clair que : $\forall k \in [\![0\,;\,4]\!],\quad P_k \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

• Montrons que $\mathcal{B} = (P_0, ..., P_4)$ est libre.

Soit $(a_0, ..., a_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a_k P_k = 0$.

En prenant les valeurs en 0, en -1, on déduit : $a_0 = 0$ et $a_0 - a_1 = 0$, d'où $a_1 = 0$.

On a alors :

$$
\begin{aligned}
& 0 = a_2P_2 + a_3P_3 + a_4P_4 \\
\Longleftrightarrow\ & a_2(\mathrm{X}-1)\mathrm{X}(\mathrm{X}+1) + a_3\mathrm{X}^2(\mathrm{X}+1) + a_4(\mathrm{X}-1)\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)^2 \\
& = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\big[a_2(\mathrm{X}-1) + a_3\mathrm{X} + a_4(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)\big] \\
& = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\big[a_4\mathrm{X}^2 + (a_2+a_3)\mathrm{X} - (a_2+a_4)\big],
\end{aligned}
$$

d'où : $\quad a_4\mathrm{X}^2 + (a_2+a_3)\mathrm{X} - (a_2+a_4) = 0,$

puis : $\quad a_4 = 0,\quad a_2 + a_3 = 0,\quad -(a_2+a_4) = 0,$

et donc : $\quad a_4 = 0,\quad a_2 = 0,\quad a_3 = 0.$

Ceci montre que $\mathcal{B}$ est libre.

• Comme $\mathcal{B}$ est libre et que $\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}) = 5 = \dim\big(\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]\big)$, on conclut : $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

18.3

a) 1) • Il est clair que $F \subset E$ et que $0 \in F$ (où on a noté 0 l'application constante nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f, h \in F$:

$$
(\alpha f + h)(0) = \alpha f(0) + h(0) = \alpha 0 + 0 = 0,
$$

donc $\alpha f + h \in F$.

On conclut que F est un sev de E.

2) Il est immédiat que A n'est pas un sev de E, car, par exemple, $0 \notin A$.

b) Soit $g \in A$ fixée.

1) Soit $f \in (\mathbb{R}g) \cap F$. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha g$, et on a $f(0) = 0$. D'où : $\alpha g(0) = f(0) = 0$. Comme $g(0) \neq 0$, il en résulte $\alpha = 0$, donc $f = \alpha g = 0$. Ceci montre : $(\mathbb{R}g) \cap F = \{0\}$.

2) Soit $\varphi \in E$. On veut montrer que φ se décompose linéairement sur $\mathbb{R}g$ et F, c'est-à-dire montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in F$ telles que : $\varphi = \alpha g + f$. Raisonnons par analyse et synthèse.

• S'il existe (α, f) convenant, alors :

$$\varphi(0) = \alpha g(0) + f(0) = \alpha g(0),$$

donc $\alpha = \dfrac{\varphi(0)}{g(0)}$, puis $f = \varphi - \alpha g = \varphi - \dfrac{\varphi(0)}{g(0)} g$.

• Réciproquement, montrons que le couple (α, f) précédemment trouvé convient.

Notons donc $\alpha = \dfrac{\varphi(0)}{g(0)}$ et $f = \varphi - \dfrac{\varphi(0)}{g(0)} g$.

Alors, $\alpha f + g = \varphi$ et $f(0) = \varphi(0) - \dfrac{\varphi(0)}{g(0)} = 0$,

donc $f \in F$.

Ceci montre que le couple (α, f) convient.

On a donc montré : $(\mathbb{R}g) + F = E$.

Finalement : $\mathbb{R}g$ et F sont deux sev de E supplémentaires dans E, ou encore : $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Remarque : Il est alors clair, puisque A est un ensemble infini, que F admet une infinité de supplémentaires dans E.

18.4

Exprimons les (six) éléments de $\mathcal{A}$:

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2,$$
$$(f \circ f)(x) = (x+1) + 1 = x + 2, \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 1,$$
$$(g \circ f)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad (g \circ g)(x) = x^4.$$

• On remarque que les cinq premiers éléments de $\mathcal{A}$ sont des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 2$, donc se décomposent sur

$$u : x \longmapsto 1, \quad v : x \longmapsto x, \quad w : x \longmapsto x^2.$$

D'autre part : $u = f \circ f - f, \quad v = 2f - f \circ f, \quad w = g$.

Ainsi, le sev engendré par les cinq premières fonctions de $\mathcal{A}$ est le même que celui engendré par (u, v, w), donc le rang de cette famille de cinq éléments est égal à 3.

• Comme $g \circ g$ est une fonction polynomiale de degré 4, $g \circ g$ n'est pas dans le sev engendré par (u, v, w).

On conclut : $\operatorname{rg}(\mathcal{A}) = 4$.

18.5

1) D'abord, il est clair que : $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!], \quad P_i \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

2) Montrons que $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$.

En prenant la valeur en a, comme $P_i(a) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$, on obtient $\lambda_0 P_0(a) = 0$, puis, comme $P_0(a) = (a-b)^n \neq 0$, on déduit $\lambda_0 = 0$.

En reportant et en simplifiant par $\mathrm{X} - a$, on déduit :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathrm{X} - a)^{i-1} (\mathrm{X} - b)^{n-i} = 0,$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j+1} (\mathrm{X} - a)^j (\mathrm{X} - b)^{n-1-j} = 0.$

En réitérant, on obtient successivement : $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Ceci montre que $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

Comme la famille $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre et que

$$\operatorname{Card}\big((P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}\big) = n + 1 = \dim\big(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]\big),$$

on conclut que $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

18.6

a) Raisonnons par l'absurde : supposons $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$.

Il existe alors $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que :

$$\sqrt{N} = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad p \wedge q = 1.$$

On a donc : $Nq^2 = p^2$.

Alors, q divise p^2, et comme $p \wedge q = 1$, on déduit, par le théorème de Gauss : $q = 1$.

Mais alors $N = p^2$, contradiction.

Ceci montre : $\sqrt{N} \notin \mathbb{Q}$.

b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $\alpha + \beta\sqrt{N} = 0$.

Si $\beta \neq 0$, alors $\sqrt{N} = -\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, contradiction.

Donc $\beta = 0$, puis $\alpha = -\beta\sqrt{N} = 0$.

Ceci montre que $(1, \sqrt{N})$ est $\mathbb{Q}$-libre.

18.7

Pour la commodité, notons d à la place de dim, et notons P le premier membre de l'inégalité voulue et S son second membre.

• On a :

$$P - S = \big(d(F+G)\big)^2 + \big(d(F \cap G)\big)^2 - \big(d(F)\big)^2 - \big(d(G)\big)^2$$
$$= \Big(\big(d(F+G)\big)^2 - \big(d(F)\big)^2\Big) - \Big(\big(d(G)\big)^2 - \big(d(F \cap G)\big)^2\Big)$$
$$= \big(d(F+G) - d(F)\big)\big(d(F+G) + d(F)\big) - \big(d(G) - d(F \cap G)\big)\big(d(G) + d(F \cap G)\big).$$

D'après la formule de Grassmann :

$$d(F+G) + d(F \cap G) = d(F) + d(G),$$

donc : $\qquad d(F+G) - d(F) = d(G) - d(F \cap G),$

ce qui permet de mettre $d(G) - d(F \cap G)$ en facteur, puis de réutiliser la formule de Grassmann :

$$P - S = \big(d(G) - d(F \cap G)\big)\big(d(F+G) + d(F) - d(G) - d(F \cap G)\big)$$
$$= \big(d(G) - d(F \cap G)\big)\big(2d(F) - 2d(F \cap G)\big) \geqslant 0,$$

car $F \cap G \subset G$ et $F \cap G \subset F$,

donc $d(F \cap G) \leqslant d(G)$ et $d(F \cap G) \leqslant d(F)$.

• Il y a égalité dans l'inégalité voulue si et seulement si $P = S$, c'est-à-dire $d(G) = d(F \cap G)$ ou $d(F) = d(F \cap G)$. Comme $F \cap G$ est inclus dans F et $F \cap G$ est inclus dans G, on conclut qu'il y a égalité si et seulement si $G = F \cap G$ ou $F = F \cap G$, c'est-à-dire si et seulement si $G \subset F$ ou $F \subset G$.

18.8

Rappelons la formule de Grassmann, pour tous sev F, G d'un ev de dimension finie :

$$d(F+G) = d(F) + d(G) - d(F \cap G),$$

d'où l'inégalité : $d(F+G) \leqslant d(F) + d(G)$.

On a :

$$\begin{aligned} d(A+B+C) &= d\big((A+B)+C\big) \leqslant d(A+B) + d(C) \\ &= d(A) + d(B) + d(C) - d(A \cap B), \end{aligned}$$

d'où : $d(A+B+C) + d(A \cap B) \leqslant d(A) + d(B) + d(C)$.

En appliquant ce résultat à (A, C, B) et à (B, C, A) à la place de (A, B, C), on a aussi :

$$d(A+B+C) + d(A \cap C) \leqslant d(A) + d(B) + d(C)$$

et : $d(A+B+C) + d(B \cap C) \leqslant d(A) + d(B) + d(C)$.

On conclut :

$$\begin{aligned} d(A+B+C) + \operatorname{Max}\big[d(A \cap B),\, d(A \cap C),\, d(B \cap C)\big] \\ \leqslant d(A) + d(B) + d(C). \end{aligned}$$

18.9

• D'abord, il est clair que, pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$, L_i existe et $L_i \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

• Montrons que $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k = 0$.

Soit $k \in [\![0\,;\,n]\!]$ fixé.

On a : $0 = \Big(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i\Big)(a_k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_k)$.

Mais, pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$, $L_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} (\mathrm{X} - a_j) \ / \ \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$,

donc : $\quad \forall i \in [\![0\,;\,n]\!], \quad L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k. \end{cases}$

D'où : $$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = \lambda_k.$$

Ceci montre que $\mathcal{L}$ est libre.

• Comme $\mathcal{L}$ est libre et $\operatorname{Card}(\mathcal{L}) = n + 1 = \dim\big(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]\big)$, on conclut : $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

Vrai ou Faux ?

18.1 Si des polynômes $P_0, ..., P_n$ de $\mathbb{K}[X]$ vérifient $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, alors $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. **V F**

18.2 Si une famille $(P_0, ..., P_n)$ de polynômes est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, alors, pour chaque i de $\{0, ..., n\}$, P_i est de degré i. **V F**

18.3 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille **V F**

$$A = X^2 + X + 1, \quad B = X^2 - X - 2, \quad C = X^2 + 2X + 3, \quad D = X^2 - 3X + 2$$

est libre.

18.4 On a, pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $\dim\big(\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big) = np$. **V F**

18.5 Soient E un ev de dimension finie, $n = \dim(E)$, $\mathcal{F}$ une famille finie de E. **V F**
Deux des trois propriétés suivantes entraînent chaque fois la troisième :
(1) $\mathcal{F}$ est libre, (2) $\mathcal{F}$ engendre E (3) $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n$.

18.6 Soient E un ev de dimension finie, F, G deux sev de E. **V F**
Deux des trois propriétés suivantes entraînent chaque fois la troisième :
(1) $F + G = E$, (2) $F \cap G = \{0\}$, (3) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

18.7 Soient E un ev de dimension finie, F, G deux sev de E. **V F**
Si $\big(\dim(E) = 5,\ \dim(F) = 3,\ \dim(G) = 3\big)$, alors $F \cap G \neq \{0\}$.

18.8 Si E est un ev de dimension finie égale à n et si $\mathcal{F}$ est une famille finie liée et génératrice de E, alors : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \geqslant n + 1$. **V F**

18.9 Une famille finie de p vecteurs d'un ev est liée si et seulement si son rang est inférieur ou égal à p. **V F**

18.10 Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux familles finies d'un ev, alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}) + \mathrm{rg}(\mathcal{G})$. **V F**

Vrai ou Faux, les réponses

18.1 D'après l'hypothèse, la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré, donc est libre. **V**

Comme cette famille comporte $n+1$ éléments et que $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$, il en résulte que cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

18.2 Contrexemples : $P_i = X^{n-i},\ 0 \leqslant i \leqslant n$, ou $P_i = (X-1)^i(X+1)^{n-i},\ 0 \leqslant i \leqslant n$. **F**

18.3 Il s'agit d'une famille de quatre polynômes dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est un ev de dimension 3, donc cette famille est liée. **F**

18.4 C'est un résultat du cours. **V**

18.5 C'est un résultat du cours. **V**

18.6 C'est un résultat du cours. **V**

18.7 On a, d'après la formule de Grassmann : **V**

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) \geqslant 3+3-5 = 1,$$

donc : $F \cap G \neq \{0\}$.

18.8 Puisque $\mathcal{F}$ est génératrice de E, on a $\operatorname{Card}(\mathcal{F}) \geqslant n$. **V**

Si $\operatorname{Card}(\mathcal{F}) = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E, donc $\mathcal{F}$ n'est pas liée, contradiction.

Donc : $\operatorname{Card}(\mathcal{F}) \geqslant n+1$.

18.9 Un résultat correct est : une famille finie de p vecteurs est liée si et seulement si sont rang est strictement inférieur à p. **F**

18.10 La formule est fausse dès que : $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ et $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \geqslant 1$. **F**

D'après la formule de Grassmann :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \operatorname{rg}(\mathcal{F}) + \operatorname{rg}(\mathcal{G}) - \dim\big(\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) \cap \operatorname{Vect}(\mathcal{G})\big),$$

d'où l'on déduit un énoncé correct : $\operatorname{rg}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) \leqslant \operatorname{rg}(\mathcal{F}) + \operatorname{rg}(\mathcal{G})$.

Chapitre 19

Applications linéaires

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Détermination du noyau, de l'image d'une application linéaire, obtention d'inclusions ou d'égalités faisant intervenir noyaux et images d'applications linéaires
- Montrer qu'une certaine application linéaire est injective, est surjective, est bijective
- Manipulation de projecteurs
- Détermination du rang d'une application linéaire, obtention de résultats sur le rang d'une application linéaire.

K désigne un corps commutatif.

On utilise les abréviations :

ev pour espace vectoriel,

sev pour sous-espace vectoriel.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des applications linéaires, opérations sur les applications linéaires et les endomorphismes, définition et propriétés du noyau et de l'image d'une application linéaire
- Définition et caractérisation des projecteurs d'un espace vectoriel
- Théorème du rang et ses conséquences pour les applications linéaires et les endomorphismes en dimension finie.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, où E et F sont des K-ev

Essayer de :

- revenir à la définition d'une application linéaire, c'est-à-dire montrer :
$$\forall \lambda \in K,\ \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$
- montrer que f s'obtient, par certaines opérations, à partir d'applications linéaires.

Exemple

Montrer que l'application
$$f : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto \mathrm{X}P + P'$$
est linéaire.

D'abord, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est bien un $\mathbb{R}$-ev.
On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$:
$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= \mathrm{X}(\alpha P + Q) + (\alpha P + Q)' = (\alpha \mathrm{X}P + \mathrm{X}Q) + (\alpha P' + Q') \\ &= \alpha(\mathrm{X}P + P') + (\mathrm{X}Q + Q') = \alpha f(P) + f(Q), \end{aligned}$$
donc f est linéaire.

Méthode

Pour manipuler noyau, image, somme, loi externe, composition d'applications linéaires

Revenir aux définitions, avec les notations usuelles :
$$\mathrm{Ker}\,(f) = \big\{x \in E\,;\ f(x) = 0\big\}, \quad \mathrm{Im}\,(f) = \big\{y \in F\,;\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)\big\},$$
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

➟ **Exercices 19.1 à 19.5, 19.10, 19.11**

Exemple

Soient E, F deux $K-$ev, $a, b \in K$ tels que $a \neq b$, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que :
$$\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = \{0\}.$$
Montrer :
$$\mathrm{Ker}\,(f - ag) \cap \mathrm{Ker}\,(f - bg) = \{0\}.$$

- L'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Ker}\,(f - ag) \cap \mathrm{Ker}\,(f - bg)$ est évidente.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f - ag) \cap \mathrm{Ker}\,(f - bg)$.

On a donc : $f(x) - ag(x) = 0$ et $f(x) - bg(x) = 0$,
d'où, par différence : $(a - b)g(x) = 0$.
Comme $a \neq b$, on déduit $g(x) = 0$, puis $f(x) = ag(x) = 0$.
Ainsi : $\mathrm{Ker}\,(f - ag) \cap \mathrm{Ker}\,(f - bg) \subset \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) \subset \{0\}$.

On conclut : $\mathrm{Ker}\,(f - ag) \cap \mathrm{Ker}\,(f - bg) = \{0\}$.

Méthode

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, sans considération de dimension

Revenir à la définition : $\operatorname{Ker}(f) = \{x \in E\,;\ f(x) = 0\}$.
Il s'agit donc de résoudre l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in E$.

➟ **Exercices 19.1, 19.2, 19.4**

Exemple

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et

$f : E \longrightarrow E, \quad P \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

Vérifier $f \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

1) On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $P, Q \in E$:

$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= (\alpha P + Q)(X+1) - (\alpha P + Q)(X) \\ &= \big[\alpha P(X+1) + Q(X+1)\big] - \big[\alpha P(X) + Q(X)\big] \\ &= \alpha\big[P(X+1) - P(X)\big] + \big[Q(X+1) - Q(X)\big] = \alpha f(P) + f(Q), \end{aligned}$$

donc : $f \in \mathcal{L}(E)$.

2) • Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$.
On a donc $P(X+1) = P(X)$, d'où, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = P(0).$$

Le polynôme $P - P(0)$ s'annule en une infinité de points (les $n \in \mathbb{N}$), donc $P - P(0) = 0$, $P = P(0)$, P est constant.

• Réciproquement, pour tout polynôme constant P, on a $f(P) = 0$.

On conclut : $\operatorname{Ker}(f)$ est l'ensemble des polynòmes constants.

Autrement dit : $\operatorname{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

Méthode

Pour montrer qu'une application linéaire est injective

Notant $f : E \longrightarrow F$ l'application linéaire, montrer $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, c'est-à-dire montrer :

$$\forall x \in E, \quad \big(f(x) = 0 \implies x = 0\big).$$

Exemple

On note $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T : E \longrightarrow E$ l'application qui, à toute $f \in E$, associe l'application $T(f)$ définie, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = x f(x).$$

Vérifier $T \in \mathcal{L}(E)$ et montrer que T est injective.

1) • Pour toute $f \in E$, par produit d'applications continues, $T(f) : x \longmapsto x f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $T(f) \in E$.

• On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(\alpha f + g)(x) = x(\alpha f + g)(x) = x\big(\alpha f(x) + g(x)\big)$$

$$= \alpha x f(x) + x g(x) = \alpha T(f)(x) + T(g)(x) = \big(\alpha T(f) + T(g)\big)(x),$$

donc : $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$.
Ceci montre que T est linéaire.

Ainsi : $T \in \mathcal{L}(E)$.

2) Soit $f \in \operatorname{Ker}(T)$.
On a alors $T(f) = 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x f(x) = 0$,
d'où, en divisant par x : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = 0$.

L'application f est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0, donc $f(0) = 0$, puis $f = 0$.

Ceci montre $\mathrm{Ker}\,(T) = \{0\}$, donc T est injectif.

Méthode

Pour déterminer l'image d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, sans considération de dimension

Essayer de :

- revenir à la définition : $\mathrm{Im}\,(f) = \big\{y \in F\,;\ \exists x \in E,\ \ y = f(x)\big\}$
- chercher l'image par f d'une famille génératrice de E.

➟ **Exercices 19.1, 19.2, 19.4**

Exemple

On note $E = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$,

$$F = \{P \in E\,;\ P(0) = 0\},$$

$$f : E \longrightarrow E,\quad P \longmapsto \mathrm{X}P'.$$

Vérifier $f \in \mathcal{L}(E)$ et montrer :

$$\mathrm{Im}\,(f) = F.$$

1) On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $P, Q \in E$:

$$f(\alpha P + Q) = \mathrm{X}(\alpha P + Q)' = \mathrm{X}(\alpha P' + Q') = \alpha \mathrm{X}P' + \mathrm{X}Q' = \alpha f(P) + f(Q),$$

donc f est linéaire.

On conclut : $f \in \mathcal{L}(E)$.

2) • On a, pour tout $P \in E$: $f(P)(0) = 0P'(0) = 0$,

donc : $\mathrm{Im}\,(f) \subset F$.

• Soit $P \in F$. Puisque $P(0) = 0$, il existe $A \in E$ tel que $P = \mathrm{X}A$. Il est clair que, par primitivation pour un polynôme, il existe $B \in E$ tel que $B' = A$.

On a alors $P = \mathrm{X}B' = f(B)$, donc $P \in \mathrm{Im}\,(f)$.

On conclut : $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

Méthode

Pour montrer qu'une application linéaire est surjective

Notant $f : E \longrightarrow F$ l'application linéaire, montrer $\mathrm{Im}\,(f) = F$, c'est-à-dire montrer :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\quad y = f(x).$$

Exemple

On note $E = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et

$$D : E \longrightarrow E,\quad P \longmapsto P'.$$

Vérifier $D \in \mathcal{L}(E)$ et montrer que D est surjectif.

D'après le cours, D est linéaire.

Soit $Q \in E$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_N \in \mathbb{R}$ tels que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{X}^k$.

En notant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k+1} \mathrm{X}^{k+1}$, on a $P \in E$ et $D(P) = P' = Q$.

Ceci montre que D est surjectif.

On peut remarquer que P est une primitive de Q.

Méthode

Pour montrer qu'une application linéaire est bijective, sans considération de dimension

Notant $f : E \longrightarrow F$ l'application linéaire, essayer de :

- montrer : $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(f) = F$
- trouver une application $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$

L'application g est alors la réciproque de f, et g est linéaire.

➟ **Exercice 19.5**

Exemple

Soit E un K-ev, $e = \mathrm{Id}_E$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^3 = 0$. Montrer $e - \varphi \in \mathcal{GL}(E)$ et exprimer $(e-\varphi)^{-1}$.

On remarque : $\begin{cases} (e-\varphi)\circ(e+\varphi+\varphi^2) = e - \varphi^3 = e \\ (e+\varphi+\varphi^2)\circ(e-\varphi) = e-\varphi^3 = e \end{cases}$

donc $e - \varphi \in \mathcal{GL}(E)$ et $(e-\varphi)^{-1} = e + \varphi + \varphi^2$.

Méthode

Pour montrer qu'un endomorphisme f d'un ev E de dimension finie est bijectif

Il suffit de montrer $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ ou $\operatorname{Im}(f) = E$.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et :

$$f : E \longrightarrow E, \quad P \longmapsto \mathrm{X}P' + P.$$

Vérifier $f \in \mathcal{L}(E)$ et montrer que f est bijectif.

1) • Pour tout $P \in E$, on a $\deg(P) \leqslant n$, donc $\deg(P') \leqslant n-1$, puis $\deg(\mathrm{X}P') \leqslant n$, donc $\deg(\mathrm{X}P' + P) \leqslant n$, et enfin $f(P) \in E$.

• On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $P, Q \in E$:

$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= \mathrm{X}(\alpha P + Q)' + (\alpha P + Q) \\ &= \alpha(\mathrm{X}P' + P) + (\mathrm{X}Q' + Q) = \alpha f(P) + f(Q), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

Ainsi : $f \in \mathcal{L}(E)$.

2) Puisque E est de dimension finie (égale à $n+1$), d'après le cours pour montrer que f est bijectif, il suffit de montrer, par exemple, que f est injectif.

Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$. Supposons $P \neq 0$ et notons $d = \deg(P) \leqslant n$. Il existe $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$, avec $a_d \neq 0$, tels que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$. Le coefficient du terme de degré d de $f(P)$ est $da_d + a_d = (d+1)a_d$, qui est non nul, contradiction avec $f(P) = 0$.

Ceci montre $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, donc f est injectif.

Puisque E est de dimension finie et que $f \in \mathcal{L}(E)$ est injectif, on conclut, d'après le cours, que f est bijectif.

Méthode

Pour relier entre elles les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, où E et F sont des ev de dimensions finies

Utiliser le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big) = \dim(E).$$

➟ **Exercices 19.6, 19.7, 19.9, 19.13**

Exemple

Soient E un K-ev de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(f) = E.$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

On a, en utilisant la formule de Grassmann et le théorème du rang :

$$\begin{aligned}
&\dim\big(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}\,(g) \cap \mathrm{Ker}\,(f)\big)\\
&= \dim \mathrm{Im}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\,(g) - \dim\big(\underbrace{\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)}_{=E}\big)\\
&\qquad + \dim \mathrm{Im}\,(g) + \dim \mathrm{Ker}\,(f) - \dim\big(\underbrace{\mathrm{Im}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(f)}_{=E}\big)\\
&= \big(\dim \mathrm{Im}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\,(f)\big) + \big(\dim \mathrm{Ker}\,(g) + \dim \mathrm{Im}\,(g)\big) - 2\dim(E)\\
&= \dim(E) + \dim(E) - 2\dim(E) = 0.
\end{aligned}$$

Comme les dimensions sont des entiers naturels, on déduit :

$$\dim\big(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)\big) = 0 \quad \text{et} \quad \dim\big(\mathrm{Im}\,(g) \cap \mathrm{Ker}\,(f)\big) = 0,$$

d'où $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\,(g) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$.
On conclut que les deux sommes de l'énoncé sont directes.

Méthode

Pour manipuler le rang d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, où E et F sont des ev de dimensions finies

Utiliser :

- la définition du rang : $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big)$
- le théorème du rang : $\mathrm{rg}\,(f) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big)$.

➟ **Exercices 19.7 à 19.9, 19.13**

Exemple

Soient E, F, G des K-ev de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

$$\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) \iff \begin{cases} g \circ f = 0 \\ \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = \dim(F). \end{cases}$$

1) Supposons $\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f)$.

• Soit $x \in E$.
On a : $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$, donc $g\big(f(x)\big) = 0$,
c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = 0$.
Ceci montre : $g \circ f = 0$.

• En utilisant le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = \dim \mathrm{Im}\,(f) + \big(\dim(F) - \dim \mathrm{Ker}\,(g)\big) = \dim(F).$$

2) Réciproquement, supposons :

$$g \circ f = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = \dim\,(F).$$

• Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On a : $g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}\,(g)$.
Ceci montre : $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$.

• En utilisant le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Ker}\,(g) &= \dim\,(F) - \dim \mathrm{Im}\,(g)\\ &= \dim\,(F) - \mathrm{rg}\,(g) = \mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{Im}\,(f).\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim \mathrm{Ker}\,(g)$,

donc : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

Méthode

Pour manipuler un projecteur p d'un ev E

Essayer de :

- utiliser l'égalité $p \circ p = p$
- utiliser la décomposition de tout élément x de E sous la forme :

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\,(p)} + \underbrace{\big(x - p(x)\big)}_{\in \mathrm{Ker}\,(p)}.$$

➟ **Exercices 19.5, 19.11**

Exemple

Soient E un K-ev, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f \circ g = f \quad \text{et} \quad g \circ f = g.$$

Montrer que f et g sont des projecteurs de E.

On a : $\begin{cases} f \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ g = f \\ g \circ g = (g \circ f) \circ g = g \circ (f \circ g) = g \circ f = g, \end{cases}$

donc f et g sont des projecteurs de E.

Énoncés des exercices

19.1 Étude de noyau et image d'une composée d'applications linéaires

Soient E, F, G des K-ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

a) $f\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big) = \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$

b) $g^{-1}\big(\operatorname{Im}(g \circ f)\big) = \operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(f)$.

19.2 Noyau et image de la composée de deux applications linéaires

Soient E, F, G trois K-ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

a) $\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}\big(\operatorname{Ker}(g)\big)$

b) $\operatorname{Ker}(g \circ f) \supset \operatorname{Ker}(f)$

c) $\operatorname{Im}(g \circ f) = g\big(\operatorname{Im}(f)\big)$

d) $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$.

19.3 Étude du noyau et de l'image de deux applications linéaires vérifiant des équations

Soient E, F, G des K-ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $h \in \mathcal{L}(G, F)$, $k \in \mathcal{L}(F, E)$.
On suppose : $\quad f = h \circ g \circ f \quad$ et $\quad g = g \circ f \circ k$.
Démontrer que $\operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans F.

19.4 Étude de noyaux et images d'applications linéaires

Soient E, F, G trois K-ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

a) $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f) \iff \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$

b) $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \iff \operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(f) = F$.

(On pourra utiliser l'exercice 19.2.)

19.5 Étude de $e - ap$, où $a \in K$ et p est un projecteur

Soient E un K-ev, $e = \operatorname{Id}_E$, p un projecteur de E tel que $p \neq 0$, $a \in K - \{1\}$, $f = e - ap$.
Montrer que $f \in \mathcal{GL}(E)$ et exprimer f^{-1}.

19.6 Caractérisation des endomorphismes f tels que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$ en dimension finie

Soient E un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f) \iff \big(f^2 = 0 \ \text{ et } \ n = 2\operatorname{rg}(f)\big).$$

19.7 Endomorphismes vérifiant une condition de rang

Soient E un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E)$, $e = \operatorname{Id}_E$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f + g = e \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant n.$$

a) Établir que $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E et que : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$.

b) En déduire que f et g sont des projecteurs.

19.8 Inégalités sur le rang de la somme de deux applications linéaires

Soient E, F deux K-ev de dimensions finies, $(f, f') \in \big(\mathcal{L}(E,F)\big)^2$. Montrer :

$$\big|\mathrm{rg}\,(f) - \mathrm{rg}\,(f')\big| \leqslant \mathrm{rg}\,(f+f') \leqslant \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f').$$

19.9 Étude des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ nilpotent d'ordre trois, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer : $\mathrm{Ker}\,(f^2) = \mathrm{Im}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{Ker}\,(f)$, $\mathrm{rg}\,(f) = 2$, $\mathrm{rg}\,(f^2) = 1$.

19.10 Caractérisation de deux applications linéaires dont la composée est un isomorphisme

Soient E, F, G des K-ev, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G

(ii) f est injective, g est surjective et $F = \mathrm{Ker}\,(g) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

19.11 CNS pour que la somme de deux projecteurs soit un projecteur

Soient E un $\mathbb{C}$-ev, p, q deux projecteurs de E.

Démontrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si : $p \circ q = q \circ p = 0$.

19.12 Deux endomorphismes qui commutent

Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $e = \mathrm{Id}_E$, $(f, g) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ tel que :

$$f^2 - f \circ g + 2f - e = 0.$$

Montrer : $g \circ f = f \circ g$.

19.13 Inégalité sur le rang de la composée de deux applications linéaires

Soient E, F, G trois K-ev de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

a) Montrer : $\mathrm{Ker}\,\big(g\,|_{\mathrm{Im}\,(f)}\big) = \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f)$.

b) En déduire : $\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}\,(f) - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f)\big)$.

c) Montrer : $\mathrm{rg}\,(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - \dim\,(F)$.

19.14 Endomorphismes transformant tout vecteur en un vecteur qui lui est colinéaire

Soient E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée. Démontrer que f est une homothétie.

Du mal à démarrer ?

19.1 On peut raisonner par équivalences logiques successives, en utilisant la définition d'image directe, d'image réciproque, de noyau, d'image d'une application linéaire.

19.2 Utiliser la définition d'une image directe, d'une image réciproque, du noyau et de l'image d'une application linéaire. On pourra raisonner par équivalences logiques successives

19.3 *1)* Montrer $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$, en passant par les éléments et en utilisant $f = h \circ g \circ f$.

2) Pour $y \in F$ fixé, obtenir une décomposition de y en somme d'un élément de $\operatorname{Ker}(g)$ et d'un élément de $\operatorname{Im}(f)$, en utilisant $g = g \circ f \circ k$.

19.4 Séparer chaque équivalence logique demandée en deux implications. Pour chaque implication, passer par les éléments et utiliser la définition de l'intersection de deux sev, de la somme de deux sev, du noyau et de l'image d'une application linéaire.

19.5 Exprimer p en fonction de f (si $a \neq 0$) et remplacer dans $p^2 = p$. Obtenir ainsi une équation satisfaite par f. Isoler e additivement dans cette équation.

19.6 $\Longrightarrow$: Montrer $f^2 = 0$ et utiliser le théorème du rang.

$\Longleftarrow$: Montrer $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$, puis comparer les dimensions en utilisant le théorème du rang.

19.7 *a)* Obtenir d'abord $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = E$, puis utiliser la formule de Grassmann pour déduire :

$$\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}.$$

b) Montrer que, pour tout $x \in E$:

$$f\big(x - f(x)\big) \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g).$$

On peut aussi montrer que f et g commutent.

19.8 *1)* Montrer $\operatorname{Im}(f + f') \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(f')$ puis passer aux dimensions.

2) Appliquer le résultat précédent à $(f + f', -f')$ au lieu de (f, f').

19.9 • Remarquer $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$ et montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \neq \operatorname{Im}(f)$ en raisonnant par l'absurde. Obtenir ainsi :

$$\{0\} \subsetneqq \operatorname{Im}(f^2) \subsetneqq \operatorname{Im}(f) \subsetneqq \mathbb{R}^3,$$

puis passer aux dimensions.

• Remarquer $\operatorname{Ker}(f^2) \supset \operatorname{Ker}(f)$ et utiliser le théorème du rang.

19.10 i) $\Longrightarrow$ (ii) :

• Se rappeler que, pour des applications, on a :

$$g \circ f \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ injective},$$
$$g \circ f \text{ surjective} \Longrightarrow g \text{ surjective}.$$

• Montrer : $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

Pour montrer $\operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(f) = F$, pour $y \in F$ donné, amener $x \in E$ tel que $g(y) = g\big(f(x)\big)$, puis considérer $y - f(x)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

• Montrer : $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \{0\}$.

• Pour $z \in G$, amener $y \in F$ tel que $z = g(y)$, puis décomposer linéairement y sur $\operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

19.11 Développer :

$(p+q)^2 = (p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2.$

Attention : a priori, p et q ne commutent pas ; on ne peut donc pas remplacer $p \circ q$ par $q \circ p$.

Une implication est évidente.

Pour la réciproque, ayant obtenu $p \circ q + q \circ p = 0$, penser à composer par p ou par q à gauche ou à droite, pour déduire de nouvelles égalités.

19.12 Obtenir $(f - g + 2e) \circ f = e$. Se rappeler que, d'après le cours, si E est de dimension finie et si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifient $u \circ v = e$, alors $v \circ u = e$.

19.13 Se rappeler d'abord que la notation $g\,|_{\operatorname{Im}(f)}$ désigne la restriction de g à $\operatorname{Im}(f)$ au départ :

$$g\,|_{\operatorname{Im}(f)} : \operatorname{Im}(f) \longrightarrow G, \quad y \longmapsto g(y).$$

a) Revenir à la définition du noyau d'une application linéaire.

b) Appliquer le théorème du rang à $g\,|_{\operatorname{Im}(f)}$.

c) Utiliser le théorème du rang.

19.14 Pour tout $x \in E - \{0\}$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, mais, a priori, λ_x dépend de x. Il faut montrer que λ_x ne dépend pas de x. À cet effet, pour $(x, y) \in \big(E - \{0\}\big)^2$, considérer $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$, et séparer l'étude en deux cas selon que la famille (x, y) est libre ou est liée.

Corrigés des exercices

19.1

a) On a, pour tout $y \in F$:

$$\begin{aligned} & y \in f\big(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)\big) \\ \iff\quad & \exists\, x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f),\quad y = f(x) \\ \iff\quad & \exists\, x \in E,\quad \big(g \circ f(x) = 0 \;\text{ et }\; y = f(x)\big) \\ \iff\quad & \exists\, x \in E,\quad \big(g(y) = 0 \;\text{ et }\; y = f(x)\big) \\ \iff\quad & g(y) = 0 \;\text{ et }\; \big(\exists\, x \in E,\quad y = f(x)\big) \\ \iff\quad & y \in \mathrm{Ker}\,(g) \;\text{ et }\; y \in \mathrm{Im}\,(f) \\ \iff\quad & y \in \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f). \end{aligned}$$

On conclut : $f\big(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)\big) = \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f)$.

b) On a, pour tout $y \in F$:

$$\begin{aligned} & y \in g^{-1}\big(\mathrm{Im}\,(g \circ f)\big) \\ \iff\quad & g(y) \in \mathrm{Im}\,(g \circ f) \\ \iff\quad & \exists\, x \in E,\quad g(y) = (g \circ f)(x) \\ \iff\quad & \exists\, x \in E,\quad g\big(y - f(x)\big) = 0 \\ \iff\quad & \exists\, x \in E,\quad y - f(x) \in \mathrm{Ker}\,(g) \\ \iff\quad & \exists\, z \in \mathrm{Im}\,(f),\quad y - z \in \mathrm{Ker}\,(g) \\ \iff\quad & y \in \mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Im}\,(f). \end{aligned}$$

On conclut : $g^{-1}\big(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)\big) = \mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Im}\,(f)$.

19.2

a) On a, pour tout $x \in E$:

$$x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f) \iff (g \circ f)(x) = 0 \iff g\big(f(x)\big) = 0$$

$$\iff f(x) \in \mathrm{Ker}\,(g) \iff x \in f^{-1}\big(\mathrm{Ker}\,(g)\big),$$

d'où : $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = f^{-1}\big(\mathrm{Ker}\,(g)\big)$.

b) Comme $\mathrm{Ker}\,(g) \supset \{0\}$, on déduit de *a)* :

$$\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = f^{-1}\big(\mathrm{Ker}\,(g)\big) \supset f^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker}\,(f).$$

c) On a : $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = (g \circ f)(E) = g\big(f(E)\big) = g(\mathrm{Im}\,(f))$.

d) Comme $\mathrm{Im}\,(f) \subset F$, on déduit de *c)* :

$$\mathrm{Im}\,(g \circ f) = g\big(\mathrm{Im}\,(f)\big) \subset g(F) = \mathrm{Im}\,(g).$$

19.3

1) Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f)$. Alors, $g(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a :

$$y = f(x) = (h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = (h \circ g)(y)$$

$$= h\big(g(y)\big) = h(0) = 0.$$

Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$.

2) Soit $y \in F$. On a : $g(y) = (g \circ f \circ k)(y) = g\big((f \circ k)(y)\big)$, puis : $g\big(y - (f \circ k)(y)\big) = 0$. On a alors

$$y = \underbrace{\big(y - (f \circ k)(y)\big)}_{\in \mathrm{Ker}\,(g)} + \underbrace{f\big(k(y)\big)}_{\in \mathrm{Im}\,(f)},$$

ce qui montre : $\mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Im}\,(f) = F$.

On conclut que $\mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires dans F.

19.4

a) 1) Supposons $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f)$.

Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $g(y) = 0$.

d'où : $(g \circ f)(x) = g(y) = 0$,

donc $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(f)$, puis $y = f(x) = 0$.

Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{[0\}$.

2) Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$.

D'après l'exercice 19.2, on a déjà :

$$\mathrm{Ker}\,(g \circ f) \supset \mathrm{Ker}\,(f).$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.

On a alors $g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = 0$,
donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$,
d'où $f(x) = 0$, $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

Ceci montre $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$ et finalement :

$$\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(f).$$

b) 1) Supposons $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g)$.

Soit $y \in F$. Comme $g(y) \in \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $g(y) = (g \circ f)(x)$. On déduit $g\big(y - f(x)\big) = 0$, c'est-à-dire : $y - f(x) \in \mathrm{Ker}\,(g)$.

On a alors :

$$y = \big(y - f(x)\big) + f(x) \in \mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Im}\,(f).$$

Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Im}\,(f) = F$.

2) Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Im}\,(f) = F$.

D'après l'exercice 19.2, on a déjà :

$$\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g).$$

Soit $z \in \mathrm{Im}\,(g)$. Il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Il existe ensuite $u \in \mathrm{Ker}\,(g)$ et $x \in E$ tels que $y = u + f(x)$. On a alors :

$$z = g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) \in \mathrm{Im}\,(g \circ f).$$

Ceci montre $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(g \circ f)$ et finalement :

$$\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g).$$

19.5

Exprimons p en fonction de f, si c'est possible.

Si $a = 0$, alors $f = e$, donc $f \in \mathcal{GL}(E)$ et $f^{-1} = e$.

Supposons $a \neq 0$. Alors, $p = \dfrac{1}{a}(e - f)$, d'où :

$$p^2 = p \iff \frac{1}{a^2}(e - f)^2 = \frac{1}{a}(e - f)$$

$$\iff e - 2f + f^2 = ae - af \iff f^2 + (a - 2)f = (a - 1)e$$

$$\iff \begin{cases} f \circ \Big(\dfrac{1}{a-1}\big(f+(a-2)e\big)\Big) = e \\ \Big(\dfrac{1}{a-1}\big(f+(a-2)e\big)\Big) \circ f = e. \end{cases}$$

Ceci montre que $f \in \mathcal{GL}(E)$ et $f^{-1} = \dfrac{1}{a-1}\big(f+(a-2)e\big)$.

On peut remarquer que le résultat du cas $a = 0$ rentre dans ce dernier résultat.

Finalement, $f \in \mathcal{GL}(E)$ et $f^{-1} = \dfrac{1}{a-1}\big(f+(a-2)e\big)$.

19.6

$\Longrightarrow$: Supposons $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.

• On a, pour tout $x \in E$: $f(x) \in \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$, donc $f\big(f(x)\big) = 0$, ce qui montre : $f^2 = 0$.

• En utilisant le théorème du rang et l'hypothèse, on a :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \dim \operatorname{Ker}(f) = n - \operatorname{rg}(f),$$

donc $n = 2\operatorname{rg}(f)$.

$\Longleftarrow$: Supposons $f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$.

• On a, pour tout $x \in E$: $f\big(f(x)\big) = 0$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(f)$, ce qui montre : $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

• En utilisant le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Ker}(f) = n - \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im}(f).$$

Il en résulte : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.

19.7

a) 1) • On a :

$$\forall x \in E, \quad x = e(x) = f(x) + g(x) \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g),$$

donc $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = E$.

• Ensuite, pour étudier $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)$, appliquons la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned} &\dim\big(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)\big) \\ &= \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(g)\big) - \dim\big(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)\big) \\ &= \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(E) \leqslant n - n = 0, \end{aligned}$$

donc : $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$.

On conclut que $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E.

2) On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) &= \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(g)\big) \\ &= \dim\big(\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)\big) = \dim(E) = n. \end{aligned}$$

b) De $f + g = e$, on déduit, en composant par f à droite : $f^2 + g \circ f = f$. On a donc, pour tout $x \in E$:

$$f\big(x - f(x)\big) = (f - f^2)(x) = g\big(f(x)\big).$$

On obtient : $f\big(x - f(x)\big) \in \operatorname{Im}(f)$
et $f\big(x - f(x)\big) = g\big(f(x)\big) \in \operatorname{Im}(g)$.
Comme $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E, il en résulte $f\big(x - f(x)\big) = 0$, d'où $f(x) = f^2(x)$. Ceci montre $f^2 = f$, donc f est un projecteur.

Par rôles symétriques de f et g, g est aussi un projecteur. Ou encore, comme f est un projecteur et que $g = e - f$, g est un projecteur, le projecteur associé à f.

19.8

1) On a : $\operatorname{Im}(f + f') \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(f')$, car :

$$\forall x \in E, \quad (f + f')(x) = f(x) + f'(x) \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(f').$$

En passant aux dimensions :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f + f') &= \dim\big(\operatorname{Im}(f + f')\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(f')\big) \\ &\leqslant \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f')\big) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(f'). \end{aligned}$$

2) En appliquant le résultat précédent à $(f + f', -f')$ à la place de (f, f'), on obtient :

$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f + f') + \operatorname{rg}(-f') = \operatorname{rg}(f + f') + \operatorname{rg}(f'),$$

donc : $\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(f') \leqslant \operatorname{rg}(f + f')$.

En échangeant f et f' : $\operatorname{rg}(f') - \operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f' + f)$,

d'où finalement : $\big|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(f')\big| \leqslant \operatorname{rg}(f + f')$.

Remarquer l'analogie avec l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire renversée, par exemple pour la valeur absolue dans $\mathbb{R}$: $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2$, $\big||x| - |x'|\big| \leqslant |x + x'| \leqslant |x| + |x'|$.

19.9

• Puisque $f^2 = f \circ f$, on a : $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$.

Montrons : $\operatorname{Im}(f^2) \neq \operatorname{Im}(f)$. À cet effet, raisonnons par l'absurde : supposons $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$.

Soit $x \in E$ quelconque. On a : $f(x) \in \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$, donc il existe $t \in E$ tel que $f(x) = f\big(f(t)\big) = f^2(t)$. D'où, en composant par f : $f^2(x) = f^3(t) = 0$. Ceci montre $f^2 = 0$, contradiction avec l'hypothèse $f^2 \neq 0$.

On a donc établi : $\operatorname{Im}(f^2) \subsetneq \operatorname{Im}(f)$.

D'autre part, $\{0\} \subsetneq \operatorname{Im}(f^2)$ car $f^2 \neq 0$, et $\operatorname{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$ car sinon f serait surjective, donc bijective (puisque E est de dimension finie), contradiction avec $f^3 = 0$.

Ainsi : $\{0\} \subsetneq \operatorname{Im}(f^2) \subsetneq \operatorname{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$,

Il en résulte, en passant aux dimensions :

$$0 < \operatorname{rg}(f^2) < \operatorname{rg}(f) < 3,$$

et donc, comme il s'agit de nombres entiers :

$$\operatorname{rg}(f^2) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(f) = 2.$$

• On a :

$$f^3 = 0 \iff \begin{cases} f \circ f^2 = 0 \\ f^2 \circ f = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f) \\ \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2). \end{cases}$$

D'autre part, d'après le théorème du rang :

$$\begin{cases} \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = 3 - \operatorname{rg}(f) = 1 = \operatorname{rg}(f^2) = \dim\big(\operatorname{Im}(f^2)\big) \\ \dim\big(\operatorname{Ker}(f^2)\big) = 3 - \operatorname{rg}(f^2) = 2 = \operatorname{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big). \end{cases}$$

On conclut : $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

Remarque :

Un exemple d'endomorphisme f convenant est, en notant $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(i) = j$, $f(j) = k$, $f(k) = 0$.

19.10

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons que $g \circ f$ soit un isomorphisme de E sur G.

• D'après un résultat classique sur les applications :

$$g \circ f \text{ bijective} \iff \begin{cases} g \circ f \text{ injective} \\ g \circ f \text{ surjective} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ injective} \\ g \text{ surjective.} \end{cases}$$

• Soit $y \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$. Alors, $g(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où : $0 = g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$.

Comme $g \circ f$ est bijective (donc injective), on déduit $x = 0$, puis $y = f(x) = 0$.

Ceci montre : $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

• Soit $y \in F$. Alors, $g(y) \in G$. Comme $g \circ f$ est bijective (donc surjective), il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g\big(f(x)\big)$. On a : $g\big(y - f(x)\big) = g(y) - g\big(f(x)\big) = 0$, donc $y - f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$.

Ainsi : $y = \underbrace{\big(y - f(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker}(g)} + \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im}(f)}$.

Ceci montre : $\operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(f) = F$.

On conclut : $F = \operatorname{Ker}(g) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

On suppose f injective, g surjective et $F = \operatorname{Ker}(g) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

• Soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Alors, $g\big(f(x)\big) = 0$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$. Ainsi, $f(x) \in \operatorname{Ker} \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$, donc $f(x) = 0$, puis, comme f est injective, $x = 0$.

Ceci montre que $g \circ f$ est injective.

• Soit $z \in G$. Puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme $F = \operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(f)$, il existe $u \in \operatorname{Ker}(g)$, $v \in \operatorname{Im}(f)$ tels que $y = u + v$. On a alors :

$$z = g(y) = g(u+v) = \underbrace{g(u)}_{=0} + g(v) = g(v).$$

Comme $v \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $v = f(x)$.
On a donc : $z = g(v) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$.

Ceci montre que $g \circ f$ est surjective.

On conclut que $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G.

19.11

1) Il est clair que, si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $p + q$ est un projecteur, car :

$$(p+q)^2 = (p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q.$$

2) Réciproquement, supposons que $p + q$ soit un projecteur de E. On a alors :

$$p+q = (p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q,$$

d'où : $p \circ q + q \circ p = 0$.

En composant par p à gauche, par p à droite, on obtient :

$$p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \quad \text{et} \quad p \circ q \circ p = q \circ p = 0,$$

d'où, en soustrayant : $p \circ q - q \circ p = 0$.

Comme $p \circ q + q \circ p = 0$ et $p \circ q - q \circ p = 0$

on déduit $2p \circ q = 2q \circ p = 0$, donc : $p \circ q = q \circ p = 0$.

19.12

D'après l'hypothèse, $f \circ (f - g + 2e) = e$, donc f admet un symétrique à droite pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$. Comme E est de dimension finie,, il en résulte $(f - g + 2e) \circ f = e$, c'est-à-dire : $f^2 - g \circ f + 2f - e = 0$.
Par soustraction, on déduit : $g \circ f = f \circ g$.

19.13

a) On a, pour tout $y \in F$:

$$y \in \operatorname{Ker}\big(g\,|_{\operatorname{Im}(f)}\big) \iff \big(y \in \operatorname{Im}(f) \ \text{ et } \ g(y) = 0\big)$$
$$\iff y \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f).$$

b) Puisque :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim\big(\operatorname{Im}(g \circ f)\big)$$
$$= \dim\big(\operatorname{Im}(g\,|_{\operatorname{Im}(f)})\big) = \operatorname{rg}\big(g\,|_{\operatorname{Im}(f)}\big),$$

on a, d'après le théorème du rang :

$$\operatorname{rg}\big(g\,|_{\operatorname{Im}(f)}\big) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) - \dim\big(\operatorname{Ker}(g\,|_{\operatorname{Im}(f)})\big),$$

d'où, en utilisant *a)* :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f) - \dim\big(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)\big).$$

c) Comme : $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$,

on a : $\dim\big(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big)$,

d'où, d'après *b)* et le théorème du rang :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \geqslant \operatorname{rg}(f) - \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big)$$
$$= \operatorname{rg}(f) - \big(\dim(F) - \operatorname{rg}(g)\big) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(F).$$

19.14

Par hypothèse, pour tout $x \in E - \{0\}$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Il est clair que, pour tout $x \in E - \{0\}$ fixé, λ_x est unique et, *a priori*, dépend de x.

Nous allons montrer que λ_x ne dépend pas de x.

Soit $(x, y) \in \big(E - \{0\}\big)^2$.

1) Supposons (x, y) libre. On a :

$$f(x) = \lambda_x x, \quad f(y) = \lambda_y y, \quad f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y),$$

d'où, par linéarité de f : $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y)$,

c'est-à-dire : $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$.

Comme (x, y) est libre, on a $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, et donc $\lambda_x = \lambda_y$.

2) Supposons (x, y) liée.

Il existe $\alpha \in K - \{0\}$ tel que $y = \alpha x$.

On a : $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x$

et : $f(y) = \alpha_y y = \lambda_y \alpha x$,

d'où : $(\lambda_x - \lambda_y)\alpha x = 0$, et donc $\lambda_y = \lambda_x$.

On a ainsi montré que λ_x ne dépend pas de x.

Donc, il existe $\lambda \in K$ tel que : $\forall x \in E - \{0\}, \quad f(x) = \lambda x$.

De plus, trivialement : $f(0) = 0 = \lambda 0$.

Finalement, $f = \lambda \operatorname{Id}_E$, c'est-à-dire que f est une homothétie.

Vrai ou Faux ?

19.1 L'application $f : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto \mathrm{X}P + 1$ est linéaire. V F

19.2 L'application $f : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto \mathrm{X}^2 P$ est linéaire. V F

19.3 Si E, F sont des $\mathbb{K}$-ev est si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors f^{-1} est linéaire. V F

19.4 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et s'il existe une famille finie $\mathcal{F}$ de E telle que $\mathcal{F}$ et $f(\mathcal{F})$ soient libres, alors f est injective. V F

19.5 On a, pour toutes $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$: $\mathrm{Im}\,(f+g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$. V F

19.6 On a, pour toutes $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$: $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$. V F

19.7 L'application linéaire $f : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto \mathrm{X}P$ est surjective. V F

19.8 L'application linéaire $g : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto P'$ est surjective. V F

19.9 Si E et F sont des ev de dimensions finies et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors f est bijective. V F

19.10 Si E, F, G sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors : V F

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\big(\mathrm{rg}\,(f),\ \mathrm{rg}\,(g)\big).$$

Vrai ou Faux, les réponses

19.1 On a $f(0) = 1 \neq 0$, donc f n'est pas linéaire. — V **F**

19.2 On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$: — **V** F

$$f(\alpha P + Q) = \mathrm{X}^2(\alpha P + Q) = \alpha \mathrm{X}^2 P + \mathrm{X}^2 Q = \alpha f(P) + f(Q).$$

19.3 C'est un résultat du cours — **V** F

19.4 Si $f \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$, et on a alors $x \neq 0$, $\mathcal{F} = (x)$ libre, $f(\mathcal{F}) = (f(x))$ libre et f peut ne pas être injective. — V **F**

19.5 Contrexemple : $f \neq 0,\ g = -f$ où $\mathrm{Im}\,(f+g) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) \neq \{0\}$. — V **F**

On a seulement l'inclusion $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$, car, si $y \in \mathrm{Im}\,(f+g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$, donc $y \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.

19.6 On a, pour tout $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$, $f(x) = 0$, donc $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(0) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$. — **V** F

Pour tout $z \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$, d'où $z = g\big(f(x)\big) \in \mathrm{Im}\,(g)$.

19.7 Le polynôme constant égal à 1 n'est pas atteint par f. — V **F**

19.8 Pour tout $Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il existe $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $P' = Q$, il suffit de prendre pour P une primitive de Q — **V** F

19.9 Contrexemple : $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R}^3,\ f : (x, y) \longmapsto (x, y, 0)$. — V **F**

Il y a eu oubli de l'hypothèse $\dim\,(E) = \dim\,(F)$.

19.10 C'est un résultat du cours. — **V** F

Chapitre 20

Calcul matriciel

Plan

K désigne un corps commutatif.

On utilise les abréviations :

ev pour espace vectoriel,

sev pour sous-espace vectoriel.

Thèmes abordés dans les exercices

- Calcul des puissances d'une matrice carrée assez simple
- Étude de l'inversibilité et, éventuellement, calcul de l'inverse d'une matrice carrée
- Étude d'ensembles structurés de matrices : groupes, anneaux, corps de matrices
- Détermination du rang d'une matrice.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions et structures des ensembles usuels de matrices : $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, $\mathbf{M}_n(K)$, $\mathbf{GL}_n(K)$, $\mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(K)$, $\mathbf{T}_{n,\mathrm{i}}(K)$, $\mathbf{D}_n(K)$, $\mathbf{S}_n(K)$, $\mathbf{A}_n(K)$
- Matrices élémentaires
- Définition et propriétés du rang d'une matrice.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour effectuer un calcul sur des matrices

- Essayer, autant que possible, de garder une notation globale (une lettre pour une matrice), ne faisant pas intervenir les termes des matrices.
- Lorsqu'intervient une matrice diagonale, ou une matrice trigonale, passer aux termes des matrices.

➟ **Exercices 20.1, 20.3, 20.8, 20.9, 20.18**

Exemple

On note $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation

$$M^3 = A,$$

d'inconnue $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, en remarquant que, si $M^3 = A$, alors $AM = MA$.

1) Soit $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = A$. On a alors :

$$AM = M^3M = M^4 = MM^3 = MA.$$

En notant $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} AM = MA \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 8x & 8y \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & -y \\ 8z & -t \end{pmatrix} \Longleftrightarrow y = z = 0. \end{aligned}$$

On a donc : $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

2) Puis :

$$M^3 = A \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^3 & 0 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^3 = 8 \\ t^3 = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ t = -1. \end{cases}$$

On conclut : $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Méthode

Pour effectuer un calcul sur des matrices avec paramètres

Essayer de décomposer linéairement ces matrices sur des matrices plus simples, sans paramètre, si c'est possible.

Exemple

Montrer que

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base et la dimension.

On a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $M(a,b) = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{notée } I} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } J}$,

donc $E = \mathrm{Vect}\,(I, J)$.

De plus :

$$aI + bJ = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = 0,$$

donc (I, J) est libre.

On conclut : E est un $\mathbb{R}$-ev, (I, J) est une base de E, $\dim(E) = 2$.

Méthode

Pour calculer les puissances A^k, avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou $k \in \mathbb{Z}$, d'une matrice carrée A

- Essayer de décomposer A en combinaison linéaire d'une matrice $\alpha \mathrm{I}_n$, $\alpha \in K$, et d'une matrice simple, souvent une matrice nilpotente, et utiliser la formule du binôme de Newton.
- Dans certains exemples simples, calculer A^2, A^3 et essayer de conjecturer une formule pour A^k, que l'on montrera alors par récurrence sur k.
- La formule obtenue pour A^k, $k \in \mathbb{N}$ sera souvent aussi valable pour $k \in \mathbb{Z}$.

➟ **Exercice 20.7**

D'autres méthodes, liées à la réduction des matrices carrées, seront vues en deuxième année.

Exemple

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

• *Calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}$:*

On a : $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{notée } I} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } N}$.

Puisque I et N commutent, on a, d'après la formule du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = (I+N)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} N^k$.

On remarque $N^2 = 0$, donc : $\forall k \geqslant 2, \quad N^k = 0$.

La somme précédente se réduit donc aux deux termes d'indices 0 et 1, d'où : $A^n = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} N = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est clair que la formule obtenue est aussi vraie pour $n = 0$, puisque $A^0 = I$.

• *Calcul de A^n pour $n \in \mathbb{Z}_-$:*

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}_-$, on a $-n \in \mathbb{N}$ et :

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

donc $A^n = (A^{-n})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On conclut : $\quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode

Pour montrer qu'une matrice carrée $A \in \mathbf{M}_n(K)$ est inversible, et éventuellement calculer son inverse

- Noter $(\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$, $(C_1, ..., C_n)$ la famille des colonnes de A. Exprimer $C_1, ..., C_n$ en fonction de $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n$ par la donnée de A, résoudre ce système en considérant que les inconnues sont $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n$, et en déduire l'inversibilité de A et l'expression de l'inverse A^{-1} de A.

- Associer à la matrice carrée A un système linéaire $AX = Y$, où X, Y sont des matrices-colonnes, et résoudre ce système en considérant que l'inconnue est X.
- Conjecturer la forme B de la matrice inverse de A, et vérifier que celle-ci convient, en calculant le produit AB (ou BA).
- Résoudre l'équation $AB = \mathrm{I}_n$ (ou $BA = \mathrm{I}_n$) où B est une matrice carrée inconnue, d'une forme particulière.
- Former une équation simple sur A, puis isoler le terme en I_n.
- Se rappeler que toute matrice triangulaire à termes diagonaux tous non nuls est inversible.

➟ **Exercices 20.2, 20.6, 20.12, 20.18**

Voir aussi les méthodes à retenir du chapitre 21.

Exemple

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$$

est inversible et calculer son inverse.

En notant (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on a :

$$\begin{cases} C_1 = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ C_2 = 2e_1 + e_2 \\ C_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_2 = C_2 - 2e_1 \\ e_3 = C_3 - e_1 \\ C_1 = e_1 + (C_2 - 2e_1) - 2(C_3 - e_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 = C_1 - C_2 + 2C_3 \\ e_2 = -2C_1 + 3C_2 - 4C_3 \\ e_3 = -C_1 + C_2 - C_3. \end{cases}$$

On conclut : A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$4A^2 - 3A - \mathrm{I}_3 = 0.$$

Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.

On a : $\begin{cases} A(4A - 3\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3 \\ (4A - 3\,\mathrm{I}_3)A = \mathrm{I}_3 \end{cases}$

donc A est inversible et $A^{-1} = 4A - 3\,\mathrm{I}_3$.

Méthode

Pour calculer le rang d'une matrice A

Déterminer la dimension du sev engendré par les colonnes de A (ou la dimension du sev engendré par les lignes de A), qui est égale au rang de A.

➟ **Exercices 20.10, 20.13, 20.15**

Voir aussi les méthodes à retenir du chapitre 21.

Exemple

Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

On a $L_1 = L_3$, donc $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B)$, où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

Si $a \neq 1$, alors L_1 et L_2 ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}\,(B) = 2$.

Si $a = 1$, alors $L_1 = L_2 \neq 0$, donc $\mathrm{rg}\,(B) = 1$.

On conclut : $\quad \mathrm{rg}\,(A) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad a \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad a = 1. \end{cases}$

Méthode

Pour faire intervenir le rang d'une matrice A

Utiliser la définition du rang d'une matrice comme dimension du sev engendré par les colonnes de A (ou par les lignes de A).

➟ **Exercice 20.14**

Voir aussi les méthodes à retenir du chapitre 21.

Exemple

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$. Montrer :

$$\mathrm{rg}\,(AB) \leqslant \mathrm{Min}\big(\mathrm{rg}\,(A),\, \mathrm{rg}\,(B)\big).$$

• Notons $a \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$, $b \in \mathcal{L}(K^q, K^p)$ les applications linéaires canoniquement représentées par A, B respectivement.

D'après le cours, :

$$\mathrm{rg}\,(AB) = \mathrm{rg}\,(a \circ b), \quad \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(a), \quad \mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,(b).$$

On a : $\mathrm{Im}\,(a \circ b) \subset \mathrm{Im}\,(a)$, donc $\dim \mathrm{Im}\,(a \circ b) \leqslant \dim \mathrm{Im}\,(a)$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}\,(a \circ b) \leqslant \mathrm{rg}\,(a)$, d'où : $\mathrm{rg}\,(AB) \leqslant \mathrm{rg}\,(A)$.

• En appliquant le résultat précédent à $({}^{\mathrm{t}}B,\, {}^{\mathrm{t}}A)$ à la place de $(A,\, B)$, on a : $\mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A) \leqslant \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}B)$.

Mais, d'après le cours, le rang de la transposée d'une matrice est égal au rang de cette matrice, donc :

$$\mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}\,\big({}^{\mathrm{t}}(AB)\big) = \mathrm{rg}\,(AB) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}B) = \mathrm{rg}\,(B).$$

On déduit : $\mathrm{rg}\,(AB) \leqslant \mathrm{rg}\,(B)$.

On conclut : $\quad \mathrm{rg}\,(AB) \leqslant \mathrm{Min}\big(\mathrm{rg}\,(A),\, \mathrm{rg}\,(B)\big)$.

Ainsi, dans un produit de matrices, le rang ne peut que diminuer (au sens large).

Méthode

Pour manipuler des matrices triangulaires

Utiliser les propriétés du cours sur les matrices triangulaires, en particulier :

- la somme et le produit de deux matrices triangulaires supérieures sont triangulaires supérieures
- une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses termes diagonaux sont tous non nuls. De plus, dans ce cas, on connaît les termes diagonaux de la matrice inverse.

➟ **Exercices 20.2, 20.7**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. On note E l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont un terme diagonal au moins est nul.

Montrer que E est stable par multiplication.

Est-ce que E est stable par addition ?

• Soient $A, B \in E$.

Puisque A et B sont triangulaires supérieures, d'après le cours, AB est triangulaire supérieure.

De plus, les termes diagonaux de AB sont les produits des termes diagonaux de A et de B à la même place, donc, puisque l'un au moins des termes diagonaux de A (par exemple) est nul, l'un au moins des termes diagonaux de AB est aussi nul.

Ceci montre : $AB \in E$.

• En prenant pour A la matrice diagonale de termes diagonaux $(1, 0, 0, ..., 0)$ et pour B la matrice diagonale de termes diagonaux $(0, 1, 1, ..., 1)$, on a $A \in E$, $B \in E$, mais $A + B \notin E$, car tous les termes diagonaux de $A + B$ sont égaux à 1.

On conclut que E n'est pas stable pour l'addition.

Méthode

Pour manipuler des transposées de matrices, ou des traces de matrices carrées

Privilégier la notation globale des matrices, en utilisant les propriétés de la transposition et de la trace :

$$^{\mathrm{t}}(\alpha A + B) = \alpha\, ^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B, \quad ^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\, ^{\mathrm{t}}A$$

$$\mathrm{tr}\,(\alpha A + B) = \alpha\, \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B), \quad \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA), \quad \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{tr}\,(A).$$

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : ${}^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}AB$ et $AB = BA$.

Montrer : ${}^{\mathrm{t}}(A^2)A^2 = {}^{\mathrm{t}}(A^2)B^2$.

On a :

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}(A^2)A^2 &= ({}^{\mathrm{t}}A\, {}^{\mathrm{t}}A)(AA) = {}^{\mathrm{t}}A({}^{\mathrm{t}}AA)A \\ &= {}^{\mathrm{t}}A({}^{\mathrm{t}}AB)A = ({}^{\mathrm{t}}A\, {}^{\mathrm{t}}A)(BA) = ({}^{\mathrm{t}}A\, {}^{\mathrm{t}}A)(AB), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}(A^2)B^2 &= ({}^{\mathrm{t}}A\, {}^{\mathrm{t}}A)(BB) \\ &= {}^{\mathrm{t}}A({}^{\mathrm{t}}AB)B = {}^{\mathrm{t}}A({}^{\mathrm{t}}AA)B = ({}^{\mathrm{t}}A\, {}^{\mathrm{t}}A)(AB). \end{aligned}$$

Il en résulte : ${}^{\mathrm{t}}(A^2)A^2 = {}^{\mathrm{t}}(A^2)B^2$.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$M + {}^{\mathrm{t}}M = 2\,\mathrm{tr}\,(M)\,\mathrm{I}_n \iff {}^{\mathrm{t}}M = -M.$$

1) Supposons $M + {}^{\mathrm{t}}M = 2\,\mathrm{tr}\,(M)\,\mathrm{I}_n$.

On a, en prenant la trace :

$$\begin{cases} \mathrm{tr}\,(M + {}^{\mathrm{t}}M) = \mathrm{tr}\,(M) + \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}M) = 2\,\mathrm{tr}\,(M) \\ \mathrm{tr}\,\big(2\,\mathrm{tr}\,(M)\,\mathrm{I}_n\big) = 2\,\mathrm{tr}\,(M)\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{I}_n) = 2n\,\mathrm{tr}\,(M), \end{cases}$$

d'où : $2\,\mathrm{tr}\,(M) = 2n\,\mathrm{tr}\,(M)$.

Comme $n \neq 1$, on déduit $\mathrm{tr}\,(M) = 0$, puis $M + {}^{\mathrm{t}}M = 0$, donc ${}^{\mathrm{t}}M = -M$.

2) Réciproquement, supposons ${}^{\mathrm{t}}M = -M$.

On a, en prenant la trace :

$$\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}M) = \mathrm{tr}\,(M) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\,(-M) = -\,\mathrm{tr}\,(M),$$

d'où $\mathrm{tr}\,(M) = -\,\mathrm{tr}\,(M)$, $2\,\mathrm{tr}\,(M) = 0$, $\mathrm{tr}\,(M) = 0$.

On a alors $M + {}^{\mathrm{t}}M = 2\,\mathrm{tr}\,(M)\,\mathrm{I}_n$.

Méthode

Pour manipuler des matrices symétriques et des matrices antisymétriques

Essayer de :

- utiliser la définition, pour $A \in \mathbf{M}_n(K)$:
$A \in \mathbf{S}_n(K) \iff {}^{\mathrm{t}}A = A, \quad A \in \mathbf{A}_n(K) \iff {}^{\mathrm{t}}A = -A.$
- utiliser $\mathbf{S}_n(K) \oplus \mathbf{A}_n(K) = \mathbf{M}_n(K)$ et la décomposition :
$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \quad A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A)}_{\in \mathbf{S}_n(K)} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^{\mathrm{t}}A)}_{\in \mathbf{A}_n(K)}.$$
- utiliser : $\dim\big(\mathbf{S}_n(K)\big) = \dfrac{n(n+1)}{2}, \quad \dim\big(\mathbf{A}_n(K)\big) = \dfrac{n(n-1)}{2}.$

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $B, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = B - C$.

Montrer : ${}^{\mathrm{t}}B + C \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

On a :
$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}B + C) &= B + {}^{\mathrm{t}}C = (A + C) + {}^{\mathrm{t}}C = A + (C + {}^{\mathrm{t}}C) \\ &= {}^{\mathrm{t}}A + ({}^{\mathrm{t}}C + C) = {}^{\mathrm{t}}(A + C) + C = {}^{\mathrm{t}}B + C, \end{aligned}$$
donc : ${}^{\mathrm{t}}B + C \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{A}_n(\mathbb{K})$.
Montrer : $AB - BA \in \mathbf{A}_n(\mathbb{K})$.

On a :
$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}(AB - BA) &= {}^{\mathrm{t}}(AB) - {}^{\mathrm{t}}(BA) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A - {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B \\ &= (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -(AB - BA), \end{aligned}$$
donc : $AB - BA \in \mathbf{A}_n(\mathbb{K})$.

Énoncés des exercices

20.1 Équation satisfaite par toute matrice carrée d'ordre 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer : $M^2 - (a+d)M + (ad-bc)\,\mathrm{I}_2 = 0$.

20.2 Exemples simples de calcul d'inverses de matrices carrées inversibles

Pour chacune des matrices suivantes de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, montrer qu'elle est inversible et calculer son inverse :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

20.3 Calculs simples sur des matrices carrées d'ordre n

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième : (1) ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$, (2) $A^2 = \mathrm{I}_n$, (3) ${}^{\mathrm{t}}A = A$.

20.4 Groupe multiplicatif des matrices triangulaires à termes diagonaux tous égaux à 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathbf{M}_n(K)$ telles que :
$$\forall (i,f) \in \{1,...,n\}^2, \quad \begin{cases} i > j \implies a_{ij} = 0 \\ i = j \implies a_{ij} = 2. \end{cases}$$
Montrer que E est un groupe pour la multiplication.

20.5 Exemple de sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$

On note, pour tout $(a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $M(a,t) = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{ch}\,t & -a\,\mathrm{sh}\,t \\ -a\,\mathrm{sh}\,t & a\,\mathrm{ch}\,t \end{pmatrix}$,

et $G = \big\{M(a,t)\,;\ (a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\big\}$. Montrer que G est un groupe pour la multiplication.

20.6 Exemple de calcul d'inverse d'une matrice carrée

$$\text{Soient } n \in \mathbb{N}^*,\ A = \big(\mathrm{Min}\,(i,j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

20.7 Calcul des puissances d'une matrice carrée avec paramètres, cas des exposants négatifs

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. On note $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{K})$.

a) Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que M est inversible et calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

20.8 Manipulation d'égalités matricielles

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A+B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $ABA = A^2B$, $BAB = B^2A$. Montrer : $AB = BA$.

20.9 Commutation par utilisation d'un inverse

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB = 2A + 3B$.

a) Montrer : $(A - 3\,\mathrm{I}_n)(B - 2\,\mathrm{I}_n) = 6\,\mathrm{I}_n$.

b) En déduire : $AB = BA$.

20.10 Exemple de calcul du rang d'une matrice carrée d'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rang de $A = \big(\sin(i+j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$?

20.11 Matrices à termes strictement positifs

On dit ici qu'une matrice à termes réels est **positive** si et seulement si tous ses termes sont > 0.

a) Montrer que la somme de deux matrices positives est positive et que le produit de deux matrices positives est positive.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ positive. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive telle que $A^kX = X$. Montrer qu'il existe $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive telle que $AY = Y$.

20.12 Étude des matrices combinaisons linéaires de l'identité et de la matrice de seuil

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $(a,b) \in K^2$, A la matrice de $\mathbf{M}_n(K)$ dont les termes diagonaux sont tous égaux à a et les termes hors diagonale sont tous égaux à b.
Étudier l'inversibilité de A et calculer A^{-1} quand cet inverse existe.

20.13 Calcul du rang d'une matrice dont les termes sont issus de la suite de Fibonacci

On note $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Déterminer le rang de la matrice $A_n = (\phi_{i+j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

20.14 Décomposition des matrices de rang $\leqslant 1$ en produit d'une colonne par une ligne

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $H \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{rg}\,(H) \leqslant 1$.

a) Montrer qu'il existe $(U,V) \in \big(\mathbf{M}_{n,1}(K)\big)^2$ tel que : $H = U\,{}^{\mathrm{t}}V$ et $\mathrm{tr}\,(H) = {}^{\mathrm{t}}VU$.

b) Montrer : $\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \quad HAH = \mathrm{tr}\,(AH)H$.

20.15 Exemple de calcul du rang d'une matrice carrée d'ordre n

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & (0) & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer le rang de A_n.

20.16 **Commutant d'une matrice diagonale à termes diagonaux deux à deux distincts**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $d_1, ..., d_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont, dans l'ordre, $d_1, ..., d_n$. Montrer que le commutant de D, c'est-à-dire l'ensemble $\mathrm{C}(D) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})\,;\ AD = DA\}$ est égal à l'ensemble $\mathbf{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

20.17 **Exemple de groupe multiplicatif de matrices carrées d'ordre trois**

On note, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$: $M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$,

et $G = \{M(a,b)\,;\ (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\}$.

a) Montrer que G est un groupe pour la multiplication des matrices carrées. Préciser l'élément neutre.

b) Est-ce que G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$?

20.18 **Exemple de calcul de l'inverse d'un polynôme de matrice carrée**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^5 + A = \mathrm{I}_n$.

Montrer que $A^2 + A + \mathrm{I}_n$ est inversible et calculer son inverse.

20.19 **Centre de $\mathbf{M}_n(K)$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le centre de $\mathbf{M}_n(K)$, c'est-à-dire :

$$\{A \in \mathbf{M}_n(K)\,;\ \forall M \in \mathbf{M}_n(K),\quad AM = MA\}.$$

Du mal à démarrer ?

20.1 Calculer M^2, puis le premier membre de l'égalité voulue.

20.2 Noter (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et (V_1, V_2, V_3) les colonnes de la matrice proposée. Exprimer, en utilisant la matrice de l'énoncé, V_1, V_2, V_3 en fonction de e_1, e_2, e_3, puis calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de V_1, V_2, V_3 par résolution d'un système d'équations, ce qui montre que la matrice est inversible et fournit son inverse.

20.3 Montrer successivement :

- $\big[(1) \text{ et } (2)\big] \Longrightarrow (3)$,
- $\big[(1) \text{ et } (3)\big] \Longrightarrow (2)$,
- $\big[(2) \text{ et } (3)\big] \Longrightarrow (1)$.

20.4 Montrer que E est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(K)$.

20.5 Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ pour la multiplication.

20.6 En notant $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $(C_1, ..., C_n)$ les colonnes de A, exprimer $C_1, ..., C_n$ en fonction de $e_1, ..., e_n$, puis inverser le système d'équations, en calculant $e_1, ..., e_n$ en fonction de $C_1, ..., C_n$, ce qui fournira A^{-1}.

20.7 *a)* Décomposer M en $M = \mathrm{I}_3 + N$ et utiliser la formule du binôme de Newton.

b) Utiliser la formule du binôme de Newton.

20.8 Calculer $A(AB - BA)$ et $B(AB - BA)$.

20.9 *a)* Immédiat.

b) Faire apparaître un produit égal à I_n, le produit en sens inverse est alors aussi égal à I_n.

20.10 Montrer que les colonnes de A se décomposent linéairement sur deux colonnes simples et fixes (qui ne sont pas, a priori, des colonnes de A).

20.11 *a)* Revenir aux éléments des matrices.

b) Considérer :

$$Y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i X = X + AX + \cdots + A^{k-1}X.$$

20.12 Décomposer linéairement A sur I_n et sur la matrice U dont tous les termes sont égaux à 1.

Remarquer que $U^2 = nU$. En déduire une équation du second degré satisfaite par A.

20.13 Remarquer que, pour tout $j \in \{0, ..., n\}$, la colonne numéro $j + 2$ de A_n est la somme des colonnes numéros $j + 1$ et j de A_n.

20.14 *a)* Remarquer que, puisque $\mathrm{rg}\,(H) = 1$, les colonnes de H sont colinéaires à une colonne fixe, qui n'est pas a priori une colonne de H.

b) Montrer, avec les notations de *a)* :

$$HAH = ({}^{\mathrm{t}}VAU)U\,{}^{\mathrm{t}}V.$$

Appliquer le résultat de *a)* à AH à la place de H.

20.15 Opérer $C_n \longleftarrow C_n - C_1 + C_2 + \cdots + (-1)^{n-1}C_{n-1}$, pour amener une n-ème colonne plus simple.

20.16 Un sens est évident.

Réciproquement, si $A \in \mathrm{C}\,(D)$, traduire $AD = DA$ en passant par les éléments.

20.17 *a)* Montrer que G est stable pour la multiplication, que $J = M(0, 1/2)$ est neutre dans G, et que tout $M(a, b)$ admet un symétrique pour la multiplication dans G, en résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} M(a,b)M(c,d) = J \\ M(c,d)M(a,b) = J \end{cases}$$

d'inconnue $(c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

b) Remarquer que G n'est pas inclus dans $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$, ou encore, remarquer que I_3 n'est pas dans G.

20.18 Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{X}^5 + \mathrm{X} - 1$ par $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$.

20.19 Utiliser les matrices élémentaires E_{ij}.

Corrigés des exercices

20.1

On calcule :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix},$$

d'où, en effectuant les opérations :

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)\,\mathrm{I}_2 = 0.$$

20.2

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et (V_1, V_2, V_3) les colonnes de la matrice proposée.
On exprime, en utilisant la matrice de l'énoncé, V_1, V_2, V_3 en fonction de e_1, e_2, e_3, puis on calcule e_1, e_2, e_3 en fonction de V_1, V_2, V_3 par résolution d'un système d'équations, ce qui montre que la matrice est inversible et fournit l'inverse.

• Pour A : $\begin{cases} V_1 = e_1 \\ V_2 = e_1 + e_2 \\ V_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = V_1 \\ e_2 = V_2 - V_1 \\ e_3 = V_3 - V_2 \end{cases}$

donc A est inversible et : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

• Pour B : $\begin{cases} V_1 = e_1 + e_2 \\ V_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ V_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = V_2 - V_3 \\ e_3 = V_2 - V_1 \\ e_2 = V_1 - (V_2 - V_3) \end{cases}$

donc B est inversible et : $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

20.3

• $\big[(1)$ et $(2)\big] \implies (3)$:
Supposons ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$ et $A^2 = \mathrm{I}_n$. Alors, A est inversible et on a : $A^{-1} = {}^{\mathrm{t}}A$ et $A^{-1} = A$, d'où : ${}^{\mathrm{t}}A = A$.

• $\big[(1)$ et $(3)\big] \implies (2)$:
Supposons ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$ et ${}^{\mathrm{t}}A = A$.
On a alors : $A^2 = {}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$.

• $\big[(2)$ et $(3)\big] \implies (1)$:
Supposons $A^2 = \mathrm{I}_n$ et ${}^{\mathrm{t}}A = A$. On a alors : ${}^{\mathrm{t}}AA = A^2 = \mathrm{I}_n$.

20.4

• Soient $A, B \in E$. Comme A et B sont triangulaires supérieures à termes diagonaux tous égaux à 1, par produit d'après le cours, AB l'est aussi, donc $AB \in E$.

• Il est clair que $\mathrm{I}_n \in E$.

• Si $A \in E$, alors, A est triangulaire supérieure à termes diagonaux tous non nuls, donc, d'après le cours, A est inversible et A^{-1} est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont tous égaux 1^{-1}, c'est-à-dire 1, donc $A^{-1} \in E$.

Ainsi, E est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(K)$, donc E est un groupe pour la multiplication.

20.5

Montrons que G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ pour la multiplication.

1) On a, pour tout $(a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\det\big(M(a,t)\big) = \begin{vmatrix} a\operatorname{ch} t & -a\operatorname{sh} t \\ -a\operatorname{sh} t & a\operatorname{ch} t \end{vmatrix} = a^2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) = a^2 \neq 0,$$

donc $M(a,t) \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.

2) On a : $\mathrm{I}_2 = M(1,0) \in G$.

3) Soient $(a,t), (a',t') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On a :

$$M(a,t)M(a',t') = \begin{pmatrix} a\operatorname{ch} t & -a\operatorname{sh} t \\ -a\operatorname{sh} t & a\operatorname{ch} t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'\operatorname{ch} t' & -a'\operatorname{sh} t' \\ -a'\operatorname{sh} t' & a'\operatorname{ch} t' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'(\operatorname{ch} t\operatorname{ch} t' + \operatorname{sh} t\operatorname{sh} t') & -aa'(\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t' + \operatorname{sh} t\operatorname{ch} t') \\ -aa'(\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t' + \operatorname{ch} t\operatorname{sh} t') & aa'(\operatorname{sh} t\operatorname{sh} t' + \operatorname{ch} t\operatorname{ch} t') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'\operatorname{ch}(t+t') & -aa'\operatorname{sh}(t+t') \\ -aa'\operatorname{sh}(t+t') & aa'\operatorname{ch}(t+t') \end{pmatrix} = M(aa',\, t+t') \in G,$$

car $(aa', t+t') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

4) Soit $(a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
D'après *3)* et *2)*, on a $(a^{-1}, -t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} M(a,t)M(a^{-1},-t) = M(aa^{-1},\, t-t) = M(1,0) = \mathrm{I}_2 \\ M(a^{-1},-t)M(a,t) = M(a^{-1}a,\, -t+t) = M(1,0) = \mathrm{I}_2. \end{cases}$$

Ceci montre : $\big(M(a,t)\big)^{-1} = M(a^{-1},-t) \in G$.

On conclut que G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, donc G est un groupe pour la multiplication.

20.6

Notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A. On a :

$$\begin{cases} C_1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \\ C_2 = e_1 + 2e_2 + \cdots + 2e_n \\ \quad\vdots \\ C_{n-1} = e_1 + 2e_2 + \cdots + (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n \\ C_n = e_1 + 2e_2 + \cdots + (n-1)e_{n-1} + ne_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 + e_2 + \cdots + e_n = C_1 \\ e_2 + \cdots + e_n = C_2 - C_1 \\ \quad\vdots \\ e_{n-1} + e_n = C_{n-1} - C_{n-2} \\ e_n = C_n - C_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 = C_1 - (C_2 - C_1) = 2C_1 - C_2 \\ e_2 = (C_2 - C_1) - (C_3 - C_2) = -C_1 + 2C_2 - C_3 \\ \quad \vdots \\ e_{n-1} = -C_{n-2} + 2C_{n-1} - C_n \\ e_n = -C_{n-1} + C_n. \end{cases}$$

Ceci montre que A est inversible et que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut contrôler le résultat, par exemple pour $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

20.7

a) On a : $M = \mathrm{I}_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et :

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{N} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{N} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N^2} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N^3} \end{array}.$$

Comme I_3 et N commutent, on a, par la formule du binôme de Newton, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$M^k = (\mathrm{I}_3 + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i = \binom{k}{0}\mathrm{I}_3 + \binom{k}{1}N + \binom{k}{2}N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \frac{k(k-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) • Notons M' la matrice obtenue en remplaçant k par -1 dans la formule obtenue en *a)*. On a :

$$MM' = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & -b + ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc M est inversible et $M^{-1} = M'$.

• Montrons que la formule obtenue en *a)* est aussi valable pour $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}_-$. On a alors $k \leqslant 0$, $-k \geqslant 0$, et :

$$\begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \frac{k(k-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -ka & -kb + \frac{k(k+1)}{2}ac \\ 0 & 1 & -kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M^{-k}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclut : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad M^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \frac{k(k-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

20.8

On a : $\begin{cases} A(AB - BA) = ABA - A^2B = 0 \\ B(BA - AB) = B^2A - BAB = 0, \end{cases}$

donc, en additionnant : $(A + B)(AB - BA) = 0$.

Comme $A + B$ est inversible, il s'ensuit : $AB - BA = 0$, donc : $AB = BA$.

20.9

a) $(A - 3\mathrm{I}_n)(B - 2\mathrm{I}_n) = AB - 2A - 3B + 6\mathrm{I}_n = 6\mathrm{I}_n$.

b) D'après *a)*, on a : $(A - 3\mathrm{I}_n)\Big(\dfrac{1}{6}(B - 2\mathrm{I}_n)\Big) = \mathrm{I}_n$.

Ainsi, $A - 3\mathrm{I}_n$ est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{6}(B - 2\mathrm{I}_n)$.
On a donc aussi, dans l'autre sens :

$$\Big(\frac{1}{6}(B - 2\mathrm{I}_n)\Big)(A - 3\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n,$$

d'où, en développant : $BA = 2A + 3B = AB$.

20.10

Puisque : $\sin(i + j) = \cos j \sin i + \sin j \cos i$,
pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, la $j$ème colonne de A est :

$$\cos j \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \vdots \\ \sin n \end{pmatrix} + \sin j \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \vdots \\ \cos n \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que les colonnes de A se décomposent linéairement sur deux colonnes fixes, donc $\mathrm{rg}\,(A) \leqslant 2$.

Il est clair que, si $n = 1$, alors $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.

Si $n \geqslant 2$, les deux premières colonnes de A forment une famille libre, puisque par exemple $\begin{vmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{vmatrix} ne0$, et on conclut : $\mathrm{rg}\,(A) = 2$;

Finalement : $\mathrm{rg}\,(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 2 & \text{si} \quad n \geqslant 2. \end{cases}$

20.11

a) 1) Soient $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ positives. On a alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$ et, pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$, $a_{ij} > 0$ et $b_{ij} > 0$, d'où $a_{ij} + b_{ij} > 0$, et donc $A + B$ est positive.

2) Soient $A=(a_{ij})_{ij}\in\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B=(b_{jk})_{jk}\in\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ positives.

On a alors $AB=(c_{ik})_{ik}$, où, pour tout couple $(i,k)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,q\}$: $c_{ik}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk}>0$, comme somme de produits de nombres tous >0, et donc AB est positive.

b) Considérons $Y=\sum_{i=0}^{k-1}A^iX$.

D'après *a)*, comme A et X sont positives, par produit, pour tout $i\in\{1,...,k-1\}$, A^iX est positive, puis, par addition Y est positive.

On, a :

$$\begin{aligned}AY&=A(X+AX+\cdots+A^{k-1}X)\\&=AX+A^2X+\cdots+A^{k-1}X+A^kX\\&=(AX+\cdots+A^{k-1}X)+X=Y.\end{aligned}$$

Ainsi, Y convient.

20.12

En notant $I=\mathrm{I}_n$ et $U=(1)\in\mathbf{M}_n(K)$, on a :

$$A=(a-b)I+bU.$$

Comme $U^2=nU$, on déduit :

$$\begin{aligned}A^2&=(a-b)^2I+\big(2(a-b)b+nb^2\big)U\\&=(a-b)^2I+\big(2(a-b)+nb\big)\big(A-(a-b)I\big)\\&=\big(2(a-b)+nb\big)A-\big((a-b)^2+nb(a-b)\big)I,\end{aligned}$$

donc :

$$A\big(A-\big(2(a-b)+nb\big)I\big)=-(a-b)\big(a+(n-1)b\big)I.$$

Si $a\neq b$ et $a+(n-1)b\neq 0$, alors, en notant

$$B=-\Big((a-b)\big(a+(n-1)b\big)\Big)^{-1}\Big(A-\big(2(a-b)+nb\big)I\Big),$$

on a $AB=I$, donc A est inversible et $A^{-1}=B$.

Si $a=b$, alors $A=aU$, A n'est pas inversible.

Si $a+(n-1)b=0$, alors la somme des colonnes de A est nulle, donc A n'est pas inversible.

20.13

Notons $C_0,...,C_n$ les colonnes de A_n. On a, pour tout $j\in\{0,...,n-2\}$:

$$C_j+C_{j+1}=\begin{pmatrix}\phi_j\\ \vdots\\ \phi_{j+n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\phi_{j+1}\\ \vdots\\ \phi_{j+n+1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\phi_j+\phi_{j+1}\\ \vdots\\ \phi_{j+n}+\phi_{j+n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_{j+2}\\ \vdots\\ \phi_{j+n+2}\end{pmatrix}=C_{j+2}.$$

Ainsi, chaque colonne de A_n, sauf C_1 et C_2, est la somme des deux colonnes précédentes.

Il en résulte que toutes les colonnes de A_n se décomposent linéairement sur C_1 et C_2, donc $\mathrm{rg}\,(A_n)\leqslant 2$.

• D'autre part : $C_1=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\end{pmatrix}$, donc (C_1,C_2) est libre, d'où : $\mathrm{rg}\,(A_n)\geqslant 2$.

On conclut : $\mathrm{rg}\,(A_n)=2$.

20.14

a) Puisque $\mathrm{rg}\,(H)\leqslant 1$, il existe une colonne $U=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$ telle que les colonnes de H soient toutes colinéaires à U.

Il existe donc $v_1,..;,v_n\in K$ tels que :

$$H=\big(v_1U\quad\dots\quad v_nU\big)=\begin{pmatrix}u_1v_1&\dots&u_1v_n\\ \vdots&&\vdots\\ u_nv_1&\dots&u_nv_n\end{pmatrix}=U\,{}^{\mathrm{t}}V.$$

De plus : $\mathrm{tr}\,(H)=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i={}^{\mathrm{t}}VU.$

b) Soit $A\in\mathbf{M}_n(K)$. On a :

$$HAH=(U\,{}^{\mathrm{t}}V)A(U\,{}^{\mathrm{t}}V)=U(\underbrace{{}^{\mathrm{t}}VAU}_{\in K})\,{}^{\mathrm{t}}V=({}^{\mathrm{t}}VAU)U\,{}^{\mathrm{t}}V.$$

Comme en *a)*, on a : $\mathrm{tr}\,(AH)={}^{\mathrm{t}}VAU.$

On conclut : $HAH=\mathrm{tr}\,(AH)H.$

20.15

Notons $C_1,...,C_n$ les colonnes de A_n. D'après le cours, par $C_n\longleftarrow C_n-C_1+C_2+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}$, on a :

$$\mathrm{rg}\,(A_n)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\ 1&1&\ddots&(0)&0\\ 0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&(0)&\ddots&1&0\\ 0&\dots&0&1&1+(-1)^{n-1}\end{pmatrix}.$$

• Si n est pair, alors la dernière colonne de A_n est nulle, et comme les $(n-1)$ premières colonnes de A_n forment une famille libre (d'après la méthode de Gauss), on conclut : $\mathrm{rg}\,(A_n)=n-1$.

• Si n est impair, alors les n colonnes de A_n forment une famille libre (d'après la méthode de Gauss), donc : $\mathrm{rg}\,(A_n)=n$.

On conclut : $\mathrm{rg}\,(A_n)=\begin{cases}n-1&\text{si } n \text{ est pair}\\ n&\text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$

On peut regrouper ces deux résultats en un seul :

$$\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\quad \mathrm{rg}\,(A_n)=2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1,$$

où $\lfloor.\rfloor$ désigne la partie entière.

CORRIGÉS

20.16

1) Soit $A \in \mathbf{D}_n(\mathbb{K})$. Puisque D et A sont diagonales, elles commutent entre elles, donc $A \in \mathrm{C}(D)$.

2) Réciproquement, soit $A \in \mathrm{C}(D)$. On a :

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{C}(D) &\iff AD = DA \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(D)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (D)_{ik}(A)_{kj} \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad (A)_{ij} d_j = d_i (A)_{ij} \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad (d_j - d_i)(A)_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

On a alors, par hypothèse, $d_i \neq d_j$, d'où : $(A)_{ij} = 0$.

Ceci montre que les termes non diagonaux de A sont tous nuls, donc $A \in \mathbf{D}_n(\mathbb{K})$.

Finalement : $\mathrm{C}(D) = \mathbf{D}_n(\mathbb{K})$.

20.17

a) 1) G est stable pour la multiplication car, pour tous $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$M(a,b)M(c,d) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ 0 & d & d \\ 0 & d & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & c+2ad & c+2ad \\ 0 & 2bd & 2bd \\ 0 & 2bd & 2bd \end{pmatrix} = M(c+2ad,\, 2bd) \in G.$$

2) On a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$M(a,b)M(0,1/2) = M(a,b)$ et $M(0,1/2)M(a,b) = M(a,b)$,

donc $M(0,1/2)$ est neutre pour la multiplication dans G.

• Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Montrons que $M(a,b)$ admet un symétrique pour la multiplication dans G et calculons ce symétrique. On a, pour tout $(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} M(a,b)M(c,d) = M(0,1/2) \\ M(c,d)M(a,b) = M(0,1/2) \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} M(c+2ad, 2bd) = M(0,1/2) \\ M(a+2cb, 2db) = M(0,1/2) \end{cases} \\ \iff &\; c + 2ad = 0, \quad 2bd = 1/2, \quad a + 2cb = 0, \quad 2db = 1/2 \\ \iff &\; c = -\frac{a}{2b}, \quad d = \frac{1}{4b} \neq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $M(a,b)$ admet un symétrique pour la multiplication dans G et que ce symétrique est $M\Big(-\dfrac{a}{2b},\, \dfrac{1}{4b}\Big)$.

4) La multiplication est associative dans G car elle l'est dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

b) G n'est pas un sous-groupe de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$, car G n'est pas inclus dans $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$, puisque, par exemple $M(0,1)$ n'est pas inversible dans $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$.

On peut aussi remarquer que le neutre I_3 de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ n'est pas dans G.

20.18

Cherchons l'éventuel inverse de $A^2 + A + \mathrm{I}_n$ sous forme d'un polynôme en A.

À cet effet, pour utiliser l'hypothèse $A^5 + A - \mathrm{I}_n = 0$, effectuons la division euclidienne de $\mathrm{X}^5 + \mathrm{X} - 1$ par $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$:

$$\begin{array}{rr|l} \mathrm{X}^5 & +\mathrm{X} - 1 & \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1 \\ \cline{3-3} -\mathrm{X}^4 - \mathrm{X}^3 & +\mathrm{X} - 1 & \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1 \\ & \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1 & \\ & -2 & \end{array}$$

On a donc : $\mathrm{X}^5 + \mathrm{X} - 1 = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1) - 2$.

D'où, en remplaçant X par A :

$$0 = A^5 + A - \mathrm{I}_n = (A^2 + A + \mathrm{I}_n)(A^3 - A^2 + \mathrm{I}_n) - 2\,\mathrm{I}_n.$$

On déduit : $(A^2 + A + \mathrm{I}_n)\Big(\dfrac{1}{2}(A^3 - A^2 + \mathrm{I}_n)\Big) = \mathrm{I}_n$,

et aussi l'autre égalité en permutant les deux facteurs, qui commutent.

On conclut que $A^2 + A + \mathrm{I}_n$ est inversible et que son inverse est $\dfrac{1}{2}\Big(A^3 - A^2 + \mathrm{I}_n\Big)$.

20.19

1) Soit A une matrice du centre de $\mathbf{M}_n(K)$.

On a, en particulier, pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$:

$$A\mathrm{E}_{ij} = \mathrm{E}_{ij} A.$$

Comme $A\mathrm{E}_{ij}$ est la matrice dont tous les termes sont nuls sauf ceux de la jè colonne, qui sont ceux de la $i$ème colonne de A, et que $\mathrm{E}_{ij}A$ est la matrice dont tous les termes sont nuls sauf ceux de la iè ligne, qui sont ceux de la jè ligne de A, on déduit :

$$\begin{cases} \forall k \neq i, \quad a_{ki} = 0 \\ \forall \ell \neq j, \quad a_{\ell j} = 0 \\ a_{ii} = a_{jj}. \end{cases}$$

Ceci montre que, pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $i \neq j$, on a : $a_{ij} = 0$ et $a_{ii} = a_{jj}$.

Ainsi, A est la matrice diagonale dont tous les termes sont égaux à a_{11}, donc $A = a_{11}\,\mathrm{I}_n$.

2) Réciproquement, il est clair que, pour tout $\alpha \in K$, $\alpha\,\mathrm{I}_n$ est dans le centre de $\mathbf{M}_n(K)$.

Finalement, le centre de $\mathbf{M}_n(K)$ est $\{\alpha \mathrm{I}_n\,;\ \alpha \in K\}$.

Vrai ou Faux ?

20.1 Si $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors AX est combinaison linéaire des colonnes de A. V F

20.2 On a, pour toutes A, B, $C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$: $BA + CA = A(B + C)$. V F

20.3 On a, pour toutes $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$: $AB = \mathrm{I}_n \iff BA = \mathrm{I}_n$. V F

20.4 On a, pour toutes $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$: $AB = 0 \iff BA = 0$. V F

20.5 Si $n \geqslant 2$, on a, pour toutes matrices A, B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. V F

20.6 On a, pour toutes $A, B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. V F

20.7 On a, pour toutes $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$. V F

20.8 Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses colonnes. V F

20.9 Si deux matrices A, B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sont symétriques, alors leur produit AB est aussi symétrique. V F

20.10 Si deux matrices A, B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sont symétriques, alors le produit ABA est aussi symétrique. V F

Vrai ou Faux, les réponses

20.1 C'est un résultat du cours. **V**

20.2 Le résultat correct est : $BA+CA=(B+C)A$ et il se peut que $B+C$ et A ne commutent pas. **F**

20.3 C'est un résultat du cours. **V**

Ainsi, si une matrice carrée admet un inverse d'un côté, alors elle admet aussi le même inverse de l'autre côté.

20.4 Contrexemple : $n=2,\ A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$ **F**

Ainsi, si le produit de deux matrices dans un certain ordre est la matrice nulle, alors le produit dans l'autre ordre n'est pas nécessairement la matrice nulle.

20.5 Contrexemple : $n=2,\ A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$ **F**

Les matrices A et B peuvent ne pas commuter.

La formule correcte est, en développant : $\quad (A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2.$

20.6 Contrexemple : $n=2,\ A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$ **F**

Le résultat correct est : AB est inversible et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

20.7 C'est une formule du cours. **V**

20.8 Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes. **F**

Par exemple, le rang de la matrice $\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}$ est égal à 1 et non à 2.

20.9 Contrexemple : $n=2,\ A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}.$ **F**

20.10 On a : $\ {}^{\mathrm{t}}(ABA)={}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A=ABA.$ **V**

Chapitre 21

Matrices et applications linéaires

Plan

K désigne un corps commutatif.

On utilise les abréviations :

ev pour espace vectoriel,

sev pour sous-espace vectoriel.

Thèmes abordés dans les exercices

- Obtention de résultats portant sur des applications linéaires en dimension finie, en passant par des matrices, et, inversement, obtention de résultats sur des matrices en passant par des applications linéaires
- Détermination du rang d'une matrice
- Étude de matrices semblables, de matrices non semblables.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Interprétation matricielle d'une application linéaire
- Définition et propriétés du rang d'une matrice
- Théorème du cours sur $A = P\mathrm{J}_{n,p,r}Q$
- Définition et propriétés de la similitude des matrices carrées.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour déterminer la matrice A d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E et une base $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_p)$ de F

Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, la colonne numéro j de A est formée par les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$ de F.

➟ **Exercices 21.1, 21.2**

Exemple

Déterminer la matrice de

$$f : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto P'$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Il est clair que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

On a : $f(1) = 0$, $f(\mathrm{X}) = 1$, $f(\mathrm{X}^2) = 2\mathrm{X}$, donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple

Déterminer la matrice de

$$f : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_3[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto \mathrm{X}P$$

dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Il est clair que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

On a : $f(1) = \mathrm{X}$, $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$, $f(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^3$, donc la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto AM.$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Il est clair que f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

La base canonique de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, où :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$f(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21},$$

$$f(E_{12}) = AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{22},$$

$$f(E_{21}) = AE_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11},$$

$$f(E_{22}) = AE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}.$$

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Méthode

Pour montrer qu'une matrice carrée $A \in \mathbf{M}_n(K)$ est inversible, et éventuellement calculer son inverse

- Voir les méthodes à retenir du chapitre 20
- Interpréter A comme matrice d'un certain endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n, montrer que f est bijectif, exprimer f^{-1}, et en déduire A^{-1}.

➟ **Exercice 21.7**

Exemple

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer A^{-1}.

Les méthodes du chapitre 20 s'appliquent.

On peut aussi interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
En notant $u_1 = f(e_1),\ u_2 = f(e_2),\ u_3 = f(e_3)$, on a :

$$u_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad u_2 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3, \quad u_3 = e_1 + e_2.$$

On déduit, par combinaisons linéaires par exemple :

$$e_1 = 4u_1 - u_2 + 7u_3, \quad e_2 = 4u_1 + u_2 - 6u_3, \quad e_3 = u_3 - u_1.$$

On conclut : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode

Pour calculer le rang d'une matrice A

- Voir les méthodes à retenir du chapitre 20.
- Faire apparaître A sous la forme $P\mathrm{J}_{n,p,r}Q$, où P et Q sont inversibles.
- Appliquer le théorème du rang, pour $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$:

$$\mathrm{rg}\,(A) = p - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(A)\big),$$

lorsqu'on peut déterminer $\mathrm{Ker}\,(A)$.

➟ **Exercice 21.10**

Exemple

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$. Démontrer (résultat du cours) :

$$\mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}\,(A).$$

Notons $r = \mathrm{rg}\,(A)$.

D'après le cours, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que $A = P\,\mathrm{J}_{n,p,r}Q$.

En transposant, on déduit : ${}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}Q\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{J}_{n,p,r}\,{}^{\mathrm{t}}P = {}^{\mathrm{t}}Q\,\mathrm{J}_{p,n,r}\,{}^{\mathrm{t}}P$.

D'après le cours, puisque P et Q sont inversibles, ${}^{\mathrm{t}}P$ et ${}^{\mathrm{t}}Q$ le sont aussi.

On conclut, d'après le cours : $\mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}A) = r = \mathrm{rg}\,(A)$.

Méthode

Pour manipuler des matrices décomposées en blocs

Essayer d'amener des combinaisons linéaires, des produit de matrices décomposées en blocs.

➟ **Exercice 21.13**

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C, D \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} AC & AD \\ BC & BD \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(K)$$

n'est pas inversible.

On a : $\begin{pmatrix} A & A \\ B & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & AD \\ BC & BD \end{pmatrix} = M.$

La matrice $\begin{pmatrix} A & A \\ B & B \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, puisque, par exemple, les colonnes C_1 et C_{n+1} sont égales.

Par produit, on déduit que M n'est pas inversible.

Méthode

Pour montrer que deux matrices carrées sont semblables

Trouver une matrice carrée inversible P telle que : $B = PAP^{-1}$.

➟ **Exercice 21.9**

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer que AB et BA sont semblables.

On remarque : $AB = AB(AA^{-1}) = A(BA)A^{-1}$,

donc AB et BA sont semblables.

Exemple

On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}).$$

Montrer que A et B sont semblables.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ représenté par A dans $\mathcal{B}$.
On a donc : $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = 0$.

En notant $\mathcal{C} = (e_2, e_1)$, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on a $f(e_2) = 0$, $f(e_1) = e_2$, donc la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est la matrice B.

Ainsi, A et B représentent le même endomorphisme, donc A et B sont semblables.

Méthode

Pour montrer que deux matrices carrées A, B ne sont pas semblables

Essayer de :

- montrer $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(B)$, ou $\det(A) \neq \det(B)$, ou $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(B)$.
- montrer que l'une des deux matrices carrées A, B vérifie une équation polynomiale que ne vérifie pas l'autre.
- montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\operatorname{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \operatorname{rg}(B - \lambda \mathrm{I}_n)$.

➟ **Exercice 21.9**

Exemple

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que A, B, C sont deux à deux non semblables.

On a : $\operatorname{rg}(A) = 2$ et $\operatorname{rg}(B) = 3$, d'où $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(B)$, donc A et B ne sont pas semblables.

On a : $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 3$ et $\operatorname{tr}(C) = -1$, d'où $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(C)$ et $\operatorname{tr}(B) \neq \operatorname{tr}(C)$, donc A et C ne sont pas semblables, B et C ne sont pas semblables.

Énoncés des exercices

21.1 Endomorphismes nilpotents en dimension 2

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

21.2 Exemple de changement de bases pour une application linéaire

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, $\mathcal{E} = (e_1,\, e_2)$ une base de E, F un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, $\mathcal{F} = (f_1,\, f_2,\, f_3)$ une base de F. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, et u l'application linéaire de E dans F représentée par A dans les bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F.

a) Exprimer $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sur $f_1,\, f_2,\, f_3$.

b) On note $e'_1 = e_1,\ e'_2 = e_1 + e_2,\ \mathcal{E}' = (e'_1,\, e'_2),\ f'_1 = f_1 + f_2,\ f'_2 = f_1 + f_3,$ $f'_3 = f_2 + f_3,\ \mathcal{F}' = (f'_1,\, f'_2,\, f'_3)$. Montrer que $\mathcal{E}'$ est une base de E et que $\mathcal{F}'$ est une base de F, et déterminer la matrice A' de u dans les bases $\mathcal{E}'$ de E et $\mathcal{F}'$ de F.

21.3 Exemple de détermination d'un noyau, d'une image, d'un rang

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice A dans les bases canoniques.

a) Déterminer un système d'équations de $\mathrm{Ker}\,(f)$, puis une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big)$.

b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Quel est le rang de f ?

21.4 Exemple d'isomorphisme de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On considère l'application

$$f : \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1},\quad P \longmapsto f(P) = \big(P(a_0),\, P'(a_1), ..., P^{(n)}(a_n)\big).$$

Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

21.5 Exemple de détermination d'un noyau, d'une image

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\quad M \longmapsto AM.$

a) Vérifier que f est linéaire.

b) 1) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

2) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

21.6 Endomorphismes nilpotents d'ordre trois dans un espace vectoriel de dimension trois

Soient E un K-ev de dimension trois, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer le commutant C_N de N dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble :

$$C_N = \big\{A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})\,;\ AN = NA\big\}.$$

c) En déduire, en notant $e = \mathrm{Id}_E$: $\big\{g \in \mathcal{L}(E)\,;\ g \circ f = f \circ g\big\} = \mathrm{Vect}\,(e,\, f,\, f^2)$.

21.7 Exemple de calcul de l'inverse d'une matrice triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A la matrice carrée réelle d'ordre $n+1$ dont le terme situé à la ligne i, colonne j est le coefficient binomial $\dbinom{j}{i}$, où, par convention, ce coefficient est nul si $i > j$.

a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad P(\mathrm{X}) \longmapsto P(\mathrm{X}+1)$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, et préciser la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

21.8 Trois matrices deux à deux semblables, dont l'une au moins est supposée inversible

Soient $A,\, B,\, C \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que A soit inversible. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A,\, B,\, C$ sont deux à deux semblables

(ii) $\exists\,(X,\, Y,\, Z) \in \big(\mathbf{M}_n(K)\big)^3, \quad XYZ = A, \quad YZX = B, \quad ZXY = C.$

21.9 Exemples de matrices carrées d'ordre trois, semblables, non semblables

Les matrices carrées d'ordre trois A et B sont-elles semblables, dans les exemples suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

21.10 Exemple de calcul d'un couple (P, Q) de matrices inversibles tel que $A = P\mathrm{J}_{n,p,r}Q$

On note : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $(P, Q) \in \big(\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})\big)^2$ tel que $A = P\mathrm{J}Q$, et calculer un tel couple (P, Q).

21.11 Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(K)$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in K$ deux à deux distincts.

On note $D = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{M}_n(K)$ et on considère l'application

$$f : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathbf{M}_n(K), \quad M \longmapsto f(M) = DM - MD.$$

a) Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(K)$.

b) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

c) Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est l'ensemble F des matrices de $\mathbf{M}_n(K)$ dont tous les termes diagonaux sont nuls.

21.12 Endomorphisme nilpotent sur un espace vectoriel de matrices carrées

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application

$$f : \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad M \longmapsto f(M) = AM - MB.$$

a) Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Établir : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\quad f^p(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} A^k M B^k.$

c) En déduire que, si A et B sont nilpotentes, alors f est nilpotent.

21.13 Inverse pour une matrice décomposée en blocs

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C, D \in \mathbf{M}_n(K)$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(K)$.

on suppose que M est inversible et on note $M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, où $E, F, G, H \in \mathbf{M}_n(K)$.

a) Montrer : $\forall X \in \operatorname{Ker}(E),\quad BGX = X$ et en déduire : $\forall X \in \operatorname{Ker}(E),\quad X \in \operatorname{Ker}(D)$.

On note $f : \operatorname{Ker}(E) \longrightarrow \operatorname{Ker}(D),\quad X \longmapsto GX$.

Montrer que f est linéaire et injective et en déduire : $\dim \operatorname{Ker}(E) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(D)$.

b) Établir : $\operatorname{rg}(E) = \operatorname{rg}(D)$.

Du mal à démarrer ?

21.1 Il existe $e_1 \in E$ tel que $f(e_1) \neq 0$. Noter $e_2 = f(e_1)$ et montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ convient.

21.2 *a)* Lecture de A.

b) 1) Montrer que e_1, e_2 s'expriment sur $\mathcal{E}'$.

2) Montrer que f_1, f_2, f_3 s'expriment sur $\mathcal{F}'$.

3) Calculer $u(e'_1)$ et $u(e'_2)$ en fonction de f'_1, f'_2, f'_3.

21.3 *a)* En notant $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, résoudre $f(u) = 0$.

b) En notant $V_1, ..., V_4$ les éléments de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont les colonnes de A, montrer que (V_1, V_2, V_3) est libre et que V_4 se décompose linéairement sur (V_1, V_2, V_3).

21.4 • Vérifier que f est linéaire.

• Considérer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ pour le départ et la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ pour l'arrivée.

21.5 *a)* Immédiat.

b) 1) Noter $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et résoudre $f(M) = 0$.

2) Pour $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, calculer $f(M)$ et décomposer linéairement $f(M)$ sur des matrices fixes. Voir enfin si celles-ci forment une famille libre.

21.6 *a)* Considérer $e_1 \in E$ tel que $f^2(e_1) \neq 0$, puis $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

b) Passer, par exemple, par les (neuf) éléments de N.

c) Traduire le résultat de *b)* en termes d'endomorphismes.

21.7 *a)* Pour obtenir la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, développer $(\mathrm{X}+1)^j$ par la formule du binôme de Newton.

b) Considérer l'application

$$g : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad P(\mathrm{X}) \longmapsto P(\mathrm{X}-1).$$

21.8 D'abord, se rappeler que, par définition, deux matrices carrées A, B de même format sont dites semblables si et seulement s'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

S'il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$, chercher X, Y, Z convenant, en les choisissant de façon que les produits se simplifient.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Montrer que X, Y, Z sont alors inversibles et que $B = X^{-1}AX$, puis un résultat analogue pour C.

21.9 Rappels de cours :

• Par définition, deux matrices carrées (réelles d'ordre trois ici) A, B sont dites semblables si et seulement s'il existe $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

• Si deux matrices carrées A, B sont semblables, alors :

$$\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B),\ \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B),\ \det\,(A) = \det\,(B),$$

mais les réciproques sont fausses.

a) Remarquer les traces.

b) Remarquer les déterminants.

c) Puisque A et B se ressemblent en permutant les termes, chercher une matrice P représentant une permutation de la base canonique pour que $B = P^{-1}AP$, ou encore $PB = AP$.

d) Remarquer A^2 et B^2.

e) Remarquer les rangs de $A - 2\,\mathrm{I}_3$ et $B - 2\,\mathrm{I}_3$.

f) Chercher une matrice P inversible, diagonale à termes diagonaux égaux à 1 ou -1, de façon que $B = P^{-1}AP$.

21.10 Revenir à la preuve, dans le cours, de l'existence de (P, Q), en considérant une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ représentée par A : chercher une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$, compléter celle-ci en une base de E, calculer les images par f de ces vecteurs, et compléter cette base de $\mathrm{Im}\,(f)$ en une base de F.

On contrôlera le couple (P, Q) obtenu, en calculant le produit PJQ.

21.11 *a)* Immédiat.

b) Traduire $f(M) = 0$ par équivalences logiques, en passant par les termes des matrices.

Obtenir : $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathbf{D}_n(K)$.

c) Montrer $\mathrm{Im}\,(f) \subset F$, de manière analogue à la solution de *b)*, en passant par les termes des matrices, puis comparer les dimensions.

21.12 *a)* Immédiat.

b) Récurrence sur p. Utiliser la formule fondamentale sur les coefficients binomiaux : $\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k}$.

c) Si $A^p = 0$ et $B^q = 0$, calculer $f^{p+q}(M)$.

21.13 *a)* Traduire $MM^{-1} = \mathrm{I}_{2n}$ en effectuant un produit par blocs et obtenir :

$$AE + BG = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad CE + DG = 0.$$

b) Échanger des rôles.

Corrigés des exercices

21.1

Puisque $f \neq 0$, il existe $e_1 \in E$ tel que $f(e_1) \neq 0$.
Notons $e_2 = f(e_1)$ et $\mathcal{B} = (e_1,\, e_2)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que : $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}0 = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) &= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2)\\ &= \lambda_1 e_2 + \lambda_2 \underbrace{f^2(e_1)}_{=0} = \lambda_1 \underbrace{e_2}_{\neq 0},\end{aligned}$$

d'où $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_2 e_2 = 0$, donc $\lambda_2 = 0$.

Ceci montre que $\mathcal{B}$ est libre.

Comme $\mathcal{B}$ est libre et $\operatorname{Card}(\mathcal{B}) = 2 = \dim(E)$, on conclut que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Puisque $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = f^2(e_1) = 0$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

21.2

a) Par lecture de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a :

$$u(e_1) = 2f_1 + 3f_2, \qquad u(e_2) = f_1 - f_2 + 2f_3.$$

b) 1) Puisque $e'_1 = e_1,\ e'_2 = e_1 + e_2$,
on a : $e_1 = e'_1,\ e_2 = e'_2 - e'_1$.
Ainsi, $(e'_1,\, e'_2)$ engendre E, et a deux éléments, donc $\mathcal{E}'$ est une base de E.

2) Puisque $f'_1 = f_1 + f_2,\ f'_2 = f_1 + f_3,\ f'_3 = f_2 + f_3$, on a :

$$f_1 = \frac{1}{2}(f'_1 + f'_2 - f'_3),\ f_2 = \frac{1}{2}(f'_1 + f'_3 - f'_2),\ f_3 = \frac{1}{2}(f'_2 + f'_3 - f'_1).$$

Ainsi, $(f'_1,\, f'_2,\, f'_3)$ engendre F, et a trois éléments, donc $\mathcal{F}'$ est une base de F.

3) On a :

$$\begin{aligned}
u(e'_1) &= u(e_1) = 2f_1 + 3f_2\\
&= (f'_1 + f'_2 - f'_3) + \frac{3}{2}(f'_1 + f'_3 - f'_2)\\
&= \frac{5}{2}f'_1 - \frac{1}{2}f'_2 + \frac{1}{2}f'_3,\\
u(e'_2) &= u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2)\\
&= (2f_1 + 3f_2) + (f_1 - f_2 + 2f_3) = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3\\
&= \frac{3}{2}(f'_1 + f'_2 - f'_3) + (f'_1 + f'_3 - f'_2) + (f'_2 + f'_3 - f'_2)\\
&= \frac{3}{2}f'_1 + \frac{3}{2}f'_2 + \frac{1}{2}f'_3.
\end{aligned}$$

On conclut que la matrice A' de u dans les bases $\mathcal{E}'$ de E et $\mathcal{F}'$ de F est : $A' = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

21.3

a) On a, pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(u) = 0\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\\
&\iff (\mathrm{S}) \begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ 2x + 3y + z + t = 0 \\ -x + 2y - 5z - 3t = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système (S) est un système d'équations de $\operatorname{Ker}(f)$.

On a :

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} x + 2z + t = 0 & L_1 \\ 3y - 3z - t = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y - 3z - 2t = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ 3y - 3z - t = 0 \\ -3z - 4t = 0 & L_3 \longleftarrow 3L_3 - 2L_2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = -\dfrac{4}{3}t \\ y = z + \dfrac{1}{3}t = -t \\ x = -2z - t = \dfrac{5}{3}t. \end{cases}$$

Une base de $\operatorname{Ker}(f)$ est donc (V_0), où $V_0 = (5,\, -3,\, -4,\, 3)$, et donc : $\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = 1$.

b) Notons $V_1, ..., V_4$ les éléments de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont les colonnes $C_1, ..., C_4$ de A :
$V_1 = (1, 2, -1),\ V_2 = (0, 3, 2),\ V_3 = (2, 1, -5),\ V_4 = (1, 1, -3)$.

On a alors : $\quad \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(V_1, ..., V_4)$.

Voyons si (V_1, V_2, V_3) est libre.
On a, pour tout $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 = 0 \iff \begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 - 5a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ 3a_2 - 3a_3 = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2a_2 - 3a_3 = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, (V_1, V_2, V_3) est libre, donc $\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) \geqslant 3$.

D'autre part, comme $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(V_1, ..., V_4) \subset \mathbb{R}^3$, on a : $\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) \leqslant 3$. On conclut qu'une base de $\operatorname{Im}(f)$ est (V_1, V_2, V_3) et que $\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = 3$, donc : $\operatorname{rg}(f) = 3$.

Remarque : on pouvait aussi obtenir $\dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big)$ en appliquant le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big) = 4 - 1 = 3.$$

N'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

21.4

• La linéarité de f est immédiate. En effet, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$:

$$f(\alpha P + Q) = \big((\alpha P + Q)(a_0), ..., (\alpha P + Q)^{(n)}(a_n)\big)$$
$$= \big(\alpha P(a_0)+Q(a_0), ..., \alpha P^{(n)}(a_n)+Q^{(n)}(a_n)\big) = \alpha f(P)+f(Q).$$

• On a, pour tout $(i,j) \in \{0,...,n\}^2$:

$$f(\mathrm{X}^j) = \big(a_0^j,\ ja_1^{j-1},\ j(j-1)a_2^{j-2}, \dots,\ j!,\ 0, ..., 0\big).$$

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ pour le départ et la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ pour l'arrivée est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0! & & & & \\ 0 & 1! & & \dots & \\ \vdots & \ddots & 2! & & \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n! \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure à termes diagonaux tous non nuls, donc cette matrice est inversible.

On conclut que f est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$.

21.5

a) On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $M, N \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:
$f(\alpha M + N) = A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \alpha f(M) + f(N)$,
donc f est linéaire.

b) 1) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff f(M) = 0$$
$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff 2x - 4z = 0,\ 2y - 4t = 0,\ 3x - 6z = 0,\ 3y - 6t = 0$$
$$\iff x = 2z, \quad y = 2t.$$

On obtient : $\quad \mathrm{Ker}\,(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z & 2t \\ z & t \end{pmatrix} ;\ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$$= \Big\{ z\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } B} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{notée } C} ;\ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \Big\} = \mathrm{Vect}\,(B, C).$$

Comme (B, C) est libre (car les matrices B, C ne sont pas colinéaires), on conclut : (B, C) est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big) = 2$.

2) On a, pour toute $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:

$$f(M) = AM = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x - 4z & 2y - 4t \\ 3x - 6z & 3y - 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-2z) & 2(y-2t) \\ 3(x-2z) & 3(y-2t) \end{pmatrix}$$
$$= (x - 2z)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } D} + (y - 2t)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{notée } E} \in \mathrm{Vect}\,(D, E).$$

Ceci montre : $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}\,(D, E)$.

De plus :

$$D = f\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) \in \mathrm{Im}\,(f) \quad \text{et} \quad E = f\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) \in \mathrm{Im}\,(f).$$

On obtient : $\qquad \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(D, E)$.

Comme (D, E) est libre, on conclut : (D, E) est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big) = 2$.

Remarque : On contrôle le théorème du rang :

$$4 = \dim\big(\mathbf{M}_2(\mathbb{R})\big) = \dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big) = 2 + 2.$$

21.6

a) Puisque $f^2 \neq 0$, il existe $e_1 \in E$ tel que $f^2(e_1) \neq 0$. Notons $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2) = f^2(e_1)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in K^3$ tel que $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$, c'est-à-dire : $a_1e_1 + a_2f(e_1) + a_3f^2(e_1) = 0$.

On déduit, en appliquant f^2 et puisque $f^3 = 0$: $a_1f^2(e_1) = 0$. Comme $f^2(e_1) \neq 0$, on obtient $a_1 = 0$, puis, en reportant : $a_2f(e_1) + a_3f^2(e_1) = 0$. En appliquant f, on déduit de même $a_2 = 0$, puis $a_3f^2(e_1) = 0$, donc $a_3 = 0$.

Ceci montre que $\mathcal{B}$ est libre.

Comme $\dim(E) = 3$ et que $\mathcal{B}$ est libre et de cardinal 3, il en résulte que $\mathcal{B}$ est une base de E.

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(K)$, quelconque. On a :

$$AN = NA \iff$$
$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} d & g & 0 \\ e & h & 0 \\ f & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & d & g \\ b & e & h \end{pmatrix}$$
$$\iff d = 0,\ g = 0,\ e = a,\ h = d,\ g = 0,\ f = b,\ i = e,\ h = 0$$
$$\iff d = g = h = 0,\ a = e = i,\ f = h.$$

On conclut : $C_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} ;\ (a,b,c) \in K^3 \right\}$.

c) D'après *b)* :

$$C_N = \Big\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ (a,b,c) \in K^3 \Big\}$$
$$= \big\{ a\mathrm{I}_3 + bN + cN^2 ;\ (a,b,c) \in K^3 \big\}.$$

Il en résulte, en termes d'endomorphismes :

$$\big\{ g \in \mathcal{L}(E) ;\ g \circ f = f \circ g \big\}$$
$$= \big\{ ae + bf + cf^2 ;\ (a,b,c) \in K^3 \big\} = \mathrm{Vect}\,(e,\ f,\ f^2).$$

21.7

a) • Il est clair que, pour tout $P(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $f(P) = P(\mathrm{X}+1) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

On a, pour tous $a \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$:

$$\begin{aligned} f(aP+Q) &= (aP+Q)(\mathrm{X}+1) \\ &= aP(\mathrm{X}+1) + Q(\mathrm{X}+1) = af(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

• On a, pour tout $j \in \{0, ..., n\}$, en utilisant la formule du binôme de Newton : $f(\mathrm{X}^j) = (\mathrm{X}+1)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \mathrm{X}^i$.

La matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, ..., \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est donc A, définie dans l'énoncé.

b) Considérons l'application

$$g : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad P(\mathrm{X}) \longmapsto P(\mathrm{X}-1),$$

qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, comme ci-dessus pour f.

On a, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$:

$$\begin{cases} (g \circ f)\big(P(\mathrm{X})\big) = g\big(P(\mathrm{X}+1)\big) = P\big((\mathrm{X}+1)-1\big) = P(\mathrm{X}) \\ (f \circ g)\big(P(\mathrm{X})\big) = f\big(P(\mathrm{X}-1)\big) = P\big((\mathrm{X}-1)+1\big) = P(\mathrm{X}), \end{cases}$$

donc : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$.

Il en résulte que A est inversible et que $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

Mais, comme plus haut pour f, à l'aide de la formule du binôme de Newton, on a, pour tout $j \in \{0, ..., n\}$:

$$g(\mathrm{X}^j) = (\mathrm{X}-1)^j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \mathrm{X}^i.$$

On a donc : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \Big((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\Big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

On conclut : $A^{-1} = \Big((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\Big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Par exemple, pour $n = 3$:

$$A = \left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \left((-1)^i\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21.8

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons A, B, C deux à deux semblables. Il existe donc $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$.

Notons $X = P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $Y = Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $Z = Q^{-1}BP^{-1}$. Puisque A et P sont inversibles, par inverse et produit, $B = P^{-1}AP \in \mathbf{GL}_n(K)$, puis $Z = Q^{-1}BP^{-1} \in \mathbf{GL}_n(K)$.

On a :

$$\begin{aligned} XYZ &= PQQ^{-1}BP^{-1} = PBP^{-1} = A, \\ YZX &= QQ^{-1}BP^{-1}P = B, \\ ZXY &= Q^{-1}BP^{-1}PQ = Q^{-1}BQ = C. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons qu'il existe X, Y, $Z \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que :

$$XYZ = A, \quad YZX = B, \quad ZXY = C.$$

Puisque A est inversible et que $XYZ = A$, d'après le cours sur les matrices, ou celui sur les déterminants, X, Y, Z sont inversibles.

On a :

$$B = YZX = (X^{-1}X)YZX = X^{-1}(XYZ)X = X^{-1}AX,$$

$$C = ZXY = ZXY(ZZ^{-1}) = Z(XYZ)Z^{-1} = ZAZ^{-1},$$

donc A, B, C sont deux à deux semblables.

21.9

a) On a : $\mathrm{tr}\,(A) = 3$ et $\mathrm{tr}\,(B) = 2$, donc $\mathrm{tr}\,(A) \neq \mathrm{tr}\,(B)$, et donc A et B ne sont pas semblables.

b) On a : $\det(A) = 4$ et $\det(B) = 3$, donc $\det(A) \neq \det(B)$, et donc A et B ne sont pas semblables.

c) Notons $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui est la matrice, dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, de l'endomorphisme f défini par : $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_1$.

Il est alors clair que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule PAP^{-1} :

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{P^{-1}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PA} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PAP^{-1}=B}. \end{array}$$

On conclut que A et B sont semblables.

d) On remarque $A^2 = 0$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, donc A et B ne sont pas semblables. En effet, si A et B étaient semblables, il existerait $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$, et on aurait :

$$B^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}0P = 0,$$

contradiction.

e) On remarque que :

$$\mathrm{rg}\,(A - 2\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{rg}\,(B - 2\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Montrons que A et B ne sont pas semblables, en raisonnant par l'absurde.

Supposons A et B semblables. Il existe alors $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On a :

$$B - 2\,\mathrm{I}_3 = P^{-1}AP - 2\,\mathrm{I}_3 = P^{-1}(A - 2\,\mathrm{I}_3)P,$$

donc nécessairement : $\mathrm{rg}\,(B - 2\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{rg}\,(A - 2\,\mathrm{I}_3)$, contradiction.

On conclut que A et B ne sont pas semblables.

f) Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$. On a $P^{-1} = P$ et on calcule PAP^{-1} :

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{P^{-1}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PA} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PAP^{-1}=B}. \end{array}$$

On conclut que A et B sont semblables.

21.10

En notant $C_1,\, C_2,\, C_3$ les colonnes de A, on remarque que $C_3 = C_1 + C_2$ et que $(C_1,\, C_2)$ est libre, donc $\mathrm{rg}\,(A) = 2$. D'après le cours, il existe donc $(P, Q) \in \big(\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})\big)^2$ tel que $A = P\mathrm{J}_{3,3,2}Q$. Le but de l'exercice est de calculer un tel couple (P, Q). À cet effet, on va suivre la preuve de ce théorème du cours.

Notons $\mathcal{B}_0 = (E_1,\, E_2,\, E_3)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et f l'application linéaire de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même représentée par la matrice A dans $\mathcal{B}_0$ au départ et à l'arrivée.

• Déterminons $\mathrm{Ker}\,(f)$.

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff f(X) = 0 \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = x_1. \end{cases}$$

Une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ est donc (U_3), où $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• On complète (U_3) en une base $\mathcal{B} = (U_1,\, U_2,\, U_3)$ de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, par exemple en choisissant :

$$U_1 = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ U_2 = E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Notons

$$V_1 = f(U_1) = AU_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ V_2 = f(U_2) = AU_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui sont les deux premières colonnes de A. On complète $(V_1,\, V_2)$ en une base $\mathcal{C} = (V_1,\, V_2,\, V_3)$ de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, par exemple par $V_3 = E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f) = A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{J}.$$

D'après la formule de changement de bases pour une application linéaire, on a : $\mathrm{J}_{3,3,2} = S^{-1}AR$, où on a noté :

$$R = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$S = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Notons $P = S$ et $Q = R^{-1}$. On a alors $(P, Q) \in \big(\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})\big)^2$ et $A = P\mathrm{J}Q$. On calcule facilement l'inverse de R et on conclut qu'on peut choisir le couple (P, Q) défini par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on, peut contrôler ce résultat en effectuant le produit PJQ et en obtenant A.

21.11

a) La linéarité de f est immédiate. En effet, pour tout $a \in K$ et toutes $M, N \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$\begin{aligned} f(aM + N) &= D(aM + N) - (aM + N)D \\ &= a(DM - MD) + (DN - ND) = af(M) + f(N). \end{aligned}$$

On conclut que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(K)$.

b) Soit $M \in \mathbf{M}_n(K)$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}\,(f) &\iff f(M) = 0 \\ &\iff DM - MD = 0 \iff DM = MD. \end{aligned}$$

Passons aux éléments des matrices.

En notant $M = (m_{ij})_{ij}$, on a :

$$\begin{aligned} & DM = MD \\ \iff\quad & \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ \ (DM)_{ij} = (MD)_{ij} \\ \iff\quad & \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, \\ & \qquad \sum_{k=1}^{n} (D)_{ik}(M)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (M)_{ik}(D)_{kj} \\ \iff\quad & \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ \ a_i m_{ij} = m_{ij} a_j \\ \iff\quad & \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ \ (a_i - a_j) m_{ij} = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \quad \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, \quad \big(i \neq j \implies m_{ij} = 0\big),$$

car $a_1, ..., a_n$ sont deux à deux distincts.

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(f)$ est l'ensemble $\mathbf{D}_n(K)$ des matrices diagonales de $\mathbf{M}_n(K)$.

c) Il est clair que F, ensemble des matrices de $\mathbf{M}_n(K)$ à termes diagonaux tous nuls, est un sev de $\mathbf{M}_n(K)$.

1) Montrons $\mathrm{Im}\,(f) \subset F$.

Soit $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$, quelconque. On a, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$:

$$\big(f(M)\big)_{ii} = (DM - MD)_{ii}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (D)_{ik}(M)_{ki} - \sum_{k=1}^{n} (M)_{ik}(D)_{ki} = a_{ii}m_{ii} - m_{ii}a_{ii} = 0,$$

donc $f(M) \in F$.

Ceci montre : $\mathrm{Im}\,(f) \subset F$.

2) D'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big) &= \dim\big(\mathbf{M}_n(K)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big)\\ &= \dim\big(\mathbf{M}_n(K)\big) - \dim\big(\mathbf{D}_n(K)\big) = n^2 - n.\end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que $\dim(F) = n^2 - n$.
En effet, une base de F est la famille de matrices élémentaires $\mathrm{E}_{ij}, (i,j) \in \{1, ..., n\}^2,\ i \neq j$.

On conclut : $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

21.12

a) • On a bien :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad f(M) = AM - MB \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

• On a, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et toutes $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}f(aM+N) &= A(aM+N) - (aM+N)B\\ &= a(AM - MB) + (AN - NB) = af(M) + f(N),\end{aligned}$$

donc f est linéaire.

On conclut que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Récurrence sur p.

Pour $p = 0$, la propriété est évidente.

Supposons la propriété vraie pour un $p \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad f^p(M) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k A^{p-k}MB^k.$$

On a alors, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}
f^{p+1}(M) &= f\big(f^p(M)\big)\\
&= f\Big(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k A^{p-k}MB^k\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k f(A^{p-k}MB^k)\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k \big(A(A^{p-k}MB^k) - (A^{p-k}MB^k)B\big)\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k \big(A^{p-k+1}MB^k - A^{p-k}MB^{k+1}\big)\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k A^{p-k+1}MB^k - \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k A^{p-k}MB^{k+1}\\
&\underset{j=k+1}{=} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k A^{p+1-k}MB^k - \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p}{j-1}(-1)^{j-1} A^{p-j+1}MB^j\\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p}{k}(-1)^k A^{p+1-k}MB^k - \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p}{k-1}(-1)^{k-1} A^{p-k+1}MB^k\\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \left(\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1}\right)(-1)^k A^{(p+1)-k}MB^k,
\end{aligned}$$

ce qui montre la propriété pour $p + 1$.

Ainsi, par récurrence sur p, la formule voulue est établie.

c) Supposons A et B nilpotentes. Il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^p = 0$ et $B^q = 0$. On alors, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}
&f^{p+q}(M)\\
&= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k}(-1)^k A^k MB^{p+q-k}\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k}(-1)^k A^k MB^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{q} \binom{p+q}{k}(-1)^k A^k MB^{p+q-k}\\
&= \Big(\sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k}(-1)^k A^k MB^{p-k}\Big)B^q + A^p\Big(\sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k}(-1)^k A^{k-p} MB^{p+q-k}\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre $f^{p+q} = 0$ et on conclut que f est nilpotent.

21.13

a) • On a : $\quad \mathrm{I}_{2n} = MM^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix},$$

d'où, entre autres : $AE + BG = \mathrm{I}_n$ et $CE + DG = 0$.

Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(E)$. On a :

$$X = \mathrm{I}_n X = (AE + BG)X = A(\underbrace{EX}_{=0}) + BGX = BGX,$$

$$0 = (CE + DG)X = C(\underbrace{EX}_{=0}) + DGX = DGX,$$

donc : $GX \in \mathrm{Ker}\,(D)$.

• L'application $f : \operatorname{Ker}(E) \longrightarrow \operatorname{Ker}(D), \quad X \longmapsto GX$ est donc correctement définie. et elle est linéaire, car, pour tous $\alpha \in K,\ X_1, X_2 \in \operatorname{Ker}(E)$:

$$\begin{aligned} f(\alpha X_1 + X_2) &= G(\alpha X_1 + X_2) \\ &= \alpha G X_1 + G X_2 = \alpha f(X_1) + f(X_2). \end{aligned}$$

• On a, pour tout $X \in \operatorname{Ker}(E)$:

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(X) = 0 \\ &\iff GX = 0 \implies B(GX) = 0 \iff X = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, donc f est injectif.

• D'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(E) &= \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(f)}_{=0} + \dim \operatorname{Im}(f) \\ &= \dim \operatorname{Im}(f) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(D). \end{aligned}$$

b) • D'après *a)* et le théorème du rang :

$$\operatorname{rg}(E) = n - \dim \operatorname{Ker}(E) \geqslant n - \dim \operatorname{Ker}(D) = \operatorname{rg}(D).$$

On obtient : $\operatorname{rg}(E) \geqslant \operatorname{rg}(D)$.

• Comme en *a)*, en utilisant $M^{-1}M = \mathrm{I}_{2n}$, les égalités $EB + FD = 0$ et $GB + HD = \mathrm{I}_n$ et l'application

$$g : \operatorname{Ker}(D) \longrightarrow \operatorname{Ker}(E), \quad Y \longmapsto BY$$

on montre : $\operatorname{rg}(D) \geqslant \operatorname{rg}(E)$.

On conclut : $\operatorname{rg}(D) = \operatorname{rg}(E)$.

CORRIGÉS

Vrai ou Faux ?

21.1 Si $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$) est une base d'un ev E (resp. F, resp. G) et si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$
V F

21.2 Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases d'un ev E, $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors : $X' = PX$. V F

21.3 Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases d'un ev E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors : $A' = P^{-1}AP$. V F

21.4 On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, $M \longmapsto AM - MA$. V F

Puisque A est inversible, f est bijective.

21.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f : P \longmapsto \mathrm{X}P' + P$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. V F

21.6 On a, pour toute $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}\,(A) = p - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(A)\big)$. V F

21.7 On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}\,(\alpha A) = \mathrm{rg}\,(A)$. V F

21.8 On a, pour toutes A, $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}\,(AB) = n \iff \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B) = n$. V F

21.9 Soient $A, B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $M \longrightarrow AMB$. V F
L'endomorphisme f de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et son inverse est :
$$f^{-1} : \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \quad N \longmapsto A^{-1}NB^{-1}.$$

21.10 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Alors, f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$. V F

Vrai ou Faux, les réponses

21.1 C'est un résultat du cours : la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit des matrices de ces applications linéaires. **V**

21.2 Les matrices X et X' ont été échangées, la formule correcte est $X = PX'$. **F**

21.3 C'est un résultat du cours. **V**

21.4 La matrice A ne représente pas f, puisque f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, qui est un ev de dimension 4 et non 2. **F**

On a : $A \neq 0$ et $f(A) = A^2 - A^2 = 0 = f(0)$, donc f n'est pas injective.

21.5 Il est clair que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans lui-même et que, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $f(\mathrm{X}^k) = (k+1)\mathrm{X}^k$, donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux tous non nuls, donc inversible, et on conclut que f est un automorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. **V**

21.6 C'est la traduction matricielle du théorème du rang. **V**

21.7 Le résultat est faux pour $\alpha = 0$ et $A \neq 0$. **F**

La formule devient vraie si on suppose $\alpha \neq 0$.

21.8 On a, d'après le cours : **V**

$$\mathrm{rg}\,(AB) = n \iff AB \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \iff (A, B) \in \big(\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})\big)^2 \iff \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B) = n.$$

En effet, on sait que, si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, et, réciproquement, si AB est inversible, alors il existe $C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(AB)C = \mathrm{I}_n$, d'où $A(BC) = \mathrm{I}_n$, donc A est inversible et de même pour B.

21.9 L'application f est bien un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et on a, pour tout $(M, N) \in \big(\mathbf{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$: **V**

$$f(M) = N \iff AMB = N \iff M = A^{-1}NB^{-1},$$

donc f est inversible et $f^{-1} : \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K}),\quad N \longmapsto A^{-1}NB^{-1}$.

21.10 Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. **V**

Puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on a $BA = \mathrm{I}_n$, d'où, d'après le cours, $AB = \mathrm{I}_n$, donc $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, et on conclut que f et g sont bijectives et que $g = f^{-1}$.

Chapitre 22

Déterminants

Plan

K désigne un corps commutatif.

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de déterminants
- Étude de l'inversibilité d'une matrice carrée, par l'étude de son déterminant
- Étude de comatrices.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions et propriétés de : déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une matrice carrée
- Calcul pratique des déterminants : opérations licites sur les colonnes, sur les lignes, développement par rapport à une rangée
- Définition de la comatrice $\mathrm{com}\,(A)$ d'une matrice carrée $A \in \mathbf{M}_n(K)$ et formule :

$$A\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A)A = \det\,(A)\mathrm{I}_n.$$

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer un déterminant d'ordre trois ou quatre

- Essayer de faire apparaître des 0 par des opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée ne contenant qu'un terme non nul, si possible.
- Factoriser le plus possible au fur et à mesure des calculs.

➟ **Exercices 22.1, 22.2**

Exemple

Calculer, pour tout $(a,b,c) \in K^3$:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$D = -(-a)\begin{vmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc - abc = 0.$$

Exemple

Calculer, pour tout $(a,b,c,d) \in K^4$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}.$$

On a, par $L_4 \longleftarrow L_4 - L_2,\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1,\ L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & c-a & 0 & b(c-a) \\ 0 & 0 & d-b & a(d-b) \\ 0 & 0 & d-b & c(d-b) \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (c-a)\begin{vmatrix} d-b & a(d-b) \\ d-b & c(d-b) \end{vmatrix} = (c-a)(d-b)^2\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)^2(d-b)^2.$$

Méthode

Pour calculer un déterminant d'ordre n

- Essayer de faire apparaître des 0 par des opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée ne contenant qu'un terme non nul, si possible, ou pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.
- Factoriser le plus possible au fur et à mesure des calculs.
- Essayer, dans certains cas, de voir si une colonne est combinaison linéaire des autres colonnes, ou si une ligne est combinaison linéaire des autres lignes, auquel cas le déterminant est nul.
- Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour ensuite, en développant, faire apparaître une relation de récurrence, souvent d'ordre un ou d'ordre deux, et enfin calculer le terme général de la suite ainsi considérée.
- Le cas particulier des matrices tridiagonales à coefficients constants est important.

- Utiliser la multilinéarité et l'alternance du déterminant, lorsque les colonnes (ou les lignes) se décomposent linéairement sur des colonnes (ou des lignes) particulières.

➟ **Exercices 22.4, 22.6, 22.9**

Exemple

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Si $n \geqslant 3$, on a $C_2 = C_3$, donc $D_n = 0$.

Et, pour $n \leqslant 2$: $D_1 = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & n \end{vmatrix}.$$

Il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, donc, d'après le cours, il est égal au produit des termes diagonaux :

$$D_n = 1 \cdot 2 \cdots n = n!\,.$$

Exemple

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in K$:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \ddots & (1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & (1) & \ddots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

On a :

$$D \underset{C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{=} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a+n-1 & a & \ddots & (1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & (1) & \ddots & a & 1 \\ a+n-1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\underset{L_i \longleftarrow L_i - L_1,\ i=2,\dots,n}{=} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & (0) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant D_n de la matrice dont tous les termes sont nuls, sauf ceux de l'antidiagonale qui sont égaux à 1.

En développant par rapport à la dernière colonne, de manière itérée, on a :

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n+1}D_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}D_{n-1} \text{ car } n+1 \text{ et } n-1 \text{ ont même parité} \\ &= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}D_{n-2} \\ &= \ldots \\ &= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\ldots(-1)^1 D_1 = (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)} \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \end{aligned}$$

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $a \in \mathbb{C}^*$. On note :

$$A = \left(a^{\mathrm{Min}\,(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer $\det(A)$.

On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & a & a & \ldots & a \\ a & a^2 & a^2 & \ldots & a^2 \\ a & a^2 & a^3 & \ldots & a^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \ldots & a^n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\underset{\substack{L_i \leftarrow L_i - L_{i-1} \\ i=n,\ldots,2}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & \ldots & a \\ 0 & a^2-a & a^2-a & \ldots & a^2-a \\ 0 & 0 & a^3-a^2 & \ldots & a^3-a^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^n-a^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\begin{aligned} &= a(a^2-a)(a^3-a^2)\cdots(a^n-a^{n-1}) \\ &= a\big[a(a-1)\big]\big[a^2(a-1)\big]\cdots\big[a^{n-1}(a-1)\big] \\ &= a^{1+(1+\cdots+(n-1))}(a-1)^{n-1} \\ &= a^{1+\frac{(n-1)n}{2}}(a-1)^{n-1} \\ &= a^{\frac{n^2-n+2}{2}}(a-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b, c \in K$. On note :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 \\ c & a & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & a & b \\ 0 & \ldots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Former une relation de récurrence exprimant D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n.

On a, par développement par rapport à la première ligne, puis par développement par rapport à la première colonne :

$$D_{n+2} = aD_{n+1} - b\begin{vmatrix} c & b & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a & b & & (0) & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & a & b \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & c & a \end{vmatrix}_{[n+1]} = aD_{n+1} - bcD_n.$$

Méthode

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée A non donnée par ses éléments

Essayer d'amener une équation polynomiale satisfaite par A.

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - \mathrm{I}_n$. Calculer $\det(A)$.

On a : $A^2 - A + \mathrm{I}_n = 0$,

d'où : $A^3 + \mathrm{I}_n = (A + \mathrm{I}_n)(A^2 - A + \mathrm{I}_n) = 0$,

donc : $A^3 = -\mathrm{I}_n$.

On déduit : $\big(\det(A)\big)^3 = \det(A^3) = \det(-\mathrm{I}_n) = (-1)^n = (-1)^{3n}$.

Comme l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3$ est injective, on conclut :

$$\det(A) = (-1)^n.$$

Méthode

Pour étudier le déterminant d'une matrice carrée décomposée en blocs

Essayer de faire intervenir une matrice triangulaire par blocs et utiliser la formule du cours : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$ pour des matrices carrées A et C.

Exemple

Soient $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B, C, D \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que $AB = BA$. Montrer :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

On a, par produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & AD - BC \end{pmatrix},$$

d'où, en passant aux déterminants :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & AD - BC \end{pmatrix}.$$

D'après le résultat du cours sur le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(\mathrm{I}_n)\det(A) = \det(A),$$

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & AD - BC \end{pmatrix} = \det(A)\det(AD - BC).$$

Comme A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$, et, en simplifiant par $\det(A)$, on conclut : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Méthode

Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme d'un ev E de dimension finie

Se ramener au déterminant d'une matrice carrée, en considérant la matrice de f dans une base convenable de E.

➟ **Exercice 22.3**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. calculer le déterminant de l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto \mathrm{X}P' + P.$$

D'abord, il est clair que f est bien une application de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et que f est linéaire, donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

On a : $f(1) = 1$,
et : $\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad f(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}k\mathrm{X}^{k-1} + \mathrm{X}^k = (k+1)\mathrm{X}^k$,

donc la matrice A de f dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, ..., \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est : $A = \mathrm{diag}\,(1, 2, ..., n+1)$.

Puisque A est diagonale, on a :

$$\det(A) = 1 \cdot 2 \cdots (n+1) = (n+1)!$$

et on conclut : $\det(f) = (n+1)!\,.$

Méthode

Pour manipuler la comatrice d'une matrice carrée A d'ordre n

Essayer d'utiliser :

- la définition de $\mathrm{com}\,(A)$: les termes de $\mathrm{com}\,(A)$ sont les cofacteurs des termes de A
- la formule du cours : $A\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A)A = \det(A)\,\mathrm{I}_n$,

  qui, dans le cas particulier où A est inversible, permet de relier $\mathrm{com}\,(A)$ et A^{-1} par la formule : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A)$.

➟ **Exercices 22.10, 22.11**

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = \mathrm{I}_n$.

Montrer : ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A) = A^2$.

On a, d'après le cours : $A\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A)A = \det(A)\mathrm{I}_n$.

D'où : ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A) = A^3\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A) = A^2\big(\det(A)\mathrm{I}_n\big) = \det(A)A^2$.

De plus : $\big(\det(A)\big)^3 = \det(A^3) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$,

donc, comme $\det(A) \in \mathbb{R}$, on déduit $\det(A) = 1$.

On conclut : ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,(A) = A^2$.

Énoncés des exercices

22.1 Exemples de calculs de déterminants d'ordre trois

Calculer les déterminants d'ordre trois suivants, en exprimant le résultat sous forme factorisée, pour $(a, b, c) \in K^3$:

a) $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

22.2 Exemples de calculs de déterminants d'ordre quatre

Calculer les déterminants d'ordre quatre suivants, en exprimant le résultat sous forme factorisée, pour $a, b, c, d, x \in K$:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & b+c+d \\ 1 & b & b^3 & c+d+a \\ 1 & c & c^4 & d+a+b \\ 1 & d & d^5 & a+b+c \end{vmatrix}$.

22.3 Déterminant de l'endomorphisme de transposition sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\quad M \longmapsto f(M) = {}^{\mathrm{t}}M$.

a) Vérifier : $f \in \mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

b) Calculer $\mathrm{rg}\,(f),\ \mathrm{tr}\,(f),\ \det\,(f)$.

22.4 Exemples de calculs de déterminants d'ordre n

Calculer les déterminants suivants, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n$, x, $a, b \in K$:

a) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}_{[n]}$

b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}_{[n]}$

c) $\det\left(a^{\mathrm{Max}\,(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

d) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & x+a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x+a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x+a_n \end{vmatrix}_{[n]}$

e) $\det\left((ij+i+j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$

f) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ a^2 & ab & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \dots & ab & b \end{vmatrix}_{[n+1]}$

g) $\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}_{[n]}$

22.5 Déterminant d'une matrice obtenue par des changements de signes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$. On note $B = \left((-1)^{i+j}a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$.

Montrer : $\det(B) = \det(A)$.

22.6 Exemple de calcul d'un déterminant d'ordre n

Calculer le déterminant d'ordre n suivant, pour $a_1, ..., a_n, x \in K$ fixés :

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2+x & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+x & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_n^2+x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

22.7 Déterminant d'une matrice à termes entiers, parité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad a_{ii} \in 2\,\mathbb{Z} \\ \forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad \left(i \neq j \implies a_{ij} \in 2\,\mathbb{Z}+1\right). \end{cases}$$

a) Montrer : $n + \det(A) \in 2\,\mathbb{Z}+1$.

b) En déduire que, si n est pair, alors A est inversible.

22.8 Signe du déterminant d'un polynôme particulier de matrices carrées

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p^2 - 4q \leqslant 0$.

Montrer : $\det\left(A^2 + pAB + qB^2\right) \geqslant 0$.

22.9 Déterminant dans le contexte des déterminants de Vandermonde

Calculer, pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $x_1, ..., x_n \in K$ le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 \cdots x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 \cdots x_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

22.10 Exemple de calcul de la comatrice d'une matrice carrée inversible

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A = \begin{pmatrix} 1+n & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} à l'aide de A.

b) Calculer $\det(A)$.

c) Déterminer $\operatorname{com}(A)$.

22.11 Rang de la comatrice d'une matrice carrée

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Établir : $\begin{cases} \operatorname{rg}(A) = n & \Longrightarrow \operatorname{rg}\big(\operatorname{com}(A)\big) = n \\ \operatorname{rg}(A) = n-1 & \Longrightarrow \operatorname{rg}\big(\operatorname{com}(A)\big) = 1 \\ \operatorname{rg}(A) \leqslant n-2 & \Longrightarrow \operatorname{rg}\big(\operatorname{com}(A)\big) = 0. \end{cases}$

Du mal à démarrer ?

22.1 Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée contenant deux 0, ou pour combiner avec la règle de Sarrus, valable pour les déterminants d'ordre 2 ou 3.

22.2 *a)* Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée contenant trois 0.

b) Par opérations licites sur les colonnes, se ramener à des déterminants plus simples.

c) Remarquer que, en notant $s = a + b + c + d$, la quatrième colonne est combinaison linéaire des deux premières colonnes.

22.3 *a)* Immédiat.

b) Former la matrice de f dans une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée d'une base de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ suivie d'une base de $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

22.4 *a)* Opérer $C_j \longleftarrow C_j - C_n$ pour $j = 1, ..., n-1$, et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

b) Opérer $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2, ..., n$, et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

c) Opérer $L_i \longleftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i = 1, ..., n-1$, et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

d) Opérer $C_j \longleftarrow C_j - C_1$ pour $j = 2, ..., n$, pour faire apparaître des 0, des x, des $-x$, puis opérer $L_1 \longleftarrow L_1 + \sum_{i=2}^{n} L_i$, et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

e) Remarquer que les colonnes du déterminant proposé se décomposent linéairement sur deux colonnes fixes.

f) Développer le déterminant D_{n+1} proposé par rapport à la dernière colonne et obtenir une relation de récurrence donnant D_{n+1} en fonction de D_n.

g) Développer le déterminant D_n proposé par rapport à sa première ligne (par exemple), puis développer le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu par rapport à sa première colonne. Montrer ainsi que la suite $(D_n)_n$ est une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre, d'où le calcul de son terme général.

22.5 *1re méthode :* revenir à la définition du déterminant d'une matrice carrée comme sommation de produits, indexée par le groupe symétrique.

2è méthode : remarquer que $B = DAD$, où D est la matrice diagonale $\operatorname{diag}\big((-1)^i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

22.6 En notant $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, le déterminant proposé est celui d'une famille de colonnes décomposées linéairement sur $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n$, A. Utiliser la multilinéarité et l'alternance de $\det_{\mathcal{B}}$.

22.7 *a)* Passer modulo 2.

b) Remarquer qu'un entier impair n'est pas nul.

22.8 Utiliser la factorisation de $\mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

22.9 En multipliant, pour chaque i, la ligne numéro i par x_i, se ramener à un déterminant de Vandermonde.

22.10 *a)* Décomposer linéairement A sur I_n et la matrice $U \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1. Remarquer que $U^2 = nU$, d'où l'on déduit une équation du second degré satisfaite par A, puis l'inversibilité de A et le calcul de A^{-1}.

b) Opérer $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, puis $C_j \longleftarrow C_j - C_1$ pour $j = 2, ..., n$, pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

c) Puisque A est inversible, on peut exprimer $\operatorname{com}(A)$ à l'aide de A^{-1} et utiliser le résultat obtenu en *a)*.

22.11 Séparer l'étude en trois cas :

$$\operatorname{rg}(A) = n, \quad \operatorname{rg}(A) = n-1, \quad \operatorname{rg}(A) \leqslant n-2.$$

1) Dans le cas $\operatorname{rg}(A) = n$, faire intervenir l'inversibilité de A.

2) Dans le cas $\operatorname{rg}(A) = n-1$, montrer $\operatorname{rg}\big(\operatorname{com}(A)\big) = 1$ en utilisant la formule du cours $A\,{}^{\mathrm{t}}\operatorname{com}(A) = \det(A)\,\mathrm{I}_n$ et en remarquant qu'alors $\operatorname{Im}\big({}^{\mathrm{t}}\operatorname{com}(A)\big) \subset \operatorname{Ker}(A)$.

3) Dans le cas $\operatorname{rg}(A) \leqslant n-2$, montrer $\operatorname{com}(A) = 0$.

Corrigés des exercices

22.1

a)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_2}}{=} &\begin{vmatrix} a & b & ab \\ 0 & c-b & a(c-b) \\ b-a & 0 & (b-a)c \end{vmatrix} \\
= \;& (c-b)(b-a)\begin{vmatrix} a & b & ab \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} \\
\underset{\text{Sarrus}}{=} \;& ac(c-b)(b-a).
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}}{=} &\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix} \\
= \;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} \\
= \;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} \\
= \;& (a-b)(b-c)(c-a).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} &\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} \\
= \;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c+a \\ a^3 & b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} \\
= \;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1}{=} \;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
\underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & c-b \\ b^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} \\
= \;& (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} b+a & 1 \\ b^2 & c+b \end{vmatrix} \\
= \;& (b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc).
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} &\begin{vmatrix} 2a & -(a+b+c) & 0 \\ b-c-a & a+b+c & a+b+c \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} \\
= \;& (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2a & -1 & 0 \\ b-c-a & 1 & 1 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{=} \;& (a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ b+c-a & 1 & 0 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
= \;& -(a+b+c)^3.
\end{aligned}
$$

22.2

a)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \longleftarrow C_4 - C_2}}{=} &\begin{vmatrix} a & b & c-a & 0 \\ b & a & 0 & c-a \\ c & b & a-c & 0 \\ b & c & 0 & a-c \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + L_4}}{=} &\begin{vmatrix} a+c & 2b & 0 & 0 \\ 2b & a+c & 0 & 0 \\ c & b & a-c & 0 \\ b & c & 0 & a-c \end{vmatrix} \\
= \;& (a-c)^2\begin{vmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{vmatrix} \\
= \;& (a-c)^2\big((a+c)^2 - (2b)^2\big) \\
= \;& (a-c)^2(a+c-2b)(a+c+2b).
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_{j-1}, \\ j = 2,\,3,\,4}}{=} &\begin{vmatrix} (1+x)^2 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 \\ 2^2 & 5 & 7 & 9 \\ 3^2 & 7 & 9 & 11 \\ 6^2 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_{j-1},\\ j=3,\,4}}{=} \begin{vmatrix} (1+x)^2 & 2x+3 & 2 & 2 \\ 2^2 & 5 & 2 & 2 \\ 3^2 & 7 & 2 & 2 \\ 4^2 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

c) En notant $s = a+b+c+d$ et C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes du déterminant proposé, on a :

$$S = \begin{pmatrix} b+c+d \\ c+d+a \\ d+a+b \\ a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \\ s-d \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} = sC_1 - C_2.$$

Ainsi, les colonnes du déterminant proposé forment une famille liée, donc ce déterminant est nul.

22.3

a) On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f(\alpha A + B) = {}^{\mathrm{t}}(\alpha A + B) = \alpha\, {}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B = \alpha f(A) + f(B),$$

donc $f \in \mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

b) D'après le cours, les sev $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, formés respectivement des matrices symétriques et des matrices antisymétriques, sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\dim\big(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim\big(\mathbf{A}_n(\mathbb{R})\big) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée successivement par une base de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et une base de $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$. La matrice de f dans cette base est la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(1, ..., 1, -1, ..., -1)$ formée de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ termes égaux à 1, suivis de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ termes égaux à -1.

Il est clair alors que :

$$\operatorname{rg}(f) = n^2, \qquad \operatorname{tr}(f) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n,$$

$$\det(f) = 1^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

22.4

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_n,\\ j=1,\dots,n-1}}{=} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (1-n)(2-n)\cdots(-1)n = (-1)^{n-1}n!\,.$$

b)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_i \longleftarrow L_i - L_1,\\ i=2,\dots,n}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & a_1-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-x & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x).$$

c)

$$\det\left(a^{\operatorname{Max}(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ a^2 & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ a^3 & a^3 & a^3 & \dots & a^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & a^n & a^n & \dots & a^n \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_i \leftarrow L_i - L_{i+1},\\ i=1,\dots,n-1}}{=} \begin{vmatrix} a-a^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & a^2-a^3 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \dots & & a^{n-1}-a^n & 0 \\ & & & & a^n \end{vmatrix}$$

$$= (a-a^2)(a^2-a^3)\cdots(a^{n-1}-a^n)a^n$$

$$= \big(a(1-a)\big)\big(a^2(1-a)\big)\cdots\big(a^{n-1}(1-a)\big)a^n$$

$$= a^{1+2+\cdots+n}(1-a)^{n-1} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-a)^{n-1}.$$

d)

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & x+a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x+a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_1,\\ j=2,\dots,n}}{=} \begin{vmatrix} x+a_1 & -x & -x & \dots & -x \\ a_2 & x & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 + (L_2 + \cdots + L_n)}{=} \begin{vmatrix} x+a_1+\cdots+a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & x & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1}\Big(x + \sum_{i=1}^{n} a_i\Big).$$

e) Notons, pour $j \in \{1, ..., n\}$, C_j la colonne numéro j du déterminant proposé. On a, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:

$$C_j = \big(ij + i + j\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

$$= \big(i(j+1) + j\big)_{1\leqslant i\leqslant n} = (j+1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, C_j se décompose linéairement sur deux colonnes fixes (c'est-à-dire indépendantes de j).

Si $n \geqslant 3$, alors la famille des colonnes est liée, donc le déterminant proposé est nul.

Si $n = 1$, alors le déterminant est égal à 3.

Si $n = 2$, alors le déterminant est $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1$.

f) En notant D_{n+1} le déterminant d'ordre $n+1$ proposé, on a, par développement par rapport à la dernière colonne :

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ a^2 & ab & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \dots & ab & b \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

$$= bD_n + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a^{n-2} & a^{n-3}b & \dots & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \dots & \dots & ab \end{vmatrix}_{[n]}.$$

En mettant a en facteur dans la dernière ligne de ce dernier déterminant, on fait apparaître encore D_n, d'où :

$$D_{n+1} = bD_n + aD_n = (a+b)D_n.$$

Il en résulte, par suite géométrique :

$$D_{n+1} = (a+b)^n D_1 = (a+b)^n.$$

g) Notons D_n le déterminant proposé.

On a, pour tout $n \geqslant 3$, en développant par rapport à la première ligne, puis en développant le deuxième déterminant par rapport à la première colonne :

$$D_n = (1+a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}.$$

En notant $D_0 = 1$, comme $D_1 = 1+a^2$ et $D_2 = (1+a^2)^2 - a^2$, la relation de récurrence obtenue ci-dessus est aussi vraie pour $n = 2$.

On déduit : $D_n - D_{n-1} = a^2(D_{n-1} - D_{n-2})$,

d'où, par remplacements successifs, ou par suite géométrique : $D_n - D_{n-1} = (a^2)^{n-1}(D_1 - D_0) = a^{2n}$,

puis, en sommant :

$$D_n = a^{2n} + a^{2n-2} + \cdots + a^2 + D_0 = a^{2n} + \cdots + a^2 + 1.$$

Si $a^2 \neq 1$, on peut écrire : $D_n = \dfrac{1 - a^{2n+2}}{1 - a^2}$.

Si $a^2 = 1$, on a : $D_n = n+1$.

22.5

1re méthode :

En notant $B = (b_{ij})_{ij}$, on obtient par la définition du déterminant :

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sigma(1)+1} a_{\sigma(1),1} \cdots (-1)^{\sigma(n)+n} a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\left(\sigma(1)+\cdots+\sigma(n)\right)+(1+\cdots+n)} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{2(1+\cdots+n)} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \det(A).
\end{aligned}$$

2è méthode :

On remarque : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad b_{ij} = (-1)^i a_{ij} (-1)^j$.

Ainsi, B est le produit $B = DAD$, où D est la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}\left((-1)^i\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a alors :

$$\det(B) = \det(DAD) = \det(D)\det(A)\det(D)$$

$$= \left(\det(D)\right)^2 \det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n} (-1)^i\right)^2 \det(A) = \det(A).$$

22.6

Notons $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, C_j la colonne numéro j du déterminant D proposé, pour $j = 1, \dots, n$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2 + x & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 + x & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 + x \end{vmatrix}$$

$$= \det_{\mathcal{B}}\left(a_1 A + x\mathrm{E}_1, \dots, a_n A + x\mathrm{E}_n\right).$$

En développant par multilinéarité et alternance, il ne reste que $n+1$ déterminants :

$$D = \det_{\mathcal{B}}(x\mathrm{E}_1, \dots, x\mathrm{E}_n) + \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x\mathrm{E}_1, \dots, a_j A, \dots, x\mathrm{E}_n)$$

$$= x^n + x^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_j \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{E}_1, \dots, A, \dots, \mathrm{E}_n).$$

On a, pour $j \in \{1, \dots, n\}$ fixé, en développant successivement par rapport à la dernière colonne, depuis la colonne n jusqu'à la colonne j :

$\det_{\mathcal{B}}(\mathrm{E}_1, ..., A, ..., \mathrm{E}_n)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & (0) & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & (0) & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & (0) & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & (0) & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_j \end{vmatrix}_{[j]} = 1.$$

Finalement : $D = x^n + x^{n-1} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j^2.$

22.7

a) Utilisons les congruences modulo 2.

Notons $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ la matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où m_{ij} est la classe de a_{ij} modulo 2. Puisque le déterminant d'une matrice carrée s'obtient par somme de produits de termes de la matrice, il est clair, avec les hypothèses de l'énoncé, que, modulo 2 :

$$\det(A) \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\underset{C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{=} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & (1) & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1) & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & (1) & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_1, \\ j = 2, ..., n}}{=} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & 0 & (0) & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (n-1)(-1)^{n-1}.$$

D'où :

$$n + \det(A) \underset{[2]}{\equiv} n + (n-1)(-1)^{n-1} \underset{[2]}{\equiv} n + (n-1) = 2n - 1 \underset{[2]}{\equiv} 1.$$

Finalement, $n + \det(A)$ est impair.

b) Si n est pair, alors, comme $n + \det(A)$ est impair, par différence, $\det(A)$ est impair, donc non nul, et on conclut que A est inversible.

22.8

Puisque $p^2 - 4q \leqslant 0$, le trinôme réel $\mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$ admet deux zéros complexes conjugués (égaux si $p^2 - 4q = 0$, distincts si $p^2 - 4q < 0$). Il existe donc $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q = (\mathrm{X} - z)(\mathrm{X} - \overline{z}).$$

Ainsi : $z + \overline{z} = -p$ et $z\overline{z} = q$. On a alors :

$$\begin{aligned}(A - zB)(A - \overline{z}B) &= A^2 - zBA - \overline{z}AB + z\overline{z}B^2 \\ &= A^2 - (z + \overline{z})AB + z\overline{z}B^2 = A^2 + pAB + qB^2,\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\det(A^2 + pAB + qB^2) &= \det\big((A - zB)(A - \overline{z}B)\big) \\ &= \det(A - zB)\det(A - \overline{z}B) \\ &= \det(A - zB)\,\overline{\det(A - zB)} = \big|\det(A - zB)\big|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

22.9

Pour faire apparaître $\sigma_n = x_1 \cdots x_n$, comme la dernière colonne contient ce produit en omettant un facteur, multiplions, pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, la ligne numéro i du déterminant D proposé par x_i :

$$x_1 \cdots x_n D = x_1 \cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 \cdots x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 \cdots x_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & \sigma_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= \sigma_n \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

On reconnaît alors un déterminant de Vandermonde, à l'ordre près des colonnes.

La permutation circulaire $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$ est composée de $n-1$ transpositions échangeant deux éléments consécutivement, donc $\varepsilon(c) = (-1)^{n-1}$, d'où, d'après l'alternance du déterminant :

$$\sigma_n D = x_1 \cdots x_n D = \sigma_n (-1)^{n-1} \mathrm{V}(x_1, ..., x_n).$$

Si $x_1, ..., x_n$ sont tous non nuls, on conclut :

$$D = (-1)^{n-1}\mathrm{V}(x_1, ..., x_n).$$

Supposons, par exemple $x_1 = 0$. Alors, en revenant à la définition de D :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_2 \cdots x_n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (-1)^{n+1} x_2 \cdots x_n \mathrm{V}(x_2, ..., x_n)$$
$$= (-1)^{n-1}(x_2 - 0) \cdots (x_n - 0)\mathrm{V}(x_2, ..., x_n)$$
$$= (-1)^{n-1}\mathrm{V}(0, x_2, ..., x_n) = (-1)^{n-1}\mathrm{V}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Finalement, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in K^n$:

$$D = (-1)^{n-1}\mathrm{V}(x_1, ..., x_n).$$

22.10

a) En notant U la matrice carrée d'ordre n dont tous les termes sont égaux à 1, on remarque que $A = n\mathrm{I}_n + U$. Comme $U^2 = nU$, on obtient $(A - n\mathrm{I}_n)^2 = n(A - n\mathrm{I}_n)$, d'où $A^2 - 3nA + 2n^2\mathrm{I}_n = 0$, puis :

$$A\Big(-\frac{1}{2n^2}(A - 3n\,\mathrm{I}_n)\Big) = \mathrm{I}_n, \quad \Big(-\frac{1}{2n^2}(A - 3n\,\mathrm{I}_n)\Big)A = \mathrm{I}_n.$$

Ceci montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = -\frac{1}{2n^2}(A - 3n\,\mathrm{I}_n).$$

b) On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+n & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+n \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{=} \begin{vmatrix} 2n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 2n & 1+n & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1) & \ddots & 1 \\ 2n & 1 & \dots & 1 & 1+n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= 2n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+n & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1) & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_1,\\ j = 2, ..., n}}{=} 2n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & n & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= 2nn^{n-1} = 2n^n.$$

c) Puisque A est inversible, on a, d'après une formule du cours : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)$, donc :

$$\mathrm{com}(A) = \det(A)\,{}^{\mathrm{t}}A^{-1}$$
$$= 2n^n\ {}^{\mathrm{t}}\Big(-\frac{1}{2n^2}(A - 3n\,\mathrm{I}_n)\Big) = -n^{n-2}(A - 3n\,\mathrm{I}_n).$$

22.11

1) Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors A est inversible, donc $\det(A) \neq 0$ et, comme $\Big(\dfrac{1}{\det(A)}A\Big)\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A) = \mathrm{I}_n$, la matrice ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)$ est aussi inversible, donc $\mathrm{com}(A)$ est inversible, et on conclut $\mathrm{rg}\big(\mathrm{com}(A)\big) = n$.

2) Supposons $\mathrm{rg}(A) = n - 1$.

Comme $A\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A) = \det(A)\mathrm{I}_n = 0$,

on a : $\mathrm{Im}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)\big) \subset \mathrm{Ker}(A)$,

et donc : $\mathrm{rg}\big(\mathrm{com}(A)\big) = \mathrm{rg}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)\big) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(A)$.

D'autre part, comme $\mathrm{rg}(A) = n-1$, il existe une matrice carrée d'ordre $n - 1$ extraite de A et inversible, donc au moins un des cofacteurs de A est non nul, d'où $\mathrm{com}(A) \neq 0$, donc $\mathrm{rg}\big(\mathrm{com}(A)\big) \geqslant 1$.

Finalement : $\mathrm{rg}\big(\mathrm{com}(A)\big) = 1$.

3) Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 2$, alors tous les coefficients de $\mathrm{com}(A)$ sont nuls, puisque ce sont des déterminants de matrices carrées d'order $n - 1$ extraites de A, et on a donc $\mathrm{com}(A) = 0$, d'où $\mathrm{rg}\big(\mathrm{com}(A)\big) = 0$.

Vrai ou Faux ?

22.1 On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$ et toute $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$. V F

22.2 Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et on a alors : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. V F

22.3 Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de sa diagonale. V F

22.4 Si une matrice B est obtenue à partir d'une matrice carrée A en permutant, d'une façon quelconque, les colonnes de A, alors : $\det(B) = -\det(A)$. V F

22.5 Le déterminant d'une matrice carrée antisymétrique d'ordre impair est nul. V F

22.6 Un déterminant est inchangé lorsqu'on remplace une colonne par une combinaison linéaire de toutes les colonnes. V F

22.7 Un déterminant est inchangé lorsqu'on remplace simultanément chaque colonne par celle-ci plus une combinaison linéaire des autres colonnes. V F

22.8 Un déterminant est inchangé lorsqu'on remplace simultanément chaque colonne par celle-ci plus une combinaison linéaire des colonnes suivantes. V F

22.9 On a, pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie : V F

$$f \in \mathcal{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0.$$

22.10 On a, pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-ev E et tout automorphisme h de E : V F

$$\det(h \circ f \circ h^{-1}) = \det(f).$$

Vrai ou Faux, les réponses

22.1 La formule correcte est : $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$. **F**

22.2 C'est un résultat du cours. **V**

22.3 C'est un résultat du cours. **V**

22.4 Si B est obtenue à partir de A en permutant deux colonnes, alors : $\det(B) = -\det(A)$. **F**

Si B est obtenue à partir de A en permutant plus de deux colonnes, alors : $\det(B) = \det(A)$ ou $\det(B) = -\det(A)$.

22.5 Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique et d'ordre impair, alors : **V**

$$\det(A) = \det({}^{\mathrm{t}}A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$

donc $2\det(A) = 0$, puis, en simplifiant par 2, $\det(A) = 0$.

22.6 Contrexemple : par $C_1 \longleftarrow 2C_1$, le déterminant de l'identité, qui vaut 1, est changé en un déterminant égal à 2. **F**

Une formulation correcte est : un déterminant est inchangé lorsqu'on remplace une colonne par celle-ci plus une combinaison linéaire des autres colonnes.

22.7 Dans un déterminant non nul, le remplacement de C_1 par $C_1 + C_2$ et de C_2 par $C_1 + C_2$ (où C_1 désigne l'ancienne colonne) donne un déterminant ayant deux colonnes égales, donc nul. **F**

22.8 C'est un résultat du cours. **V**

22.9 C'est un résultat du cours. **V**

22.10 On a : $\det(h \circ f \circ h^{-1}) = \det(h)\det(f)\det(h^{-1}) = \det(h)\det(f)\dfrac{1}{\det(h)} = \det(f)$. **V**

Chapitre 23

Espaces préhilbertiens réels

Plan

On utilise les abréviations :

ev pour
espace vectoriel,

sev pour
sous-espace vectoriel,

b.o.n. pour
base orthonormale.

E_2 (resp. E_3) désigne
un ev euclidien orienté
de dimension 2 (resp. 3).

Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'une certaine application est un produit scalaire
- Trouver une base orthogonale, une base orthonormale, d'un espace vectoriel euclidien
- Former la matrice, dans une base orthonormale, d'un projecteur orthogonal, d'une symétrie orthogonale
- Obtention d'inégalités, par utilisation de l'inégalité de Cauchy et Schwarz, de l'inégalité triangulaire
- Matrice et déterminant de Gram
- Calculs, dans E_3, de produits scalaires, de produits vectoriels, de produits mixtes, d'angles.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions de : produit scalaire, famille orthogonale, famille orthonormale, orthogonal d'une partie
- Inégalité de Cauchy et Schwarz, inégalité triangulaire
- Toute famille orthogonale à vecteurs tous non nuls est libre
- Définition et propriétés de $\mathcal{O}(E)$, $\mathcal{SO}(E)$, $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$
- Définition d'un projecteur orthogonal, d'une symétrie orthogonale, d'une réflexion
- Théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien réel
- Définitions et propriétés, dans E_3, du produit scalaire, du produit vectoriel, du produit mixte.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer qu'une application $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire

Revenir à la définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel.

➟ **Exercices 23.3, 23.4**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(P, Q) \in E \times E$ par :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

• On a, pour tout $(P, Q) \in E \times E$:

$$\varphi(Q, P) = \sum_{k=0}^{n} Q(k)P(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) = \varphi(P, Q),$$

donc φ est symétrique.

• On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $P, Q, R \in E$:

$$\varphi(P,\ \alpha Q + R) = \sum_{k=0}^{n} P(k)(\alpha Q + R)(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\big(\alpha Q(k) + R(k)\big)$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) + \sum_{k=0}^{n} P(k)R(k) = \alpha\varphi(P, Q) + \varphi(P, R),$$

donc φ est linéaire par rapport à la seconde place.

Puisque φ est symétrique et est linéaire par rapport à la seconde place, φ est bilinéaire.

• On a, pour tout $P \in E$: $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{n} \big(P(k)\big)^2 \geqslant 0$.

• Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P, P) = 0$. On a alors : $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\big(P(k)\big)^2}_{\geqslant 0} = 0$, donc :

$\forall k \in \{0, ..., n\},\ \ P(k) = 0$. Ainsi, le polynôme P est de degré $\leqslant n$ et s'annule en $n + 1$ points deux à deux distincts (les réels $0, 1, ..., n$), donc : $P = 0$.

On conclut que φ est un produit scalaire sur E.

Méthode

Pour calculer la norme euclidienne d'un vecteur x

Faire intervenir le produit scalaire et remplacer $||x||^2$ par $(x \,|\, x)$.

➟ **Exercice 23.15**

Exemple

Dans $E = C([0\,;\,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f,g) \longmapsto (f\,|\,g) = \int_0^{2\pi} fg,$$

calculer $||f||$, où :

$$f : [0\,;\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos x.$$

On a, par définition de la norme associée à un produit scalaire :

$$||f|| = (f\,|\,f)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Pour effectuer ce calcul d'intégrale, on linéarise :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi,$$

et on conclut : $||f|| = \sqrt{\pi}$.

Méthode

Dans la manipulation d'une combinaison linéaire de vecteurs, pour faire disparaître tous les termes sauf l'un d'eux

Essayer de faire le produit scalaire avec un vecteur orthogonal à presque tous les termes de la combinaison linéaire.

Exemple

Soient $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un espace préhilbertien, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1,\dots,e_n)$ une famille orthogonale de E, $x \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n} (e_i\,|\,x)^2 e_i$.

Montrer :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad (e_k\,|\,y) \geqslant 0.$$

On a, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$:

$$(e_k\,|\,y) = \left(e_k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (e_i\,|\,x)^2 e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (e_i\,|\,x)^2 \underbrace{(e_k\,|\,e_i)}_{=0 \text{ si } i\neq k} = (e_k\,|\,x)^2 ||e_k||^2 \geqslant 0.$$

Méthode

Pour manipuler des orthogonaux de sev d'un ev E muni d'un produit scalaire

- Utiliser la définition de l'orthogonal $F^\perp$ d'un sev F de E :
$$F^\perp = \big\{y \in E\,;\ \forall f \in F,\ (f\,|\,y) = 0\big\}.$$
- Utiliser les propriétés du cours sur l'orthogonalité, en particulier :
$$F \subset F^{\perp\perp}, \qquad F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp.$$

➟ **Exercices 23.13, 23.14**

Exemple

Soient E un espace préhilbertien réel, F un sev de E tel que $F \oplus F^\perp = E$.

Montrer : $F = F^{\perp\perp}$.

• Soit $x \in F$.

On a, par définition de $F^\perp$: $\forall y \in F^\perp, \ (x\,|\,y) = 0$,

donc, par définition de $F^{\perp\perp}$: $x \in F^{\perp\perp}$.

Ceci montre : $F \subset F^{\perp\perp}$.

• Réciproquement, soit $x \in F^{\perp\perp}$.
Puisque $F \oplus F^{\perp} = E$, il existe $u \in F$, $v \in F^{\perp}$ tels que $x = u + v$.
On a : $v = x - u, \quad x \in F^{\perp\perp}, \quad u \in F \subset F^{\perp\perp}$
donc, puisque $F^{\perp\perp}$ est un sev de E : $v \in F^{\perp\perp}$.
Ainsi : $v \in F^{\perp} \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$, donc $v = 0$, puis : $x = u + v = u \in F$.
Ceci montre : $F^{\perp\perp} \subset F$.
On conclut : $F = F^{\perp\perp}$.

Méthode

Pour montrer qu'un vecteur x, d'un ev E muni d'un produit scalaire $(.\,|\,.)$ et de la norme euclidienne associée $||.||$, est nul

- Essayer de montrer : $||x||^2 = 0$.
- Essayer de montrer : $\forall y \in E, \quad (x\,|\,y) = 0$.

➟ **Exercices 23.15, 23.16**

Exemple

Soient E un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormale de E, $x \in E$.
On suppose :
$$||x||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (e_i\,|\,x)^2.$$
Montrer :
$$x = \sum_{i=1}^{n} (e_i\,|\,x)e_i.$$

On a :
$$\begin{aligned}\Big|\Big|x - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i\Big|\Big|^2 &= ||x||^2 - 2\Big(x\,\Big|\,\sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i\Big) + \Big|\Big|\sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i\Big|\Big|^2\\ &= ||x||^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)^2 + \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)^2\\ &= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)^2 \leqslant 0,\end{aligned}$$
donc : $\Big|\Big|x - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i\Big|\Big| = 0$, puis : $x - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i = 0$, et enfin :
$$x = \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i.$$

Méthode

Pour obtenir une inégalité, en algèbre, en analyse, en géométrie, faisant intervenir des carrés ou des racines carrées

Essayer d'utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz ou l'inégalité triangulaire.

➟ **Exercices 23.7, 23.8**

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy et Schwarz, dans $\mathbb{R}^n$ usuel, aux deux vecteurs $u = (1, ..., 1)$ et $v = (a_1, ..., a_n)$, on a :

$$(u \,|\, v)^2 \leqslant ||u||^2 ||v||^2,$$

c'est-à-dire : $\displaystyle \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$

Méthode

Pour traduire qu'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale

Utiliser l'une des caractérisations du cours :

- les colonnes de A forment une b.o.n. de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ usuel
- les lignes de A forment une b.o.n. de $\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ usuel
- ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$
- $A\,{}^{\mathrm{t}}A = \mathrm{I}_n$
- $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et ${}^{\mathrm{t}}A = A^{-1}$
- A représente un endomorphisme orthogonal dans une b.o.n.

➟ **Exercices 23.2, 23.9**

Exemple

Déterminer les matrices orthogonales de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ a & b & a \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On a :

$$A \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} 2a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + 2ab = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 + b^2 = 1 \\ a(a + 2b) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left(\begin{cases} a = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -2b \\ 9b^2 = 1 \end{cases} \right).$$

On conclut que les matrices cherchées sont les quatre matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que la matrice

$$A = \mathrm{I}_n + \alpha C\,{}^{\mathrm{t}}C$$

soit orthogonale.

D'abord, il est clair que : $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \iff {}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n \iff {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{I}_n + \alpha C\,{}^{\mathrm{t}}C)(\mathrm{I}_n + \alpha C\,{}^{\mathrm{t}}C) = \mathrm{I}_n$$

$$\iff (\mathrm{I}_n + \alpha C\,{}^{\mathrm{t}}C)(\mathrm{I}_n + \alpha C\,{}^{\mathrm{t}}C) = \mathrm{I}_n \iff 2\alpha C\,{}^{\mathrm{t}}C + \alpha^2 C\,{}^{\mathrm{t}}CC\,{}^{\mathrm{t}}C = 0.$$

Comme ${}^{\mathrm{t}}CC = ||C||^2 \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \iff \alpha(2 + \alpha||C||^2)C\,{}^{\mathrm{t}}C = 0.$$

Si $C\,{}^{\mathrm{t}}C = 0$, alors :

$$||C||^2 = ({}^{\mathrm{t}}CC)^2 = ({}^{\mathrm{t}}CC)({}^{\mathrm{t}}CC) = {}^{\mathrm{t}}C(C\,{}^{\mathrm{t}}C)C = 0,$$

donc $C = 0$, exclu.

On a donc $C\,{}^{\mathrm{t}}C \neq 0$, d'où :

$$A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \iff \alpha(2+\alpha||C||^2) = 0 \iff \alpha = -\frac{2}{||C||^2}.$$

Finalement, un réel non nul α et un seul convient, c'est $-\dfrac{2}{||C||^2}$.

Méthode

Pour former la matrice d'un projecteur orthogonal sur un sev F de E

- Si l'on connaît $F^\perp$, décomposer un vecteur quelconque de E sur F et $F^\perp$.
- Déterminer une b.o.n. $(v_1, ...v_p)$ de F, puis appliquer la formule du cours donnant le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur quelconque x de E sur F : $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(e_k \,|\, x)e_k$.

➟ **Exercice 23.6**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

On munit $E = \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, et on considère les sev $F = \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures et $G = \mathbf{T}'_{n,\mathrm{i}}(\mathbb{R})$ le sev des matrices triangulaires inférieures à termes diagonaux tous nuls.

Montrer $G = F^\perp$ et en déduire le projeté orthogonal sur F de la matrice $M = (1)$ dont tous les termes sont égaux à 1.

• D'abord, il est clair que F et G sont bien des sev de E.

Soient $A \in F,\ B \in G$. On a : $(A \,|\, B) = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}AB)$.

Puisque A est triangulaire supérieure, ${}^{\mathrm{t}}A$ est triangulaire inférieure.

Puisque ${}^{\mathrm{t}}A$ et B sont triangulaires inférieures et que les termes diagonaux de B sont tous nuls, la matrice produit ${}^{\mathrm{t}}AB$ est triangulaire inférieure et ses termes diagonaux sont tous nuls, donc : $\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}AB) = 0$.

Ceci montre : $G \subset F^\perp$.

D'autre part : $\dim(G) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et :

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On conclut : $G = F^\perp$.

• On a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}}_{\in G},$$

donc le projeté orthogonal de M sur F est la première des deux matrices de la somme ci-dessus.

Méthode

Pour traduire une symétrie orthogonale s par rapport à un sev F de E

Utiliser, pour tout $u \in E$: $\quad s(u) + u \in F \quad$ et $\quad s(u) - u \in F^\perp$.

Exemple

Former la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ usuel de la symétrie orthogonale s par rapport à $a = (1, 1, 1)$.

On a, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$s(u) + u \in \mathbb{R}a \quad \text{et} \quad s(u) - u \perp a.$$

En notant $s(u) = (X, Y, Z)$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$X + x = Y + y = Z + z = \lambda \quad \text{et} \quad (X - x) + (Y - y) + (Z - z) = 0.$$

On déduit, par combinaison: $\lambda = \dfrac{2}{3}(x + y + z)$,

puis : $X = \lambda - x = \dfrac{1}{3}(-x + 2y + 2z)$ et de même pour Y et Z.

On conclut : $\quad A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Méthode

Pour manipuler le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit mixte dans E_3

Utiliser les propriétés du cours sur ces produits.
En particulier, la formule du double produit vectoriel est utile :

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c.$$

➟ **Exercice 23.1**

Exemple

Démontrer la formule du double produit vectoriel, pour tout $(u, v, w) \in E_3^3$:

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$$

• Si $v = 0$, la formule est évidente.

• Si $v \neq 0$ et si w est colinéaire à v, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = \lambda v$, d'où : $u \wedge (v \wedge w) = u \wedge 0 = 0$
et $\quad (u \cdot w)v - (u \cdot v)w = \lambda(u \cdot v)v - \lambda(u \cdot v)v = 0$,
donc la formule est vraie.

• Supposons (v, w) libre.
D'après le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, il existe une base orthonormée (I, J, K) de E_3 et $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $v = \alpha I, \quad w = \beta I + \gamma J, \quad u = aI + bJ + cK$.
On a alors, d'une part : $v \wedge w = \alpha\gamma K$, d'où :

$$u \wedge (v \wedge w) = (aI + bJ + cK) \wedge (\alpha\gamma K) = -a\alpha\gamma J + b\alpha\gamma I,$$

et, d'autre part :

$$(u \cdot w)v - (u \cdot v)w = (a\beta + b\gamma)\alpha I - (a\alpha)(\beta I + \gamma J) = b\gamma\alpha I - a\alpha\gamma J,$$

et on conclut à l'égalité voulue.

Méthode

Pour calculer l'angle de deux vecteurs non nuls x, y de E_2 ou de E_3

Calculer le produit scalaire $x \cdot y$, ce qui permet d'obtenir $\cos\widehat{(x, y)}$, et éventuellement, calculer $x \wedge y$, pour décider de l'orientation.

➟ **Exercice 23.1**

Exemple

Calculer, dans $\mathbb{R}^2$ usuel, l'angle α des deux vecteurs

$$\overrightarrow{x} = (1,\ 3),\quad \overrightarrow{y} = (2,\ 1).$$

On a : $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}}{||x||\,||y||} = \dfrac{1\cdot 2 + 3\cdot 1}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

D'autre part : $[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 < 0.$

On conclut : $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}\ \ [2\pi].$

Énoncés des exercices

23.1 Un vecteur de E_3 faisant un même angle avec trois vecteurs donnés

Soient $a, b, c \in E_3 - \{0\}$.
On note : $a' = b \wedge c,\quad b' = c \wedge a,\quad c' = a \wedge b,\quad v = ||a||\,a' + ||b||\,b' + ||c||\,c'$
et on suppose $v \neq 0$.
Montrer que v fait avec a, b, c des angles égaux, c'est-à-dire montrer que :

$$\cos\widehat{(v,a)} = \cos\widehat{(v,b)} = \cos\widehat{(v,c)}.$$

23.2 Calcul de termes d'une matrice carrée pour que celle-ci soit orthogonale droite

Trouver une CNS sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pour que la matrice $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ -2 & -6 & c \\ 6 & a & d \end{pmatrix}$ soit orthogonale droite.

23.3 Exemple d'endomorphisme antisymétrique dans le contexte de l'analyse

On note E l'ensemble des applications $f : [-1\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $[-1\,;\,1]$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f^{(n)}(-1) = f^{(n)}(1) = 0.$$

a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(f,g) \longmapsto (f\,|\,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$ est un produit scalaire sur E.

b) Vérifier que l'application $T : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme antisymétrique de E, c'est-à-dire que : $\quad \forall (f,g) \in E^2,\quad \big(T(f)\,\big|\,g\big) = -\big(f\,\big|\,T(g)\big).$

23.4 Exemple de produit scalaire sur un espace vectoriel de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0).$$

a) Vérifier que φ est un produit scalaire sur E.

b) 1) Calculer, pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$, $\varphi(\mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j)$.

2) En déduire une base orthonormale de (E, φ).

23.5 Orthogonalité entre $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique

$$(M,N) \longmapsto (M \mid N) = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}MN).$$

a) Montrer que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sev supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) 1) Pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, calculer la distance $d\big(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big)$ en fonction de M.

2) Exemple : Pour $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_{i1}$, calculer $d\big(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big)$.

23.6 Former la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormale

Former la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ usuel, du projecteur orthogonal p sur le sous-espace vectoriel F défini par :

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

23.7 Exemple d'obtention d'inégalité par utilisation de l'inégalité de Cauchy et Schwarz

Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ à coefficients tous $\geqslant 0$, et pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $\quad \big(P(\sqrt{xy}\,)\big)^2 \leqslant P(x)P(y)$.

23.8 Inégalité sur la somme des valeurs absolues des termes d'une matrice orthogonale

Soit $\Omega = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$.

23.9 Matrices simultanément orthogonales et triangulaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(\mathbb{R})$.

23.10 Endomorphisme orthogonal d'un espace de matrices carrées

On note, pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$: $f_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto AM$.

CNS sur A pour que f_A soit un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

23.11 Étude de l'endomorphisme $x \longmapsto x + a \wedge x$ de E_3

Soit $a \in E_3$. On note : $f : E_3 \longrightarrow E_3, \quad x \longmapsto f(x) = x + a \wedge x$.

Montrer : $f \in \mathcal{GL}(E_3)$ et exprimer $f^{-1}(y)$ en fonction de y, pour tout $y \in E_3$.

23.12 Former la matrice d'une réflexion dans une base orthonormale de E_3

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2=1$, former la matrice, relativement à une base orthonormée (i,j,k) de E_3, de la réflexion par rapport au plan P d'équation $ax+by+cz=0$.

23.13 Étude d'orthogonaux de sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $(.\,|\,.)$ un produit scalaire sur E, F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que : $\quad F \subset G^{\perp} \quad$ et $\quad F+G=E$.

Démontrer : $G^{\perp}=F$ et $F^{\perp}=G$.

23.14 Étude de l'application $x \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i$

Soit $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un espace vectoriel euclidien, $n=\dim(E)$.

a) Soit $\mathcal{F}=(e_1,...,e_n)\in E^n$. On considère l'application

$$f : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto f(x)=\sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i.$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2) Montrer : $\;\mathrm{Ker}\,(f)=\mathcal{F}^{\perp} \qquad$ et $\qquad \mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

3) En déduire que f est bijective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

b) En déduire que, si E est de dimension finie, en notant $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ une base de E, on a : $\;\forall (c_1,...,c_n)\in\mathbb{R}^n,\ \exists!\, v\in E,\ \forall i\in\{1,...,n\},\ \ (e_i\,|\,x)=c_i$.

23.15 Condition suffisante pour une base orthonormale

Soient $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $n\in\mathbb{N}^*$, $(e_1,...,e_n)\in E^n$.

On suppose : $$\begin{cases} \forall i\in\{1,...,n\}, \quad ||e_i||\geqslant 1 \\ \forall x\in E, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)^2=||x||^2. \end{cases}$$

Démontrer que $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormale de E.

23.16 Toute application conservant le vecteur nul et la norme euclidienne est linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels dont chacun est muni d'un produit scalaire, $||.||_E$, $||.||_F$ les normes associées, $f : E \longrightarrow F$ une application telle que $f(0)=0$ et :

$$\forall (x,y)\in E^2, \quad ||f(x)-f(y)||_F=||x-y||_E.$$

Démontrer que f est linéaire.

23.17 Caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs

Soient E un espace préhilbertien et p un projecteur de E. Montrer :

$$\mathrm{Ker}\,(p)\perp \mathrm{Im}\,(p) \iff \big(\forall x\in E, \quad ||p(x)||\leqslant ||x||\big).$$

23.18 Étude de projecteurs orthogonaux

Soient $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un espace vectoriel euclidien, $||.||$ la norme associée, p, q deux projecteurs orthogonaux tels que : $\;\forall x\in E, \quad ||p(x)||^2+||q(x)||^2\leqslant ||x||^2$.

Montrer que $p\circ q=q\circ p=0$ et que $p+q$ est un projecteur orthogonal.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 23.17

23.19 Matrice et déterminant de Gram

Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, on note :

$$G(x_1, ..., x_n) = \big((x_i \mid x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \gamma(x_1, ..., x_n) = \det\big(G(x_1, ..., x_n)\big).$$

a) Établir : $\operatorname{rg}\big(G(x_1, ..., x_n)\big) = \operatorname{rg}(x_1, ..; , x_n)$.

b) Montrer : $\begin{cases} (x_1, ..., x_n) \text{ lié} \iff \gamma(x_1, ..., x_n) = 0 \\ (x_1, ..., x_n) \text{ libre} \iff \gamma(x_1, ..., x_n) > 0. \end{cases}$

c) On suppose ici $(x_1, ..., x_n)$ libre. Soient $X = \operatorname{Vect}(x_1, ..., x_n)$, $x \in E$, $p_X(x)$ le projeté orthogonal de x sur X, $d = ||x - p_F(x)||$ la distance de x à X.

Montrer : $d = \left(\dfrac{\gamma(x, x_1, ..., x_n)}{\gamma(x_1, ..., x_n)}\right)^{1/2}$.

23.20 Exemple d'intervention du produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : ${}^{\mathrm{t}}AA = A\,{}^{\mathrm{t}}A$, ${}^{\mathrm{t}}BB = B\,{}^{\mathrm{t}}B$, $AC = CB$.

Démontrer : ${}^{\mathrm{t}}AC = C\,{}^{\mathrm{t}}B$.

À cet effet, on munira $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme $||.||$ associée, et on calculera $||\,{}^{\mathrm{t}}AC - C\,{}^{\mathrm{t}}B||^2$.

Du mal à démarrer ?

23.1 Pour évaluer $\cos\widehat{(v, a)}$, calculer $v \cdot a$ et obtenir : $v \cdot a = ||a||\,[b, c, a]$, d'où :

$$\cos\widehat{(v, a)} = \frac{v \cdot a}{||v||\,||a||} = \frac{[b, c, a]}{||v||}.$$

23.2 D'après le cours, $A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes (C_1, C_2, C_3) de A forment une base orthonormale directe de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ce qui revient à :

$$||C_1|| = 1, \quad ||C_2|| = 1, \quad C_1 \cdot C_2 = 0, \quad C_3 = C_1 \wedge C_2.$$

23.3 *a)* Immédiat.

b) Utiliser une intégration par parties.

23.4 *a)* Immédiat.

b) 1) Calculer $(\mathrm{X}^i)^{(k)}$ en séparant en cas $k < i$, $k = i$, $k > i$, puis calculer $(\mathrm{X}^i)^{(k)}(0)$ en séparant en cas $k \neq i$, $k = i$.

2) Montrer que $\left(\dfrac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ convient.

23.5 *a)* Pour montrer l'orthogonalité, calculer $(S \mid A)$ pour $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, et obtenir $(S \mid A) = 0$.

b) 1) Décomposer M sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

2) Immédiat.

23.6 Former un système d'équations de F, plus simple que celui de l'énoncé, par exemple en exprimant x_1 et x_2 en fonction de x_3 et x_4.

En déduire un vecteur V_1, non nul, de F, puis un vecteur V_2, non nul, de F, orthogonal à V_1.

En déduire une base orthonormale (v_1, v_2) de F.

Appliquer la formule du cours donnant le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel de dimension finie dont on connaît une base orthonormale.

En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

23.7 Écrire P additivement et appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

23.8 Appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$ usuel aux vecteurs (1) et $(|a_{ij}|)_{ij}$.

23.9 *1)* Si $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$, considérer la première colonne et la première ligne de A, pour déduire $a_{11}^2 = 0$ et $a_{12} = ... = a_{1n} = 0$. Réitérer.

2) Traiter la réciproque.

23.10 Traduire que, pour tout $(M, N) \in \big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$:

$$\big(f_A(M) \,\big|\, f_A(N)\big) = (M \,|\, N).$$

23.11 • La linéarité de f est immédiate.

• Montrer $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

• Pour $y \in E_3$, résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E_3$. À cet effet , évaluer $a \cdot y$ et $a \wedge y$.

On obtient :

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{1 + ||a||^2}\big(y - a \wedge y + (a \cdot y)\, a\big).$$

23.12 Utiliser, pour $u \in E_3$ et $u' = \operatorname{Ref}_P(u)$: $u' + u \in P$ et $u' - u \in P^{\perp}$, en passant par les coordonnées dans la base orthonormale (i, j, k) de E_3.

23.13 *1)* Montrer $G^{\perp} \subset F$, en passant par les éléments et en utilisant $E = F + G$.

2) À partir de $F \subset G^{\perp}$, déduire $G \subset F^{\perp}$ et remarquer que F et G ont des rôles symétriques dans les hypothèses.

23.14 *a) 1)* Immédiat.

2) • L'inclusion $\mathcal{F}^{\perp} \subset \operatorname{Ker}(f)$ est immédiate.

Pour l'autre inclusion, si $x \in \operatorname{Ker}(f)$, calculer le produit scalaire de $f(x)$ et x.

• L'inclusion $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ est immédiate.

Pour l'autre inclusion, faire intervenir les dimensions.

3) Utiliser *a)2)* et un argument de dimension.

b) Appliquer *a)3)*.

23.15 *1)* Pour $j \in \{1, ..., n\}$ fixé, appliquer l'hypothèse à e_j à la place de x, et déduire $(e_i \,|\, e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $||e_j||^2 = ||e_j||^4$, puis $||e_j|| = 1$.

2) En vue de montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E, calculer $\Big|\Big|x - \sum_{i=1}^{n}(e_i \,|\, x)e_i\Big|\Big|^2$, par développement.

23.16 *1)* Montrer : $\forall x \in E, \quad ||f(x)||_F = ||x||_E$.

2) Déduire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x)\,,\, f(y)\rangle_F \,=\, \langle x\,,\, y\rangle_E.$$

3) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in E^2$, développer

$$\big|\big|f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y)\big|\big|^2$$

et déduire $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

23.17 *1)* Supposons $\operatorname{Ker}(p) \perp \operatorname{Im}(p)$. Pour $x \in E$, remarquer $x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p)$ et $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$, et utiliser le théorème de Pythagore.

2) Réciproquement, supposons : $\forall x \in E$, $||p(x)|| \leqslant ||x||$. Soient $x \in \operatorname{Ker}(p)$, $y \in \operatorname{Im}(p)$, donc $p(x) = 0$ et $y = p(y)$. Appliquer l'inégalité d'hypothèse à $\lambda x + y$ à la place de x, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Déduire $(x \,|\, y) = 0$.

23.18 *1)* Pour $x \in E$, appliquer l'inégalité de l'énoncé à $q(x)$ à la place de x. Déduire $p \circ q = 0$, et $q \circ p = 0$.

2) Calculer $(p+q)^2$ en développant. Déduire que $p+q$ est un projecteur de E.

3) Montrer, pour tout $x \in E$, $p(x) \perp q(x)$, en déduire $||(p+q)(x)||^2 \leqslant ||x||^2$, et conclure, en utilisant l'exercice 23.17.

23.19 *a)* • Considérer $X = \operatorname{Vect}(x_1, ..., x_n)$, $p = \dim(X)$, $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de X, $x_i = \sum_{k=1}^{p} \xi_{ki} e_k$ la décomposition linéaire de x_i sur $(e_1, ..., e_p)$, pour $i \in \{1, ..., n\}$. Exprimer $(x_i \,|\, x_j)$ et en déduire que, en notant $M = (\xi_{ki})_{ki} \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a : $G(x_1, ..., x_n) = {}^{\mathrm{t}}MM$.

• Montrer : $\operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}MM) = \operatorname{rg}(M)$.

b) Garder les notations de la solution de *a)*.
Si $(x_1, ..., x_n)$ est libre, alors $p = n$ et M est carrée.

c) Noter $y = x - p_X(x)$, donc $x = y + p_X(x)$. Calculer $\gamma(x, x_1, ..., x_n)$ en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne.

23.20 Se rappeler que le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par :

$$\forall (M, N) \in \big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)^2, \quad (M \,|\, N) = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}MN)$$

et se rappeler les propriétés de la trace pour les matrices carrées, en particulier la formule :

$$\forall (X, Y) \in \big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)^2, \quad \operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX).$$

Corrigés des exercices

23.1

On a :

$$v \cdot a = ||a||\, a' \cdot a + ||b||\, b' \cdot a + ||c||\, c' \cdot a$$
$$= ||a||\,(b \wedge c) \cdot a + ||b||\,(c \wedge a) \cdot a + ||c||\,(a \wedge b) \cdot a$$
$$= ||a||\,[b,c,a] + ||b||\,[c,a,a] + ||c||\,[a,b,a] = ||a||\,[b,c,a],$$

d'où : $\cos\widehat{(v,a)} = \dfrac{v \cdot a}{||v||\,||a||} = \dfrac{[b,c,a]}{||v||}$.

De même : $\cos\widehat{(v,b)} = \dfrac{[c,a,b]}{||v||}$, $\quad \cos\widehat{(v,c)} = \dfrac{[a,b,c]}{||v||}$.

Comme $[a,b,c] = [b,c,a] = [c,a,b]$, on conclut :

$$\cos\widehat{(v,a)} = \cos\widehat{(v,b)} = \cos\widehat{(v,c)}.$$

23.2

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. On a :

$A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R}) \iff$
$$||C_1|| = 1, \quad ||C_2|| = 1, \quad C_1 \cdot C_2 = 0, \quad C_3 = C_1 \wedge C_2.$$

On calcule :

- $||C_1||^2 = \dfrac{1}{7^2}\big(3^2 + (-2)^2 + 6^2\big) = 1$, donc $||C_1|| = 1$.
- $||C_2||^2 = 1 \iff \dfrac{1}{7^2}\big(2^2 + (-6)^2 + a^2\big) = 1$
$\iff a^2 + 40 = 49 \iff a = \pm 3.$
- $C_1 \cdot C_2 = 0 \iff 6 + 12 + 6a = 0 \iff a = -3.$

• Supposons $a = -3$. On a alors :

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 42 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On conclut que A est orthogonale droite si et seulement si :

$$a = -3, \quad b = 6, \quad c = 3, \quad d = -2.$$

23.3

a) 1) • $E \subset C^\infty\big([-1\,;\,1], \mathbb{R}\big)$ et $0 \in E$.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f_1, f_2 \in E$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\alpha f_1 + f_2)^{(n)}(-1)$
$$= \alpha f_1^{(n)}(-1) + f_2^{(n)}(-1) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

et de même en 1, donc $\alpha f_1 + f_2 \in E$.

On conclut que E est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $C^\infty\big([-1\,;\,1], \mathbb{R}\big)$, donc E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) • Pour tout $(f,g) \in E^2$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} fg$ existe, car fg est continue sur le segment $[-1\,;\,1]$.

• On a, pour tout $(f,g) \in E^2$:

$$(g\,|\,f) = \int_{-1}^{1} gf = \int_{-1}^{1} fg = (f\,|\,g),$$

donc $(.\,|\,.)$ est symétrique.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g_1, g_2 \in E$:

$$(f\,|\,\alpha g_1 + g_2) = \int_{-1}^{1} f(\alpha g_1 + g_2)$$
$$= \alpha \int_{-1}^{1} fg_1 + \int_{-1}^{1} fg_2 = \alpha(f\,|\,g_1) + (f\,|\,g_2),$$

donc $(.\,|\,.)$ est linéaire par rapport à la deuxième place.

• On a : $\quad \forall f \in E, \quad (f\,|\,f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2 \geqslant 0.$

• Soit $f \in E$. Si $(f\,|\,f) = 0$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2 = 0$, donc, puisque f est continue sur $[-1\,;\,1]$ et que $f^2 \geqslant 0$, on déduit, d'après un théorème du cours, $f = 0$.

On conclut que $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur E.

b) 1) • Pour toute $f \in E$, $T(f) = f'$ existe et $T(f) \in E$.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f_1, f_2 \in E$:

$T(\alpha f_1 + f_2) = (\alpha f_1 + f_2)'$
$$= \alpha f_1' + f_2' = \alpha T(f_1) + T(f_2),$$

donc T est linéaire.

On conclut que T est un endomorphisme de E.

2) Soit $(f,g) \in E^2$. On a, par une intégration par parties pour des applications de classe C^1 sur un segment :

$$\big(T(f)\,|\,g\big) = \int_{-1}^{1} f'g$$
$$= [fg]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} fg' = -\int_{-1}^{1} g'f = -\big(f\,|T(g)\big).$$

On conclut que T est un endomorphisme antisymétrique de E.

23.4

a) • On a, pour tout $(P,Q) \in E \times E$:

$$\varphi(Q,P) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(0)P^{(k)}(0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = \varphi(P,Q),$$

donc φ est symétrique.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q, R \in E$:

$$\varphi(P, \alpha Q + R) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)(\alpha Q + R)^{(k)}(0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\big(\alpha Q^{(k)}(0) + R^{(k)}(0)\big)$$
$$= \alpha \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)R^{(k)}(0)$$
$$= \alpha\varphi(P,Q) + \varphi(P,R),$$

donc φ est linéaire par rapport à la deuxième place.

• On a, pour tout $P \in E$: $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} \big(P^{(k)}(0)\big)^2 \geqslant 0$.

• Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$.

On a alors $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\big(P^{(k)}(0)\big)^2}_{\geqslant 0} = 0$,

donc : $\forall k \in \{0,...,n\}, \quad P^{(k)}(0) = 0$.

D'après la formule de Taylor pour les polynômes, puisque $\deg(P) \leqslant n$, on a alors :

$$P(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\mathrm{X}^k = 0.$$

On conclut que φ est un produit scalaire sur E.

b) 1) Soit $(i,j) \in \{0,...,n\}^2$. On a :

$$(\mathrm{X}^i)^{(k)} = \begin{cases} i(i-1)\cdots(i-k+1)\mathrm{X}^{i-k} & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

donc : $\quad (\mathrm{X}^i)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq i \\ i! & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$

Il en résulte :

$$\varphi(\mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j) = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{X}^i)^{(k)}(0)(\mathrm{X}^j)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ i!j! & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

2) D'après *1)*, $(\mathrm{X}^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille orthogonale pour φ, formée de vecteurs tous non nuls. Comme $\dim(E) = n+1$, cette famille de $n+1$ éléments est une base de E.

De plus : $\forall i \in \{0,...,n\}, \quad \varphi(\mathrm{X}^i, \mathrm{X}^i) = (i!)^2$.

On conclut que $\left(\dfrac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de (E, φ).

23.5

a) • Il est connu que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}(S \,|\, A) &= \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}SA) = \mathrm{tr}\,(SA) = \mathrm{tr}\,(AS) \\ &= \mathrm{tr}\,\big((-{}^{\mathrm{t}}A)S\big) = -\,\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}AS) = -(A \,|\, S) = -(S \,|\, A),\end{aligned}$$

d'où : $\;(S \,|\, A) = 0$.

Ceci montre que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour $(.\,|\,.)$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Il en résulte en particulier : $\;\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

• On a, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^{\mathrm{t}}M)}_{\in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^{\mathrm{t}}M)}_{\in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})},$$

donc : $\;\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

Finalement, $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) 1) Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons : $\;S = \dfrac{1}{2}(M + {}^{\mathrm{t}}M),\; A = \dfrac{1}{2}(M - {}^{\mathrm{t}}M)$.

On a alors :

$$M = S + A, \quad S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), \quad A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \big(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big)^{\perp}.$$

Ceci montre que S est le projeté orthogonal de M sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\begin{aligned}&\big(d\big(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big)\big)^2 = ||M - S||^2 = ||A||^2 = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}AA) \\ &= \mathrm{tr}\left[{}^{\mathrm{t}}\Big(\frac{1}{2}(M - {}^{\mathrm{t}}M)\Big)\frac{1}{2}(M - {}^{\mathrm{t}}M)\right] = -\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,\big((M - {}^{\mathrm{t}}M)^2\big).\end{aligned}$$

2) Pour $\;M = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_{i1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$A = \frac{1}{2}(M - {}^{\mathrm{t}}M) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & \dots & -1/2 \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\big(d\big(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big)\big)^2 = ||A||^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \big((A)_{ij}\big)^2 = \frac{n-1}{2}.$$

On conclut : $\;d\big(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big) = \sqrt{\dfrac{n-1}{2}}$.

23.6

• Cherchons un système d'équations de F, plus simple que celui de l'énoncé :

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

• Un vecteur (non nul) de F est donc, par exemple, $V_1 = (1, -2, 1, 0)$, obtenu en choisissant $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ et en calculant alors x_1 et x_2.

• Un vecteur (non nul) $V_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de F, orthogonal à V_1, est caractérisé par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

En reportant les valeurs de x_1 et x_2 en fonction de x_3 et x_4, ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ 6x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Choisissons $x_3 = 4$, $x_4 = -3$, par exemple.

Un vecteur V_2 de F, non nul et orthogonal à V_1 est donc, par exemple : $V_2 = (-2, 1, 4, -3)$.

• Notons $v_1 = \dfrac{V_1}{||V_1||} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}V_1, \quad v_2 = \dfrac{V_2}{||V_2||} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}V_2.$

Ainsi, (v_1, v_2) est une base orthonormale de F.

D'après le cours, le projeté orthogonal $p(X)$ d'un vecteur X de $\mathbb{R}^4$ sur F est donné par la formule :

$$p(X) = (v_1 \mid X)v_1 + (v_2 \mid X)v_2 = \frac{1}{6}(V_1 \mid X)V_1 + \frac{1}{30}(V_2 \mid X)V_2.$$

En notant $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, on a, sous forme de colonnes pour la lisibilité des écritures :

$$\begin{aligned}
p(X) &= \frac{1}{6}\left(x_1 - 2x_2 + x_3\right)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{30}\left(-2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4\right)\begin{pmatrix}-2\\1\\4\\-3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}x_1 - 2x_2 + x_3\\-2x_1 + 4x_2 - 2x_3\\x_1 - 2x_2 + x_3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{30}\begin{pmatrix}4x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 6x_4\\-2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4\\-8x_1 + 4x_2 + 16x_3 - 12x_4\\6x_1 - 3x_2 - 12x_3 + 9x_4\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{30}\begin{pmatrix}9x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 6x_4\\-12x_1 + 21x_2 - 6x_3 - 3x_4\\-3x_1 - 6x_2 + 21x_3 - 12x_4\\6x_1 - 3x_2 - 12x_3 + 9x_4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On conclut que la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est : $\quad \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & -4 & -1 & 2\\-4 & 7 & -2 & -1\\-1 & -2 & 7 & -4\\2 & -1 & -4 & 3\end{pmatrix}.$

23.7

Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ tels que : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$.

On a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$\begin{aligned}
\big(P(\sqrt{xy})\big)^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k (\sqrt{xy})^k\Big)^2\\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n} \big(\sqrt{a_k}\sqrt{x}^{\,k}\big)\big(\sqrt{a_k}\sqrt{y}^{\,k}\big)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy et Schwarz, dans $\mathbb{R}^{n+1}$ usuel, à $\big(\sqrt{a_k}\sqrt{x}^{\,k}\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, $\big(\sqrt{a_k}\sqrt{y}^{\,k}\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{k=0}^{n} \big(\sqrt{a_k}\sqrt{x}^{\,k}\big)\big(\sqrt{a_k}\sqrt{y}^{\,k}\big)\Big)^2\\
&\leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} \big(\sqrt{a_k}\sqrt{x}^{\,k}\big)^2\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \big(\sqrt{a_k}\sqrt{y}^{\,k}\big)^2\Big)\\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k y^k\Big) = P(x)P(y),
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

23.8

En appliquant l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$ usuel aux vecteurs $u = (1)$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 et $a = (|a_{ij}|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on obtient :

$$\Big(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|\Big)^2 = (u \mid a)^2 \leqslant ||u||^2 ||a||^2 = n^2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2.$$

Comme $A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, on a : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$,

d'où : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = n$ et finalement : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$.

23.9

1) Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(\mathbb{R})$.

La première colonne et la première ligne de A sont normées, donc : $\quad a_{11}^2 = 1$ et $a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = 1$,

d'où $a_{11} \in \{-1, 1\}$ et $a_{12} = ... = a_{1n} = 0$.

Ensuite, la deuxième colonne et la deuxième ligne de A sont normées, donc, compte tenu du résultat précédent :

$$a_{22}^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 = 1,$$

d'où $a_{22} \in \{-1, 1\}$ et $a_{23} = ... = a_{2n} = 0$.

De proche en proche, on obtient : $A = \mathrm{diag}\,(a_{11}, ..., a_{nn})$ et $(a_{11}, ..., a_{nn}) \in \{-1, 1\}^n$.

2) Réciproquement, pour tout $(d_1, ..., d_n) \in \{-1, 1\}^n$, il est clair que la matrice $A = \mathrm{diag}\,(d_1, ..., d_n)$ est orthogonale et triangulaire supérieure, donc $A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(\mathbb{R})$.

On conclut :

$\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(\mathbb{R}) = \big\{\mathrm{diag}\,(d_1, ..., d_n),\ (d_1, ..., d_n) \in \{-1, 1\}^n\big\}$.

Ainsi, $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(\mathbb{R})$ est un ensemble fini à 2^n éléments.

23.10

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Il est clair que l'application

$$f_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto AM$$

est linéaire.

L'endomorphisme f_A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si :

$$\forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big(f_A(M) \,\big|\, f_A(N)\big) = (M \mid N).$$

On a, pour toutes $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\big(f_A(M) \,\big|\, f_A(N)\big) &= (AM \mid AN)\\
&= \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}(AM)(AN)\big) = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}M\,{}^{\mathrm{t}}AAN).
\end{aligned}$$

D'où : $\quad f_A \in \mathcal{O}\big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}M\,{}^{\mathrm{t}}AAN) = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}MN)\\
&\iff \forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}M({}^{\mathrm{t}}AA - \mathrm{I}_n)N\big) = 0\\
&\iff \forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \ \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}\big[({}^{\mathrm{t}}AA - \mathrm{I}_n)M\big]N\big) = 0\\
&\iff \forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \ \Big(\forall N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad ({}^{\mathrm{t}}AA - \mathrm{I}_n)M \perp N\Big)\\
&\iff \forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad ({}^{\mathrm{t}}AA - \mathrm{I}_n)M = 0\\
&\iff {}^{\mathrm{t}}AA - \mathrm{I}_n = 0 \iff A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

On conclut : f_A est un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

23.11

1) • L'application f est linéaire, puisque, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $x, x' \in E_3$:

$$f(\lambda x + x') = \lambda x + x' + a \wedge (\lambda x + x') = \lambda(x + a \wedge x) + (x' + a \wedge x') = \lambda f(x) + f(x').$$

• On a, pour tout $x \in E_3$:

$$x \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(x) = 0 \iff x + a \wedge x = 0$$
$$\implies x \cdot (x + a \wedge x) = 0 \iff x \cdot x + x \cdot (a \wedge x) = 0$$
$$\iff ||x||^2 + [x, a, x] = 0 \iff ||x||^2 = 0 \iff x = 0.$$

Ceci montre $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, donc l'endomorphisme f est injectif.

• Puisque f est un endomorphisme injectif et que E_3 est de dimension finie, on conclut que f est bijectif, c'est-à-dire : $f \in \mathcal{GL}(E)$.

2) Soit $y \in E_3$.

Notons $x = f^{-1}(y)$; on a donc : $y = f(x) = x + a \wedge x$, d'où :

$$a \cdot y = a \cdot (x + a \wedge x) = a \cdot x + a \cdot (a \wedge x) = a \cdot x$$

$$a \wedge y = a \wedge (x + a \wedge x) = a \wedge x + a \wedge (a \wedge x) = a \wedge x + (a \cdot x)\, a - (a \cdot a)\, x,$$

en utilisant la formule du double produit vectoriel :

$$\forall (a, b, c) \in E_3^3, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c.$$

On déduit :

$$x = y - a \wedge x = y - \big(a \wedge y - (a \cdot x)\, a + ||a||^2 x\big)$$
$$= y - a \wedge y + (a \cdot x)\, a - ||a||^2 x = y - a \wedge y + (a \cdot y)\, a - ||a||^2 x,$$

puis : $\quad \big(1 + ||a||^2\big) x = y - a \wedge y + (a \cdot y)\, a.$

On conclut :

$$\forall y \in E_3, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{1 + ||a||^2}\big(y - a \wedge y + (a \cdot y)\, a\big).$$

23.12

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $u = xi + yj + zk$, $u' = \operatorname{Ref}_P(u)$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que $u' = x'i + y'j + z'k$.

On a alors : $\quad u' + u \in P \quad$ et $\quad u' - u \in P^\perp$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x' - x = \lambda a, \quad y' - y = \lambda b, \quad z' - z = \lambda c.$$

D'où :

$$0 = a(x' + x) + b(y' + y) + c(z' + z) = 2ax + 2by + 2cz + \lambda,$$

donc : $\qquad \lambda = -2(ax + by + cz),$

puis :
$$\begin{cases} x' = x + \lambda a = (1 - 2a^2)x - 2aby - 2acz \\ y' = y + \lambda b = -2abx + (1 - 2b)^2 y - 2bcz \\ z' = z + \lambda c = -2acx - 2bcy + (1 - 2c^2)z. \end{cases}$$

Finalement, la matrice cherchée est :

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}.$$

23.13

1) • Par hypothèse, on a déjà : $F \subset G^\perp$.

• Soit $f \in G^\perp$.

Puisque $f \in G^\perp \subset E = F + G$, il existe $u \in F$, $v \in G$ tels que : $f = u + v$. On a alors : $v = f - u$, $f \in G^\perp$, $u \in F \subset G^\perp$. Comme $G^\perp$ est un sev de E, il en résulte : $v \in G^\perp$.

Ainsi : $v \in G$ et $v \in G^\perp$, donc $v = 0$, puis $f = u \in F$.

Ceci montre : $G^\perp \subset F$.

On conclut : $G^\perp = F$.

2) On a : $F \subset G^\perp$, d'où : $F^\perp \supset G^{\perp\perp}$.

Mais on sait, d'après le cours : $G \subset G^{\perp\perp}$, d'où : $G \subset F^\perp$.

Ainsi, le couple (G, F) vérifie les mêmes hypothèses que le couple (F, G) : $G \subset F^\perp$ et $G + F = E$. D'après *1)*, appliqué à (G, F) à la place de (F, G), on a donc : $F^\perp = G$.

23.14

a) 1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$. On a :

$$f(\alpha x + y) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, \alpha x + y) e_i = \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha (e_i \,|\, x) e_i + (e_i \,|\, y) e_i\big)$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x) e_i + \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, y) e_i = \alpha f(x) + f(y),$$

donc f est linéaire.

On conclut que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2) • (i) : Soit $x \in \mathcal{F}^\perp$.

On a alors : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad (e_i \,|\, x) = 0,$

donc : $\quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x) e_i = \sum_{i=1}^{n} 0 e_i = 0,$

d'où $\;x \in \operatorname{Ker}(f)$.

Ceci montre : $\mathcal{F}^\perp \subset \operatorname{Ker}(f)$.

(ii) : Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

On a donc $\; f(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x) e_i = 0,$

d'où, en faisant le produit scalaire par x :

$$0 = (0 \,|\, x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x) e_i \,\Big|\, x\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x)(e_i \,|\, x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(e_i \,|\, x)^2}_{\geqslant 0}.$$

Il en résulte : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad (e_i \,|\, x) = 0,$

et donc : $x \in \mathcal{F}^\perp$.

Ceci montre : $\operatorname{Ker}(f) \subset \mathcal{F}^\perp$.

On conclut : $\operatorname{Ker}(f) = \mathcal{F}^\perp$.

• (i) : On a : $\forall x \in E, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x) e_i \in \operatorname{Vect}(\mathcal{F}),$

donc : $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$.

(ii) : D'après le théorème du rang et le résultat précédent :

$$\dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big)$$

$= n - \dim(\mathcal{F}^\perp) = n - \dim\big((\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}))^\perp\big) = \dim\big(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})\big)$.

Comme $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ et que ces deux sev ont la même dimension, on conclut : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

3) Puisque f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie, on a :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ surjective}$$
$$\iff \mathrm{Im}\,(f) = E \iff \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = E.$$

D'autre part, puisque $\mathcal{F}$ a n éléments et que $\dim(E) = n$, $\mathcal{F}$ engendre E si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

Finalement, f est bijective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

b) Considérons l'application f associée à $\mathcal{B}$. Soit $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$. D'après *a) 3)*, puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, f est bijective, donc : $\exists!v \in E, \quad f(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \qquad (1).$

Et, puisque $\mathcal{B}$ est une base de E :

$$(1) \iff \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$
$$\iff \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad (e_i\,|\,x) = c_i.$$

On conclut :

$$\forall (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n,\ \exists!v \in E,\ \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad (e_i\,|\,x) = c_i.$$

23.15

1) On a, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:

$$||e_j||^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,e_j)^2 = ||e_j||^4 + \sum_{i,\, i\neq j}(e_i\,|\,e_j)^2,$$

donc :

$$\sum_{i,\, i\neq j}(e_i\,|\,e_j)^2 = ||e_j||^2 - ||e_j||^4 = ||e_j||^2\big(1 - ||e_j||^2\big) \leqslant 0.$$

Il en résulte : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \big(i \neq j \implies (e_i\,|\,e_j) = 0\big)$,

ce qui montre que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale.

De plus, on a alors, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $||e_j||^2\big(1 - ||e_j||^2\big) = 0$. Comme $e_j \neq 0$, car $||e_j|| \geqslant 1$, on déduit $||e_j|| = 1$.

Ainsi, $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthonormale de E.

2) Soit $x \in E$. On a :

$$\Big|\Big|x - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i\Big|\Big|^2 = \Big(x - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i \,\Big|\, x - \sum_{j=1}^{n}(e_j\,|\,x)e_j\Big)$$

$$= (x\,|\,x) - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)(e_i\,|\,x)$$
$$- \sum_{j=1}^{n}(e_j\,|\,x)(x\,|\,e_j) + \sum_{i,j}(e_i\,|\,x)(e_j\,|\,x)(e_i\,|\,e_j)$$
$$= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)^2 - \sum_{j=1}^{n}(e_j\,|\,x)^2 + \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)^2$$
$$= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)^2 = 0,$$

d'où $x - \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i = 0$, et donc $x = \sum_{i=1}^{n}(e_i\,|\,x)e_i$.

Ceci montre que $(e_1, ..., e_n)$ engendre E.

Finalement, $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E.

23.16

1) En remplaçant y par 0 : $\forall x \in E, \quad ||f(x)|| = ||x||$.

2) Puis, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle f(x)\,,\, f(y)\rangle = -\frac{1}{2}\big(||f(x) - f(y)||^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2\big)$$
$$= -\frac{1}{2}\big(||x - y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\big) = \langle x\,,\, y\rangle.$$

3) On a, pour tout $(\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in E$:

$$\begin{aligned}
&\big|\big|f(x + \lambda y) - \big(\lambda f(x) + f(y)\big)\big|\big|^2\\
=\ & ||f(\lambda x + y)||^2 + \lambda^2||f(x)||^2 + ||f(y)||^2\\
&- 2\lambda\,\langle f(\lambda x + y)\,,\, f(x)\rangle - 2\langle f(\lambda x + y)\,,\, f(y)\rangle\\
&+ 2\lambda\,\langle f(x)\,,\, f(y)\rangle\\
=\ & ||\lambda x + y||^2 + \lambda^2||x||^2 + ||y||^2\\
&- 2\lambda\langle \lambda x + y\,,\, x\rangle - 2\langle \lambda x + y\,,\, y\rangle + 2\lambda\langle x\,,\, y\rangle\\
=\ & ||(\lambda x + y) - \lambda x - y||^2 = 0,
\end{aligned}$$

d'où : $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ et donc f est linéaire.

23.17

1) Supposons : $\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$.

Soit $x \in E$. Comme $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\,(p)$ et $p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$, on a, par hypothèse : $\big(x - p(x)\,|\,p(x)\big) = 0$, donc, d'après le théorème de Pythagore : $||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2$, d'où : $||p(x)|| \leqslant ||x||$.

2) Réciproquement, supposons : $\forall x \in E, \quad ||p(x)|| \leqslant ||x||$.

Soient $x \in \mathrm{Ker}\,(p)$, $y \in \mathrm{Im}\,(p)$.

On a donc : $p(x) = 0$ et $p(y) = y$.

On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $||p(\lambda x + y)||^2 \leqslant ||\lambda x + y||^2$,

c'est-à-dire : $\lambda^2||x||^2 + 2\lambda(x\,|\,y) \geqslant 0$.

Comme le trinôme réel $\lambda \longmapsto \lambda^2||x||^2 + 2\lambda(x\,|\,y)$ est à valeurs $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, son discriminant est $\leqslant 0$, d'où $(x\,|\,y)^2 \leqslant 0$, et donc $(x\,|\,y) = 0$.

Ainsi : $\forall x \in \mathrm{Ker}\,(p),\ \forall y \in \mathrm{Im}\,(p), \quad (x\,|\,y) = 0$.

On conclut : $\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$.

23.18

1) Soit $x \in E$. En appliquant l'inégalité d'hypothèse à $p(x)$ à la place de x, on a :

$$\big|\big|p\big(p(x)\big)\big|\big|^2 + \big|\big|q\big(p(x)\big)\big|\big|^2 \leqslant ||p(x)||^2.$$

Comme $p\big(p(x)\big) = p(x)$, il s'ensuit $\big|\big|q\big(p(x)\big)\big|\big|^2 = 0$, puis $(q \circ p)(x) = 0$.

Ceci montre : $q \circ p = 0$.

Comme p et q ont des rôles symétriques, on a aussi : $p \circ q = 0$.

2) • On déduit :

$$(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + q^2 = p + q,$$

donc $p+q$ est un projecteur.

• Soit $x \in E$.

Comme $q \circ p = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}\,(q) = \big(\mathrm{Im}\,(q)\big)^{\perp}$.

Comme $p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $q(x) \in \mathrm{Im}\,(q)$, il en résulte $p(x) \perp q(x)$, c'est-à-dire : $\big(p(x) \,\big|\, q(x)\big) = 0$.

• On a alors, pour tout $x \in E$:

$$||(p+q)(x)||^2 = ||p(x)||^2 + 2\big(p(x)\,\big|\,q(x)\big) + ||q(x)||^2$$
$$= ||p(x)||^2 + ||q(x)||^2 \leqslant ||x||^2.$$

D'après l'exercice 23.17, on conclut que $p+q$ est un projecteur orthogonal.

23.19

a) Notons $X = \mathrm{Vect}\,(x_1, ..., x_n)$, $p = \dim(X)$, et soit $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de X.

Chaque $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ se décompose linéairement sur $(e_1, ..., e_p)$, donc il existe $M = (\xi_{ki})_{1 \leqslant k \leqslant p,\ 1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \xi_{ki} e_k.$

On a alors : $\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad (x_i \,|\, x_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \xi_{ki}\xi_{kj}.$

On reconnaît ici le terme général du produit de deux matrices. En notant G pour $G(x_1, ..., x_n)$, on obtient : $G = {}^{\mathrm{t}}MM$.

D'après un exercice classique, on a : $\mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}MM) = \mathrm{rg}\,(M)$.

Finalement : $\mathrm{rg}\,\big(G(x_1, ..., x_n)\big) = \mathrm{rg}\,(M) = \mathrm{rg}\,(x_1, ..., x_n)$.

b) 1) En utilisant *a)* :

$$(x_1, ..., x_n) \text{ lié} \iff \mathrm{rg}\,(x_1, ..., x_n) < n$$
$$\iff \mathrm{rg}\,\big(G(x_1, ..., x_n)\big) < n$$
$$\iff \det\big(G(x_1, ..., x_n)\big) = 0 \iff \gamma(x_1, ..., x_n) = 0.$$

2) • Si $(x_1, ..., x_n)$ est libre, alors, avec les notations de *a)*, on a $p = n$, $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\gamma(x_1, ..., x_n) = \det\,({}^{\mathrm{t}}MM)$$
$$= \det\,({}^{\mathrm{t}}M)\det\,(M) = \big(\det\,(M)\big)^2 > 0.$$

• Réciproquement, si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$, alors, d'après *1)*, $(x_1, ..., x_n)$ n'est pas lié, c'est-à-dire est libre.

c) Notons $y = x - p_X(x)$. Puisque $y \in X^{\perp}$, on a :

$$\gamma(x_1, ..., x_n)$$
$$= \begin{vmatrix} ||y||^2 + ||p_X(x)||^2 & (p_X(x)\,|\,x_1) & \dots & (p_X(x)\,|\,x_n) \\ (x_1\,|\,p_X(x) & (x_1\,|\,x_1) & \dots & (x_1\,|\,x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \big(x_n\,|\,p_X(x)\big) & (x_n\,|\,x_1) & \dots & (x_n\,|\,x_n) \end{vmatrix}$$
$$= ||y||^2\gamma(x_1, ..., x_n) + \gamma\big(p_X(x), x_1, ..., x_n\big).$$

Comme $p_X(x) \in X$, la famille $\big(p_X(x), x_1, ..., x_n\big)$ est liée, donc, d'après *a)* : $\gamma\big(p_X(x), x_1, ..., x_n\big) = 0$.

Ainsi : $\gamma(x, x_1, ..., x_n) = d^2\gamma(x_1, ..., x_n)$ et finalement :

$$d = \Big(\frac{\gamma(x, x_1, ..., x_n)}{\gamma(x_1, ..., x_n)}\Big)^{1/2}.$$

23.20

On a :

$$\begin{aligned} & ||\,{}^{\mathrm{t}}AC - C\,{}^{\mathrm{t}}B||^2 \\ = \ & \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AC - C\,{}^{\mathrm{t}}B)({}^{\mathrm{t}}AC - C\,{}^{\mathrm{t}}B)\big) \\ = \ & \mathrm{tr}\,\big(({}^{\mathrm{t}}CA - B\,{}^{\mathrm{t}}C)({}^{\mathrm{t}}AC - C\,{}^{\mathrm{t}}B)\big) \\ = \ & \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}CA\,{}^{\mathrm{t}}AC - {}^{\mathrm{t}}CAC\,{}^{\mathrm{t}}B - B\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}AC + B\,{}^{\mathrm{t}}CC\,{}^{\mathrm{t}}B) \\ = \ & \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}C(A\,{}^{\mathrm{t}}A)C\big) - \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}C(AC)\,{}^{\mathrm{t}}B\big) \\ & \quad - \mathrm{tr}\,\big(B({}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}AC)\big) + \mathrm{tr}\,\big(B({}^{\mathrm{t}}CC\,{}^{\mathrm{t}}B)\big) \\ = \ & \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}AAC) - \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}CCB\,{}^{\mathrm{t}}B) \\ & \quad - \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}A(CB)\big) + \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}CC({}^{\mathrm{t}}BB)\big) \\ = \ & \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}AAC) - \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}CCB\,{}^{\mathrm{t}}B) \\ & \quad - \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}AAC) + \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}CCB\,{}^{\mathrm{t}}B) \ = \ 0. \end{aligned}$$

On conclut ${}^{\mathrm{t}}AC - C\,{}^{\mathrm{t}}B = 0$, c'est-à-dire ${}^{\mathrm{t}}AC = C\,{}^{\mathrm{t}}B$.

Vrai ou Faux ?

23.1 L'application $\big((x_1,\, y_1),\; (x_2,\, y_2)\big) \longmapsto x_1x_2 + y_1y_2$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. **V F**

23.2 On a, pour tous éléments x, y d'un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(.\,|\,.)$ et de la norme associée $||.||$: $(x\,|\,y) = \dfrac{1}{2}\big(||x+y||^2 - ||x-y||^2\big)$. **V F**

23.3 Pour deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel préhilbertien $\big(E, (.\,|\,.)\big)$, si $(x\,|\,y) = 0$, alors : $x = 0$ ou $y = 0$. **V F**

23.4 Pour tous vecteurs x, y d'un espace préhilbertien $\big(E, (.\,|\,.)\big)$, on a : $(x\,|\,y)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$. **V F**

23.5 Pour tout sev V de dimension finie d'un espace préhilbertien E, les sev V et $V^\perp$ sont supplémentaires dans E. **V F**

23.6 Toute famille orthogonale est libre. **V F**

23.7 Si $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ est un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B}$ une base de E, $x, y \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$, alors : $(x\,|\,y) = {}^{\mathrm{t}}XY$. **V F**

23.8 Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E, alors, pour tout $x \in E$: $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i\,|\,x)e_i$. **V F**

23.9 Si un vecteur x d'un espace préhilbertien $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ vérifie $(x\,|\,y) = 0$ pour tout vecteur y de E, alors $x = 0$. **V F**

23.10 Si deux sev F, G d'un espace préhilbertien $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ vérifient $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$. **V F**

Vrai ou Faux, les réponses

23.1 C'est un résultat du cours. **V**

23.2 Le coefficient $\frac{1}{2}$ est inexact, le bon coefficient est $\frac{1}{4}$: $(x\,|\,y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$. **F**

23.3 il se peut que $(x\,|\,y) = 0$ sans que $x = 0$ ou $y = 0$, lorsque x et y sont orthogonaux et non nuls. **F**

23.4 C'est un résultat du cours : l'inégalité de Cauchy et Schwarz. **V**

23.5 C'est un résultat du cours : le théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien. **V**

23.6 Il y a eu oubli de l'hypothèse : vecteurs tous non nuls. **F**

Le résultat correct est : toute famille orthogonale à vecteurs tous non nuls est libre.

23.7 Il y a eu oubli de la condition orthonormale pour la base considérée. **F**

23.8 C'est un résultat du cours. **V**

23.9 Si, pour tout $y \in E$, $(x\,|\,y) = 0$, alors, en particulier, $(x\,|\,x) = 0$, donc $x = 0$. **V**

23.10 Soit $x \in G^{\perp}$. on a, pour tout $y \in G$, $(x\,|\,y) = 0$, donc a fortiori, pour tout $y \in F$, $(x\,|\,y) = 0$, donc $x \in F^{\perp}$. **V**

Chapitre 24

Intégration

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Obtention d'inégalités portant sur des intégrales
- Calculs simples d'intégrales
- Détermination de certaines limites liées à des intégrales
- Recherche de limites d'intégrales
- Étude et représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale, le paramètre étant aux bornes
- Résolution de certaines équations fonctionnelles.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés algébriques et propriétés relatives à l'ordre usuel, pour les intégrales, en particulier l'étude du cas où une intégrale est nulle, et l'inégalité de Cauchy et Schwarz
- Les méthodes usuelles pour transformer l'écriture d'une intégrale : intégration par parties, changement de variable, relation de Chasles
- Les propriétés de l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour obtenir une inégalité portant sur une ou des intégrales

Essayer d'appliquer les théorèmes du cours portant sur les inégalités sur des intégrales.

En particulier, si des intégrales de carrés ou de produits interviennent, essayer d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

➟ **Exercices 24.1, 24.9, 24.22**

Exemple

Soit $f : [-1\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

On note $M = \underset{x\in[-1;1]}{\text{Sup}} |f(x)|$.

Montrer :

$$\left|\int_{-1}^{1} \big(f(x^2) + xf(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 3M.$$

D'abord, puisque f est continue sur le segment $[-1\,;\,1]$, la borne supérieure M existe.

Par opérations, l'application $x \longmapsto f(x^2) + xf(x)$ est continue sur le segment $[-1\,;\,1]$, donc l'intégrale proposée existe.

On a :

$$\left|\int_{-1}^{1} \big(f(x^2) + xf(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-1}^{1} \big|f(x^2) + xf(x)\big|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} \big(|f(x^2)| + |x|\,|f(x)|\big)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} \big(M + |x|M\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= M\int_{-1}^{1} \big(1 + |x|\big)\,\mathrm{d}x = 2M\int_{0}^{1} (1 + x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2M\Big[x + \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = 2M\frac{3}{2} = 3M.$$

Méthode

Pour conclure qu'une fonction est nulle, ayant un renseignement sur une intégrale

Essayer d'appliquer un théorème du cours :

si $a < b$ et si $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive ou nulle, telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.

On peut aussi essayer d'utiliser une contraposée.

➟ **Exercice 24.10**

Exemple

Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$f \leqslant 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f = 1$.

Montrer : $f = 1$.

On a : $\displaystyle\int_0^1 (1 - f) = 1 - \int_0^1 f = 1 - 1 = 0.$

Puisque $1 - f$ est continue, positive ou nulle et d'intégrale nulle, d'après le cours on déduit $1 - f = 0$, donc $f = 1$.

Méthode

Pour trouver une limite d'intégrale

On peut conjecturer la limite, qui est souvent dans les exemples simples l'intégrale de la limite, et montrer que la différence entre l'intégrale de l'énoncé et la limite présumée tend vers 0.

➟ **Exercices 24.6, 24.7, 24.12, 24.17**

Exemple

Trouver $\lim_{n\infty} \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit, par théorème d'encadrement :

$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Méthode

Pour changer la forme de l'écriture d'une intégrale, ou pour calculer ou évaluer une intégrale dans des cas simples

Appliquer les méthodes de calcul d'intégrales et de primitives :

- primitives usuelles
- linéarité de l'intégration
- relation de Chasles
- changement de variable
- intégration par parties.

On se ramène alors à la formule fondamentale de l'analyse :

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

où f est continue sur $[a\,;b]$ et F est une primitive de f.

On peut quelquefois exploiter un changement de variable qui échange les bornes.

➟ **Exercices 24.3, 24.15**

Exemple

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \, \mathrm{d}x$.

D'abord, I existe comme intégrale d'une application continue sur un segment.

Par le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, on a :

$$I = \int_0^1 \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+t^2+2t}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \left[t + \ln(1+t^2)\right]_0^1 = 1 + \ln 2.$$

Exemple

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x.$$

Former une relation entre W_{n+2} et W_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

En notant $\begin{cases} u = \sin^{n+1} x \\ v' = \sin x \end{cases}$ $\begin{cases} u' = (n+1)\sin^n x \cos x \\ v = -\cos x \end{cases}$

on a, par intégration par parties pour des applications de classe C^1 sur le segment $[0\,;\,\pi/2]$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x \sin x \, \mathrm{d}x \\ &= \big[\sin^{n+1} x(-\cos x)\big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n x \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = (n+1)(W_n - W_{n+2}). \end{aligned}$$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$

Méthode

Pour amener une intégrale ayant des bornes différentes de celles qui interviennent dans l'énoncé

Essayer d'appliquer la relation de Chasles ou d'effectuer un changement de variable.

➟ **Exercices 24.12, 24.15**

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application

$$g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^1 f\Big(\frac{t}{x}\Big)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a, par le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$:

$$g(x) = \int_0^1 f\Big(\frac{t}{x}\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/x} f(u)x\,\mathrm{d}u = x\int_0^{1/x} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le cours, l'application

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et $F' = f$).

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = xF\Big(\dfrac{1}{x}\Big),$

on conclut, par opérations, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Méthode

Pour étudier ou dériver une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes

Appliquer le théorème du cours sur les dérivées de l'application

$$x \longmapsto \int_a^x f \;\text{ et }\; x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f.$$

➟ **Exercices 24.13, 24.14, 24.19, 24.20, 24.21**

Exemple

Montrer que l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'application $t \longmapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les applications $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le cours, l'application g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \sqrt{1+(x^2)^4}\,2x - \sqrt{1+x^4}\,1 = 2x\sqrt{1+x^8} - \sqrt{1+x^4}.$$

Méthode

Pour chercher la limite d'une suite dont le terme général u_n est une somme indexée par k de termes dépendant de k et n

Essayer de faire apparaître une somme de Riemann.

- Dans des cas simples, il s'agit exactement d'une somme de Riemann.
- Mais souvent, u_n n'est pas exactement une somme de Riemann. Essayer alors de construire v_n qui soit une somme de Riemann et qui ressemble à u_n, de façon que $u_n - v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et que l'on puisse trouver la limite de v_n, d'où l'on déduira la limite de u_n.

Si le terme général u_n proposé contient un symbole de produit, on peut essayer de se ramener à une somme en utilisant un logarithme.

➟ **Exercices 24.5, 24.11**

Exemple

Trouver $\displaystyle\lim_{n\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$,

donc il s'agit d'une somme de Riemann.

L'application $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est continue sur le segment $[0\,;1]$, donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

On calcule l'intégrale :

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2^{3/2}-1).$$

On conclut : $\displaystyle\lim_{n\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}(2^{3/2}-1)$.

Exemple

Trouver un équivalent simple de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2+k}\,\mathrm{e}^{k/n}$$

lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle v_n = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{e}^{k/n}$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle v_n = n^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,\mathrm{e}^{k/n}\Big)$,

où l'on reconnaît une somme de Riemann.

L'application $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{x}$ est continue sur le segment $[0\,;1]$, donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,\mathrm{e}^{\,k/n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x.$$

On calcule l'intégrale par une intégration par parties :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x = [x\,\mathrm{e}^{\,x}]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^{\,x}]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$

On a donc : $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1.$

• Comparons les comportements de u_n et v_n lorsque l'entier n tend vers l'infini. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant u_n - v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k^2+k}-k\right)\mathrm{e}^{\,k/n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2+k}+k}\,\mathrm{e}^{\,k/n}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2k}\,\mathrm{e}^{\,k/n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\,k/n} \leqslant \frac{1}{2}n\,\mathrm{e}\,.$$

D'où : $$0 \leqslant \frac{u_n}{n^2} - \frac{v_n}{n^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2n}.$$

Comme $\dfrac{\mathrm{e}}{2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit, par théorème d'encadrement :

$$\frac{u_n}{n^2} - \frac{v_n}{n^2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• Enfin : $\dfrac{u_n}{n^2} = \left(\dfrac{u_n}{n^2} - \dfrac{v_n}{n^2}\right) + \dfrac{v_n}{n^2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 + 1 = 1,$

et on conclut : $u_n \underset{n\infty}{\sim} n^2.$

Méthode

Pour obtenir une inégalité portant sur une fonction ou une intégrale

Essayer d'utiliser une fonction auxiliaire, dont on étudiera les variations, ou l'inégalité des accroissements finis, ou l'inégalité de Taylor-Lagrange.

➟ **Exercices 24.13, 24.21**

Exemple

Soit $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et que :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad f'(x) + f(x) \leqslant 1.$$

Montrer :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad f(x) < 1.$$

Considérons l'application $g : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x} f(x).$

Puisque f est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$, par opérations, g est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad g'(x) = \mathrm{e}^{\,x}\big(f'(x) + f(x)\big).$$

On a donc : $\quad \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad g'(x) \leqslant \mathrm{e}^{\,x}.$

Soit $X \in [0\,;+\infty[$.

En intégrant de 0 à X, on obtient : $\displaystyle\int_0^X g'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^X \mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x,$

c'est-à-dire : $$g(X) - \underbrace{g(0)}_{=0} \leqslant \mathrm{e}^{\,X} - 1.$$

D'où : $f(X) = \mathrm{e}^{\,-X} g(X) \leqslant \mathrm{e}^{\,-X}(\mathrm{e}^{\,X} - 1) = 1 - \mathrm{e}^{\,-X} < 1.$

On conclut : $\quad \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad f(x) < 1.$

Méthode

Pour résoudre une équation fonctionnelle faisant intervenir une intégrale à borne variable

On peut essayer de dériver et faire apparaître une équation différentielle.

➟ **Exercices 24.19, 24.20**

Exemple

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que :

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\big(f(x)\big)^2 = 1 + \int_0^x \big(f(t)^2 + f'(t)^2\big)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Si f convient, alors $f^2 + f'^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le cours, l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (f^2 + f'^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On a donc :

$$(1) \iff \begin{cases} f(0)^2 = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R},\quad 2f(x)f'(x) = f(x)^2 + f'(x)^2 \quad (2) \end{cases}.$$

Et :

$$\begin{aligned} (2) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \big(f'(x) - f(x)\big)^2 = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) - f(x) = 0 \\ &\iff \exists\, C \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = C\,\mathrm{e}^{\,x}. \end{aligned}$$

On a alors : $f(0)^2 = 1 \iff C^2 = 1 \iff C = \pm 1$.

On conclut : $\mathcal{S} = \big\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\,x}\,;\ C \in \{-1, 1\}\big\}$.

Énoncés des exercices

24.1 Inégalité sur une intégrale

Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note $M = \displaystyle\sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$.

Montrer :
$$\left| \int_0^1 \big(f(x) + xf(1-x)\big)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{3}{2}M.$$

24.2 Changement de signe pour une fonction continue d'intégrale nulle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $x_1 \in [a\,;\,b]$ tel que $f(x_1) > 0$, et $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Montrer qu'il existe $x_2 \in [a\,;\,b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

24.3 Exemple de calcul simple d'une intégrale

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x.$

24.4 Exemple de calcul simple d'une intégrale puis d'une borne inférieure

Déterminer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{a\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax)^2\,\mathrm{d}x.$

24.5 Limites de sommes de Riemann

Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont on donne le terme général u_n, converge, et calculer sa limite :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$

24.6 Exemples simples de détermination de limites d'intégrales

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x.$

24.7 Exemple simple de détermination de la limite d'une intégrale

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$

24.8 Exemple de calcul d'une intégrale à l'aide d'un changement de variable

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x.$

24.9 Exemple d'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $f, g : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que : $f \geqslant 0,\ g \geqslant 0,\ fg \geqslant 1$. Montrer :

$$\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geqslant 1.$$

24.10 Déductions sur une fonction à partir de renseignements sur des intégrales

Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$, où f^2 désigne $f \cdot f$.

Montrer : $f = 0$ ou $f = 1$.

24.11 Limite d'une suite ressemblant à une somme de Riemann

Montrer que, pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha + \beta = 1$, la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n+k)^{-\alpha}(n+k+1)^{-\beta}$ converge et déterminer sa limite.

24.12 Exemples assez simples de détermination de limites d'intégrales

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{u \longrightarrow 0^+} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u \sin x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\lim_{u \longrightarrow 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x.$

24.13 Détermination des fonctions vérifiant une inégalité intégrale

Déterminer l'ensemble des applications $f : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que $f \geqslant 0$ et que : $$\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\quad f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

24.14 Étude de fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes

Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

24.15 Inégalité sur des intégrales par transformation de l'écriture

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne.

On considère l'application $F : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que F est $\dfrac{k}{2}$-lipschitzienne.

24.16 Inégalité sur une intégrale par transformation de l'écriture

Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x,y) \in [0\,;\,1]^2,\quad xf(y) + yf(x) \leqslant 1.$

Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}.$

24.17 Exemples de détermination de limites d'intégrales

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{u \longrightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-u \sin x}\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\lim_{u \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \int_0^u \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$

24.18 Résolution d'une équation fonctionnelle par intervention d'intégrales

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xf(1)$.

24.19 Résolution d'une équation fonctionnelle faisant intervenir des intégrales

Trouver toutes les applications $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_0^1 \big(f(x^2)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

24.20 Résolution d'une équation fonctionnelle faisant intervenir une intégrale

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(f(x)\big)^2 = \int_0^x \Big(\big(f(t)\big)^2 + \big(f'(t)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}t - x + 1.$$

24.21 Inégalité portant sur des intégrales, utilisation d'une fonction auxiliaire

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$ et :

$$\forall x \in [a\,;\,b], \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1.$$

Montrer : $\displaystyle\int_a^b f^3 \leqslant \Big(\int_a^b f\Big)^2$.

24.22 Inégalités sur des intégrales

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$.

a) On note : $F : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Montrer : $\forall x \in [a\,;\,b], \quad |f(x)| \leqslant F(x)$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$.

24.23 Inégalités sur les bornes de f, f', f''

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$; on note $M_0 = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{1}{2}M_2 a$.

b) En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$, et que, en notant $M_1 = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$, on a :

$$M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$

24.24 Limite de suite d'intégrales nécessitant le retour à la définition d'une limite

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$. Montrer :

$$\Big(\int_a^b \big(f(x)\big)^n\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \operatorname*{Sup}_{x\in[a\,;\,b]} f(x).$$

Du mal à démarrer ?

24.1 Utiliser les théorèmes sur les inégalités sur les intégrales.

24.2 Raisonner par l'absurde.

24.3 Remarquer que $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$, pour transformer l'expression dans l'intégrale.

24.4 Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale envisagée, puis chercher la borne inférieure lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

24.5 *a)* Reconnaître une somme de Riemann.

b) Après avoir pris le logarithme, reconnaître une somme de Riemann.

24.6 Conjecturer la limite et montrer que la différence entre l'intégrale proposée et la limite conjecturée tend vers 0.

24.7 On peut conjecturer que la limite de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ est l'intégrale de la limite, c'est-à-dire $I = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x$. Pour montrer $I_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} I$, on essaie de montrer :

$$|I_n - I| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

24.8 Après s'être assuré de l'existence de I, essayer d'utiliser un changement de variable qui échange les bornes.

24.9 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

24.10 Développer $\displaystyle\int_0^1 (f-f^2)^2$ et déduire $f(1-f) = 0$.

Attention : si le produit de deux fonctions continues est la fonction nulle, on ne peut pas déduire directement que l'une des deux fonctions est la fonction nulle. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

24.11 Faire intervenir une somme de Riemann v_n ressemblant à u_n.

24.12 Conjecturer la limite et montrer que la différence entre l'intégrale proposée et sa limite conjecturée tend vers 0, en transformant l'écriture de cette différence ou en majorant convenablement sa valeur absolue.

24.13 Étudier les variations de la fonction auxiliaire

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

24.14 Étudier successivement : ensemble de définition, dérivée, limites aux bornes. L'outil essentiel est le théorème du cours sur l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes, $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

24.15 Transformer l'écriture de $F(x)$ sous forme d'une intégrale à bornes fixes 0 et 1, puis revenir à la définition d'une application lipschitzienne.

24.16 Effectuer, dans $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, chacun des deux changements de variable $x = \sin u$, $x = \cos v$, de façon à pouvoir utiliser l'hypothèse.

24.17 *a)* Se ramener sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et utiliser l'inégalité classique :

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right],\quad \sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

b) Essayer de faire intervenir e^{xu} au lieu de e^{u^2}.

24.18 Considérer $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f$ et obtenir des relations simples sur f et F.

24.19 Effectuer dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ le changement de variable $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, de façon à la rapprocher de la deuxième intégrale de l'énoncé.

24.20 Dériver pour faire apparaître une équation différentielle.

24.21 Remplacer b par une variable, pour considérer une fonction, et étudier les variations de cette fonction.

24.22 *a)* Utiliser la formule exprimant f à l'aide d'une intégrale portant sur f' : $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Comme un produit et un carré interviennent à l'intérieur d'intégrales, penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

24.23 *a)* Pour faire intervenir f, f', f'', appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[x-a\,;\,x]$ et sur $[x\,;\,x+a]$.

b) Étudier les variations de $a \longmapsto \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{1}{2}M_2 a$.

24.24 L'application f, continue sur le segment $[a\,;\,b]$, est bornée et atteint sa borne supérieure M en au moins un point x_0, et $f(x)$ est proche de M lorsque x est proche de x_0.

Corrigés des exercices

24.1

D'abord, d'une part, f est continue sur le segment $[0\,;\,1]$, d'où l'existence de M, et, d'autre part, l'application $x \longmapsto f(x) + xf(1-x)$ est continue sur le segment $[0\,;\,1]$, d'où l'existence de l'intégrale envisagée.

On a :

$$\Big|\int_0^1 \big(f(x)+xf(1-x)\big)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_0^1 \big|f(x)+xf(1-x)\big|\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_0^1 \big(|f(x)|+x|f(1-x)|\big)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (M+xM)\,\mathrm{d}x$$
$$= M\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x = M\Big[x+\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3}{2}M.$$

24.2

Raisonnons par l'absurde : supposons :

$$\forall x \in [a\,;\,b],\quad f(x) \geqslant 0.$$

Puisque $\displaystyle\int_a^b f = 0$ et que f est continue et positive ou nulle sur $[a\,;\,b]$, on a alors $f=0$, en contradiction avec l'hypothèse d'existence de $x_1 \in [a\,;\,b]$ tel que $f(x_1) > 0$.

On conclut qu'il existe $x_2 \in [a\,;\,b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

24.3

D'abord, l'intégrale envisagée existe, car l'application $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ est continue sur $[0\,;\,2\pi]$.

On a : $\displaystyle I = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|\,\mathrm{d}x.$

Puisque l'application $x \longmapsto \Big|\cos\dfrac{x}{2}\Big|$ est 2π-périodique et paire, on a :

$$\int_0^{2\pi}\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[4\sin\frac{x}{2}\Big]_0^{\pi} = 4.$$

On conclut : $I = 4$.

24.4

On calcule, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$I(a) = \int_0^1 (x^2-ax)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^4-2ax^3+a^2x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big[\frac{x^5}{5} - 2a\frac{x^4}{4} + a^2\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}.$$

Ainsi, $I(a)$ est un trinôme en a.

Pour chercher la borne inférieure de $I(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$, on met $I(a)$ sous forme canonique (on pourrait aussi étudier les variations de la fonction $a \longmapsto I(a)$) :

$$I(a) = \frac{1}{3}\Big(a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{5}\Big)$$
$$= \frac{1}{3}\Big(\Big(a-\frac{3}{4}\Big)^2 - \frac{9}{16} + \frac{3}{5}\Big) = \frac{1}{3}\Big(a-\frac{3}{4}\Big)^2 + \frac{1}{80}.$$

Il en résulte $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{a\in\mathbb{R}}\int_0^1 (x^2-ax)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{80}$, obtenu pour $a = \dfrac{3}{4}$.

24.5

a) On a : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}.$

On reconnaît une somme de Riemann.

L'application $[0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ est continue sur $[0\,;\,1]$, donc :

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x = \big[\sqrt{1+2x}\big]_0^1 = \sqrt{3}-1.$$

b) On a : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n > 0$ et $\displaystyle\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k^2}{n^2}\Big).$

On reconnaît une somme de Riemann.

L'application $[0\,;\,1] \longmapsto \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur $[0\,;\,1]$, donc : $\displaystyle\ln u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$

Il reste à calculer cette intégrale.

Utilisons une intégration par parties, pour faire disparaître le logarithme :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \big[x\ln(1+x^2)\big]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln 2 - 2\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln 2 - 2 + 2\,[\operatorname{Arctan} x]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on conclut :

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \exp\Big(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\Big) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-2}.$$

24.6

a) Puisque, pour tout $x \in [0\,;\,1[$, $\dfrac{x^n}{1+x} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, on conjecture que la limite est 0. On a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $\displaystyle\lim_{n\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0.$

b) Puisque, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\dfrac{\sin x}{x+n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$,

on conjecture que la limite est 0.

On a : $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$

donc : $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x = 0.$

c) Puisque, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\dfrac{n\sin x}{x+n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \sin x$, on conjecture que la limite est $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{-x\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\pi}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

donc : $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$

24.7

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par utilisation d'une expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 \left(\sqrt{1+x^n}-1\right)\mathrm{d}x\right| \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Il en résulte : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x - 1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$

et donc : $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1.$

24.8

D'abord, l'intégrale envisagée existe, car l'application $x \longmapsto \ln(1+\tan x)$ est continue sur le segment $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

On a, par le changement de variable $y = \dfrac{\pi}{4} - x$, qui échange les bornes :

$$\begin{aligned}I &= \int_{\pi/4}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)(-\mathrm{d}y) \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\frac{1-\tan y}{1+\tan y}\right)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi/4} \big(\ln 2 - \ln(1+\tan y)\big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln 2\,\mathrm{d}y - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.\end{aligned}$$

Il en résulte : $2I = \dfrac{\pi}{4}\ln 2$, et finalement : $I = \dfrac{\pi \ln 2}{8}$.

24.9

Les applications $\sqrt{f}, \sqrt{g}, \sqrt{fg}$ sont continues sur $[0\,;1]$, d'après les théorèmes généraux.

On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$: $\displaystyle\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f}\sqrt{g}\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{fg}\right)^2.$

Comme $fg \geqslant 1$, on a $\sqrt{fg} \geqslant 1$, puis $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{fg} \geqslant \int_0^1 1 = 1,$ d'où le résultat voulu.

24.10

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f-f^2)^2 &= \int_0^1 (f^2 - 2f^3 + f^4) \\ &= \int_0^1 f^2 - 2\int_0^1 f^3 + \int_0^1 f^4 = 0.\end{aligned}$$

Comme $(f-f^2)^2$ est continue et $\geqslant 0$, on déduit $(f-f^2)^2 = 0$, puis $f - f^2 = 0$, c'est-à-dire $f(1-f) = 0$.

Ceci montre : $\forall x \in [0\,;1], \quad \big(f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1\big)$.

Pour montrer $f = 0$ ou $f = 1$, raisonnons par l'absurde : supposons $f \neq 0$ et $f \neq 1$.

Il existe donc $a \in [0\,;1]$ tel que $f(a) \neq 0$ et il existe $b \in [0\,;1]$ tel que $f(b) \neq 1$. On a alors $f(a) = 1$ et $f(b) = 0$. Comme f est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend, par exemple la valeur $\dfrac{1}{2}$, contradiction.

On conclut : $f = 0$ ou $f = 1$.

24.11

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (n+k)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}},$$

qui est une somme de Riemann et ressemble à u_n.

• Puisque l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $[0\,;1]$, on a, d'après l'étude des sommes de Riemann :

$$v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln 2.$$

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}u_n &\leqslant \sum_{k=0}^{n} (n+k)^{-\alpha}(n+k)^{-\beta} = \sum_{k=0}^{n} (n+k)^{-1} = v_n, \\ u_n &\geqslant \sum_{k=0}^{n} (n+k+1)^{-\alpha}(n+k+1)^{-\beta} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (n+k+1)^{-1} \underset{p=k+1}{=} \sum_{p=1}^{n+1} (n+p)^{-1} \\ &= v_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n+1} \leqslant u_n \leqslant v_n.$

Comme $v_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln 2$ et $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln 2$,
on en déduit, par le théorème d'encadrement : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

24.12

a) Puisque, pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^{-u\sin x} \underset{u \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1$,

on conjecture que la limite est $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x$.

On a, pour tout $u \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\left|\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{\pi/2} \left(\mathrm{e}^{-u\sin x} - 1\right)\mathrm{d}x\right| = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \mathrm{e}^{-u\sin x}\right)\mathrm{d}x.$$

On dispose de l'encadrement :

$$\forall t \in [0\,;\,+\infty[,\quad 0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-t} \leqslant t.$$

En effet, la première inégalité est évidente, et la deuxième résulte simplement, par exemple, de l'étude des variations de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} - 1 + t$.

D'où :

$$\left|\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} u\sin x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2} u\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}u \underset{u \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut : $\displaystyle\lim_{u \longrightarrow 0^+} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

b) Puisque $\cos x \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$, on conjecture que la limite cherchée est aussi celle de $\displaystyle\int_u^{3u} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

On a : $\displaystyle\int_u^{3u} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_u^{3u} = \ln(3u) - \ln u = \ln 3$.

On a, pour $u \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\left|\int_u^{3u} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_u^{3u} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \int_u^{3u} \frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_u^{3u} \frac{1}{x}\,2\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_u^{3u} \frac{2}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_u^{3u} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_u^{3u} = \frac{(3u)^2 - u^2}{4} = 2u^2 \underset{u \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut : $\displaystyle\int_u^{3u} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x \underset{u \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \ln 3$.

24.13

1) Soit f convenant. Considérons l'application

$$g : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto g(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque f est continue sur $[0\,;\,+\infty[$, g est de classe C^1 sur $[0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$g'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(f(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant 0,$$

donc g est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Comme $g(0) = 0$, il en résulte : $g \leqslant 0$.

Mais, d'autre part, par hypothèse, $f \geqslant 0$, donc $g \geqslant 0$.

On déduit $g = 0$, d'où : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,

puis, en dérivant : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $f(x) = 0$.

2) Réciproquement, il est clair que l'application nulle convient.

On conclut que l'ensemble cherché est $\{0\}$, où 0 est l'application nulle de $[0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

24.14

• L'application $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe.

Ainsi : Déf $(f) = \mathbb{R}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{[u=-t]}{=} -\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -f(x),$$

donc f est impaire.

• D'après le cours, puisque $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et que $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 2x$ sont de classe C^1, l'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-(2x)^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}\left(2\,\mathrm{e}^{-3x^2} - 1\right).$$

On a, pour tout $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-3x^2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 3x^2 = \ln 2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}.$$

Notons $\alpha = \sqrt{\dfrac{\ln 2}{3}} \simeq 0,481$.

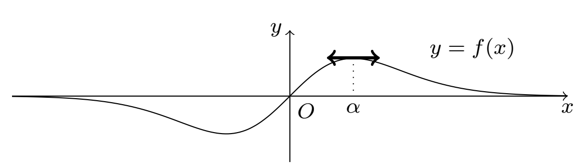
• On a, pour tout $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant (2x - x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

• Des valeurs particulières sont : $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et, en utilisant la calculatrice : $f(\alpha) \simeq 0,286$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0



24.15

On a, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, par le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$, $t = ux$:

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 f(xu)x\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f(xu)\,\mathrm{d}u.$$

D'autre part : $F(0) = f(0) = \displaystyle\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}u.$

Ainsi : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\quad F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xu)\,\mathrm{d}u.$

• On a, pour tout $(x,y) \in [0\,;\,+\infty[^2$:

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &= \Big|\int_0^1 f(xu)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 f(yu)\,\mathrm{d}u\Big| \\ &= \Big|\int_0^1 \big(f(xu) - f(yu)\big)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \int_0^1 \big|f(xu) - f(yu)\big|\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^1 k|xu - yu|\,\mathrm{d}u = k|x-y|\int_0^1 u\,\mathrm{d}u \\ &= k|x-y|\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{k}{2}|x-y|,\end{aligned}$$

ce qui montre que F est $\dfrac{k}{2}$-lipschitzienne.

24.16

Notons $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. On a, par les changements de variable $u = \operatorname{Arcsin} x$ et $v = \operatorname{Arccos} x$:

$$I = \int_0^{\pi/2} f(\sin u)\cos u\,\mathrm{d}u,$$

$$I = \int_{\pi/2}^0 f(\cos v)(-\sin v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{\pi/2} f(\cos v)\sin v\,\mathrm{d}v,$$

d'où, en additionnant et en utilisant l'hypothèse :

$$\begin{aligned}2I &= \int_0^{\pi/2}\big(f(\sin u)\cos u + f(\cos u)\sin u\big)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

On conclut : $I \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

24.17

a) • Le changement de variable $y = \pi - x$ montre :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

d'où : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x.$

• Montrons : $\forall x \in \Big[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\Big],\quad \sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi}.$

L'application $\varphi : x \longmapsto \sin x - \dfrac{2x}{\pi}$ est de classe C^1 sur $\Big[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\Big]$, et, pour tout $x \in \Big[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\Big]$:

$$\varphi'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi},\qquad \varphi''(x) = -\sin x.$$

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi''(x)$	0	$-$		$-$	-1
$\varphi'(x)$	>0	$\searrow$	0	$\searrow$	<0
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Comme $\varphi'(0) = 1 - \dfrac{2}{\pi} > 0$ et $\varphi'\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = -\dfrac{2}{\pi} < 0$,

il existe $\alpha \in \Big]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\Big[$ unique tel que φ' change de signe en α, d'où les variations de φ.

Comme $\varphi(0) = \varphi\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0$, on conclut $\varphi \geqslant 0$, ce qui montre l'inégalité proposée.

• On a alors, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\frac{2ux}{\pi}}\,\mathrm{d}x = 2\Big[-\frac{\pi}{2u}\,\mathrm{e}^{-\frac{2ux}{\pi}}\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{u}(1 - \mathrm{e}^{-u}) \leqslant \frac{\pi}{u}.\end{aligned}$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x \underset{u \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$

b) On a, pour tout $u \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned}0 \leqslant \mathrm{e}^{-u^2}\int_0^u \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t &\leqslant \mathrm{e}^{-u^2}\int_0^u \mathrm{e}^{tu}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-u^2}\Big[\frac{\mathrm{e}^{tu}}{u}\Big]_0^u \\ &= \mathrm{e}^{-u^2}\,\frac{\mathrm{e}^{u^2} - 1}{u} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-u^2}}{u} \leqslant \frac{1}{u},\end{aligned}$$

d'où : $\qquad \mathrm{e}^{-u^2}\displaystyle\int_0^u \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{u \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$

24.18

Considérons l'application :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $F' = f$.

On a : $\quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\quad f(t+x) = f(t) + f(x),$

d'où, en intégrant entre 0 et y :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad \int_0^y f(t+x)\,\mathrm{d}t = \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t + yf(x).$$

Mais, par le changement de variable $u = t + x$, pour x fixé :

$$\int_0^y f(t+x)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+y} f(u)\,\mathrm{d}u = F(x+y) - F(x).$$

On obtient ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad F(x+y) = F(x) + F(y) + yf(x).$$

En échangeant x et y, on a aussi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad F(x+y) = F(y) + F(x) + xf(y),$$

d'où : $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad yf(x) = xf(y).$

En particulier, on conclut, en remplaçant y par 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = xf(1).$$

24.19

Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On a, par le changement de variable $t = \sqrt{x},\ x = t^2,\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t^2)2t\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, on remarque : $\dfrac{1}{3} = \Big[\dfrac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. D'où :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} + \int_0^1 \big(f(x^2)\big)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \big(f(x^2)\big)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 2xf(x^2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^1 \big(x - f(x^2)\big)^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $x \longmapsto \big(x - f(x^2)\big)^2$ est continue et positive sur $[0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_0^1 \big(f(x^2)\big)^2\,\mathrm{d}x \\
\iff\quad & \int_0^1 \big(x - f(x^2)\big)^2\,\mathrm{d}x = 0 \\
\iff\quad & \forall x \in [0\,;\,1],\quad x - f(x^2) = 0 \\
\iff\quad & \forall x \in [0\,;\,1],\quad f(x^2) = x \\
\iff\quad & \forall t \in [0\,;\,1],\quad f(t) = \sqrt{t}.
\end{aligned}$$

On conclut qu'il existe une application f et une seule convenant : $\quad f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \sqrt{x}$.

24.20

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

On a, en dérivant et en prenant la valeur en 0 :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R},\quad \big(f(x)\big)^2 = \int_0^x \Big(\big(f(t)\big)^2 + \big(f'(t)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}t - x + 1 \\
\iff\quad & \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x)f'(x) = \big(f(x)\big)^2 + \big(f'(x)\big)^2 - 1 \\ \big(f(0)\big)^2 = 1 \end{cases} \\
\iff\quad & \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\quad \big(f'(x) - f(x)\big)^2 = 1 \\ \big(f(0)\big)^2 = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque l'application $f' - f$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires :

$$(f' - f)^2 = 1 \iff \big(f' - f = -1 \quad \text{ou} \quad f' - f = 1\big).$$

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

On résout l'équation différentielle (E) $y' - y = \varepsilon$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

La solution générale de l'équation différentielle linéaire sans second membre associée $y' - y = 0$ est $y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\,x},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de (E) est $y = -\varepsilon$.

La solution générale de (E) est donc :

$$y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\,x} - \varepsilon,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\big(f(0)\big)^2 = 1 \iff (\lambda - \varepsilon)^2 = 1 \iff \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + \varepsilon^2 = 1 \\
\iff \lambda(\lambda - 2\varepsilon) = 0 \iff \lambda = 0 \ \text{ ou } \ \lambda = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

On conclut qu'il y a exactement quatre applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convenant, correspondant à $\varepsilon = -1$ ou 1, et à $\lambda = 0$ ou 2ε :

$$x \longmapsto -1,\quad x \longmapsto 1,\quad x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{\,x} - 1,\quad x \longmapsto -2\,\mathrm{e}^{\,x} + 1.$$

24.21

Considérons $\varphi : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a\,;\,b],\quad \varphi(x) = \Big(\int_a^x f\Big)^2 - \int_a^x f^3.$$

L'application φ est de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$ et :

$$\forall x \in [a\,;\,b],\quad \varphi'(x) = 2\Big(\int_a^x f\Big)f(x) - \big(f(x)\big)^3 = f(x)\psi(x),$$

où on a noté

$$\psi : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \psi(x) = 2\int_a^x f - \big(f(x)\big)^2.$$

L'application ψ est de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$ et :

$$\forall x \in [a\,;\,b],\quad \psi'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)\underbrace{\big(1 - f'(x)\big)}_{\geqslant 0}.$$

Puisque $f' \geqslant 0$, f est croissante ; comme de plus $f(a) = 0$, on a $f \geqslant 0$, puis $\psi' \geqslant 0$, donc ψ est croissante. Comme $\psi(a) = 0$, on déduit $\psi \geqslant 0$, $\varphi' \geqslant 0$, φ est croissante.

Enfin, comme $\varphi(a) = 0$, on conclut $\varphi \geqslant 0$. En particulier, $\varphi(b) \geqslant 0$, ce qui est l'inégalité voulue.

24.22

a) On a, pour tout $x \in [a\,;\,b]$:

$$\begin{aligned}
|f(x)| = \Big|f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big| = \Big|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\
\leqslant \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t = F(x).
\end{aligned}$$

b) On déduit :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_a^b |f(x)|\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b F(x)|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)F'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{1}{2}\big(F(x)\big)^2\Big]_a^b = \frac{1}{2}\Big(\big(F(b)\big)^2 - \big(F(a)\big)^2\Big) = \frac{1}{2}\big(F(b)\big)^2.
\end{aligned}$$

Enfin, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à 1 et $|f'|$:

$$\begin{aligned}
\big(F(b)\big)^2 &= \Big(\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big)^2 = \Big(\int_a^b 1 \cdot |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big)^2 \\
&\leqslant \Big(\int_a^b 1^2\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big) = (b-a)\int_a^b \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu :

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

24.23

a) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$.

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[x-a\,;\,x]$ et sur $[x\,;\,x+a]$:

$$\begin{cases} \left|f(x-a)-f(x)+af'(x)\right| \leqslant \dfrac{a^2}{2}M_2 \\[2ex] \left|f(x+a)-f(x)-af'(x)\right| \leqslant \dfrac{a^2}{2}M_2. \end{cases}$$

D'où, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &\left|f(x+a)-f(x-a)-2af'(x)\right| \\ &= \Big|\big(f(x+a)-f(x)-af'(x)\big)-\big(f(x-a)-f(x)+af'(x)\big)\Big| \\ &\leqslant \left|f(x+a)-f(x)-af'(x)\right|+\left|f(x-a)-f(x)+af'(x)\right| \leqslant a^2M_2, \end{aligned}$$

puis, encore par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &2a|f'(x)| \\ &= \Big|\big(f(x+a)-f(x-a)\big)-\big(f(x+a)-f(x-a)-2af'(x)\big)\Big| \\ &\leqslant \left|f(x+a)-f(x-a)\right|+a^2M_2 \leqslant 2M_0+a^2M_2 \end{aligned}$$

et donc : $\quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{a}+\dfrac{1}{2}M_2a.$

b) L'application

$$\varphi :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad a \longmapsto \varphi(a)=\frac{M_0}{a}+\frac{1}{2}M_2a$$

est de classe C^1 et, pour tout $a \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= -\frac{M_0}{a^2}+\frac{1}{2}M_2 \\ &= \frac{M_2}{2a^2}\left(a-\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\right)\left(a+\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\right) \end{aligned}$$

d'où le tableau des variations de φ :

a	0		$\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$		$+\infty$
$\varphi'(a)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(a)$		$\searrow$	$\sqrt{2M_0M_2}$	$\nearrow$	

On déduit : $\quad \displaystyle\operatorname*{Inf}_{a\in]0\,;\,+\infty[}\varphi(a)=\varphi\Big(\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\Big)=\sqrt{2M_0M_2}$

et donc, d'après *a)* : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad |f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$

Ainsi, f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et : $\ M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

24.24

D'abord, puisque f est continue sur le segment $[a\,;\,b]$, d'après un théorème du cours, f est bornée. Notons $M=\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[a\,;\,b]}f(x)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n=\left(\int_a^b\big(f(x)\big)^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}.$$

• On a : $\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n \leqslant \left(\displaystyle\int_a^b M^n\right)^{\frac{1}{n}}=M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$

• Soit $\varepsilon>0$ fixé.

Puisque f est continue sur le segment $[a\,;\,b]$, d'après un théorème du cours, f atteint sa borne supérieure M. Il existe donc $x_0 \in [a\,;\,b]$ tel que $f(x_0)=M$. Puis, comme f est continue en x_0, il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0-\eta\,;\,x_0+\eta]\cap[a\,;\,b],\quad f(x) \geqslant M-\frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant S le segment $[x_0-\eta\,;\,x_0+\eta]\cap[a\,;\,b]$ et λ la longueur de S (donc $\lambda>0$), on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \geqslant \left(\int_S\big(f(x)\big)^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\int_S\Big(M-\frac{\varepsilon}{2}\Big)^n\right)^{\frac{1}{n}}=\Big(M-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\lambda^{\frac{1}{n}}.$$

• Comme $M(b-a)^{\frac{1}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} M$ et $\Big(M-\dfrac{\varepsilon}{2}\Big)\lambda^{\frac{1}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} M-\dfrac{\varepsilon}{2}$,

il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\ \forall n \geqslant N,\quad \begin{cases} M(b-a)^{\frac{1}{n}} \leqslant M+\varepsilon \\[1ex] \Big(M-\dfrac{\varepsilon}{2}\Big)\lambda^{\frac{1}{n}} \geqslant M-\varepsilon. \end{cases}$

On a alors : $\ \forall n \geqslant N,\quad M-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant M,$

et on conclut : $\ u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} M.$

Vrai ou Faux ?

24.1 Si $a \leqslant b$ et si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,;b]$, alors : V F

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a) \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|.$$

24.2 Si $a \leqslant b$ et si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,;b]$, alors la dérivée de la fonction $F : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la fonction $x \longmapsto f(x) - f(a)$. V F

24.3 Si $a \leqslant b$ et si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $[a\,;b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. V F

24.4 Si $a \leqslant b$ et si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $[a\,;b]$, alors : V F

$$\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t = |f(b)| - |f(a)|.$$

24.5 Si $a \leqslant b$ et si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors : V F

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

24.6 Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I, alors, pour tous $a, x \in I$: V F

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

24.7 La dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est la fonction : V F

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \mathrm{e}^{x^4} - \mathrm{e}^{x^2}.$$

24.8 La dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$ est la fonction : V F

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

24.9 On a, par le changement de variable $t = \sin x$: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+t^3}\,\mathrm{d}t.$ V F

24.10 On a, par le changement de variable $t = \sin x$: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{t}{2+t^3}\,\mathrm{d}t.$ V F

Vrai ou Faux, les réponses

24.1 Il s'agit de deux résultats du cours. **V**

24.2 La dérivée de F est f, sans le $-f(a)$. **F**

24.3 C'est un résultat du cours. **V**

24.4 Contrexemple : $a=-1,\ b=1,\ f : t \longmapsto t^2$, où on a : **F**

$$\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} |2t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

et

$$|f(b)| - |f(a)| = 1^2 - (-1)^2 = 0 \neq 1.$$

24.5 C'est un résultat du cours, le théorème sur les sommes de Riemann. **V**

24.6 C'est un résultat du cours, la formule de Taylor avec reste intégral. **V**

24.7 Il y a eu oubli de la dérivation de la fonction en borne, x^2. **F**

Le résultat correct est : $f' : x \longmapsto \mathrm{e}^{(x^2)^2}2x - (\mathrm{e}^{x^2})1 = 2x\,\mathrm{e}^{x^4} - \mathrm{e}^{x^2}$.

24.8 C'est l'application d'un résultat du cours : si $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur I, si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur J et si $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$, alors l'application $G : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I et : **V**

$$\forall x \in I,\quad G'(x) = f\big(v(x)\big)v'(x) - f\big(u(x)\big)u'(x).$$

24.9 Il y a eu oubli de changer les bornes. **F**

La formule correcte est : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2+t^3}\,\mathrm{d}t.$

24.10 Il y a eu remplacement de $\mathrm{d}x$ par $\mathrm{d}t$, alors que $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. **F**

Le changement de variable $t = \sin x$ ne permet pas de calculer l'intégrale proposée.

Chapitre 25

Séries

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Détermination de la nature d'une série à termes $\geqslant 0$
- Détermination de la nature d'une série à termes de signes quelconques
- Nature d'une suite par intervention d'une série
- Calcul de la somme d'une série convergente, quand c'est possible.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions, propriétés générales relatives aux opérations et à l'ordre, pour la convergence et la divergence des séries
- Le lien suite/série
- Le lemme fondamental pour les séries à termes $\geqslant 0$
- Pour les séries à termes $\geqslant 0$, l'exemple de Riemann, le théorème de majoration, le théorème de minoration, le théorème d'équivalence, la comparaison à l'exemple de Riemann par la formation de $n^\alpha u_n$
- La comparaison série/intégrale
- La définition de l'absolue convergence et son lien avec la convergence.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour étudier la nature d'une série $\sum_n u_n$ à termes $\geqslant 0$, sur un exemple

Essayer de :

- Majorer u_n par le terme général d'une série convergente, lorsqu'on conjecture que la série de terme général u_n converge
- Minorer u_n par le terme général d'une série divergente, lorsqu'on conjecture que la série de terme général u_n diverge
- Trouver un équivalent simple de u_n, puis appliquer le théorème d'équivalence

  Pour obtenir un équivalent simple de u_n, il pourra être nécessaire d'effectuer, de façon intermédiaire, des développements limités
- Lorsque u_n n'admet pas d'équivalent simple, former $n^\alpha u_n$, pour $\alpha > 0$ fixé, déterminer la limite de $n^\alpha u_n$ lorsque l'entier n tend vers l'infini, et en déduire une comparaison de u_n avec $\dfrac{1}{n^\alpha}$, qui permettra éventuellement de conclure
- Mélanger l'utilisation d'équivalents et de majorants, ou d'équivalents et de minorants
- Utiliser une comparaison série/intégrale.

➟ **Exercices 25.1, 25.2, 25.6 à 25.11**

➟ **Exercices 25.14, 25.15, 25.19, 25.20**

Exemple

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$a_n = \frac{\sin^2 n}{n^2},$$
$$b_n = \frac{2n}{n^3+1},$$
$$c_n = \ln(n^2+2) - 2\ln n,$$
$$d_n = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n^2},$$
$$e_n = n^3\, \mathrm{e}^{-n}.$$

Il s'agit de séries à termes $\geqslant 0$.

• On a : $\quad \forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}.$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général a_n converge.

• On a : $\quad b_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{2n}{n^3} = \dfrac{2}{n^2} \geqslant 0.$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général b_n converge.

• On a : $\quad c_n = \ln \dfrac{n^2+2}{n^2} = \ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2} \geqslant 0.$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général c_n converge.

• On a : $d_n = \left(\dfrac{2}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\right) - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2}{n} \geqslant 0.$

Comme la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général d_n diverge.

• On a : $n^2\, e_n = n^5\ \mathrm{e}^{-n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, à partir d'un certain rang : $0 \leqslant n^2 e_n \leqslant 1$, c'est-à-dire : $0 \leqslant e_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général e_n converge.

Méthode

Pour déduire la convergence d'une série $\sum_n u_n$ à termes $\geqslant 0$ à partir de la convergence d'une série $\sum_n v_n$ à termes $\geqslant 0$

Dans un cadre théorique, essayer de :

- comparer, par inégalité, par équivalence, u_n à v_n
- comparer, par inégalité, les sommes partielles de la série $\sum_n u_n$ aux sommes partielles de la série $\sum_n v_n$.

➟ **Exercices 25.2, 25.20**

Exemple

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$, convergente.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, on a $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N,\ \ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
On a donc : $\forall n \geqslant N,\ \ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$.
Puisque la série $\sum_n u_n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Méthode

Pour montrer qu'une série $\sum_n u_n$ diverge

En plus des méthodes évoquées plus haut, essayer de :

- montrer que la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, c'est-à-dire que la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement
- montrer, s'il s'agit d'une série à termes $\geqslant 0$, que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$.

➟ **Exercice 25.16**

Exemple

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n^2}}$$

diverge.

On a : $\forall n \geqslant 1,\ \ \mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) \geqslant 1$, d'où : $\forall n \geqslant 1,\ \ u_n \geqslant 1$,
donc u_n de tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
On conclut que la série de terme général u_n diverge.

Exemple

Montrer la divergence de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} u_n = \sum_{p=1}^{N} u_{2p} + \sum_{p=0}^{N} u_{2p+1} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}.$$

Puisque la série $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p}$ est à termes $\geqslant 0$ et diverge, on a :

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} \underset{N\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc, par théorème de minoration :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} u_n \underset{N\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il en résulte que la suite des sommes partielles de la série proposée diverge, et on conclut que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge.

Méthode

Pour étudier la nature d'une suite $(a_n)_n$

On peut, surtout si a_n apparaît comme une sommation, étudier la nature de la série $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$, puis appliquer le lien suite/série

➟ **Exercice 25.11**

Exemple

Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1).$$

Notons, pour tout $\in \mathbb{N}^*$: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-1} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \Big(\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$), la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Par théorème de comparaison pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n \geqslant 1} |a_{n+1} - a_n|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geqslant 1} (a_{n+1} - a_n)$ converge absolument, donc converge.

D'après le lien suite-série, on conclut que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

En notant $\gamma = \lim_{n\infty} a_n$, on a donc : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1)$.

Méthode

Pour étudier la nature d'une série $\sum_n u_n$ à termes de signes quelconques, sur un exemple

Essayer de voir si la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente.

➟ **Exercices 25.10, 25.11**

Exemple

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n n}{n^3 - n + 1}.$$

On a : $\quad |u_n| = \dfrac{n}{n^3 - n + 1} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0.$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n, \geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Méthode

Pour montrer la convergence et calculer la somme d'une série

Essayer de :

- montrer d'abord la convergence par des arguments qualitatifs (utilisation d'une majoration, d'un équivalent, règle $n^\alpha u_n$, ... , en travaillant éventuellement sur $|u_n|$), puis calculer les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$, et enfin chercher la limite de celles-ci lorsque l'entier n tend vers l'infini
- ou bien former directement les sommes partielles et déterminer leur limite

Pour calculer les sommes partielles, il faudra souvent amener un télescopage, et, à cet effet, si u_n est une fraction rationnelle en n, amener une décomposition de u_n en somme de fractions plus simples

➟ **Exercices 25.3 à 25.5, 25.12, 25.13, 25.17, 25.18**

Exemple

Existence et calcul de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

On remarque (par décomposition en éléments simples) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

d'où, par télescopage, pour $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \underset{N\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On conclut que S existe et est égal à 1.

Énoncés des exercices

25.1 Exemples de détermination de la nature d'une série à termes $\geqslant 0$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\dfrac{|\cos n|}{n^2}$

b) $\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}-\sqrt{n}$

c) $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n}\right)^n$

d) $\ln\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}$

e) $\dfrac{1}{n^2\ln n}$

f) $\dfrac{\ln n}{n}$

g) $\dfrac{n!}{n^n}$

h) $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)-\dfrac{1}{n}$.

25.2 Nature de séries déduites d'autres séries

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, convergente. Déterminer la nature des séries de termes généraux : $u_n=\dfrac{a_n}{1+a_n}$, $\quad v_n=\mathrm{e}^{\,a_n}-1$, $\quad w_n=\dfrac{1-\cos a_n}{a_n}$, $\quad x_n=a_n^2$.

25.3 Calcul de la somme d'une série par télescopage

On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

a) Montrer : $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

25.4 Calcul de la somme d'une série par télescopage

a) Montrer : $\quad \forall a\in\,]1\,;+\infty[,\quad \dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{2}{a^2-1}$.

b) Existence et calcul, pour $x\in\,]1\,;+\infty[$ fixé, de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{x^{2^n}+1}$.

25.5 Calcul de la somme d'une série associée à la suite de Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\phi_0=0,\ \phi_1=1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \phi_{n+2}=\phi_{n+1}+\phi_n.$$

a) Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, ϕ_n en fonction de n.

b) Existence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\phi_n}{2^n}$.

25.6 Étude de séries associées à une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$.

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$. u_n en fonction de n.

b) En déduire, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$ fixé, la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^\alpha}$.

25.7 Nature de séries associées à des sommes de factorielles

a) Montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\infty}{\sim} n!$.

b) En déduire la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} k!, \qquad v_n = \frac{1}{(n+2)!}\sum_{k=0}^{n} k!.$$

25.8 Étude de nature de séries dont le terme général est défini par une intégrale

Nature des séries de termes généraux : $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x, \quad v_n = \int_0^1 \frac{x^{n^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

25.9 Nature d'une série à partir d'une autre série

Soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, convergente.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - \dfrac{\sin\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}}$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$?

25.10 Exemple de produit infini, convergence

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2 + a}{k^2 + b}$.

Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est > 0.

25.11 Nature d'une suite par l'étude d'une série

Soit $a \in]1\,;+\infty[$ fixé. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a+k}\right) - \ln n$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

25.12 Calcul de la somme d'une série par télescopage

a) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ unique, que l'on calculera, tel que :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[, \quad \frac{x-1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{n-1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ converge et calculer sa somme.

25.13 Exemple de calcul de la somme d'une série convergente

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

a) Montrer que $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et que : $\phi_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Établir : $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\phi_{n-1}\phi_{n+2}}{\phi_n^2\phi_{n+1}^2} = \frac{1}{\phi_n^2} - \frac{1}{\phi_{n+1}^2}.$$

c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\phi_{n-1}\phi_{n+2}}{\phi_n^2\phi_{n+1}^2}$ converge et calculer sa somme.

25.14 Exemple de détermination de nature de séries à termes $\geqslant 0$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

b) $\dfrac{\ln n}{n^2}$

c) $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$

d) $\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2} - 1$

e) $\dfrac{1}{n \ln n}$

f) $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

25.15 Nature d'une série à partir d'autres séries

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+$, telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 u_n^2$ converge.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

25.16 Exemple de détermination de la nature d'une série avec paramètre

Déterminer, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln(n^2 + n + 1) + a\ln(n^2 + 2n + 4) + b\ln(n^2 + 3n + 10).$$

25.17 Convergence et somme d'une série définie à partir d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 5$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 8$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Montrer : $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^n}{u_n - 3} = \frac{(-1)^n}{u_n - 2} - \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} - 2}.$$

c) Déterminer la nature et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{u_n - 3}$.

25.18 Calcul de la somme de la série harmonique alternée, par utilisation d'intégrales

a) Montrer : $$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^N x^N}{1 + x}\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

25.19 **Étude des séries convergentes dont le terme général décroît**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, décroissante, telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

a) Montrer : $nu_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) En déduire la nature des séries de termes généraux : $v_n = nu_n^2, \quad w_n = u_n(1+u_n)^n$.

25.20 **Groupement de deux termes consécutifs**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers 0. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $v_n = u_n + u_{n+1}$ sont de même nature.

25.21 **Convergence par la règle de d'Alembert**

a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$.

On suppose qu'il existe $\ell \in [0\,;1[$ tel que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b) Nature des séries de termes généraux : $u_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}, \quad v_n = \dbinom{4n}{2n}^{-1}$.

25.22 **Théorème spécial à certaines séries alternées, exemple**

a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = (-1)^n |u_n|, \qquad u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad (|u_n|)_{n\geqslant 0} \text{ décroît.}$$

1) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\geqslant 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ sont adjacentes.

2) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Du mal à démarrer ?

25.1 Il s'agit de séries à termes positifs ou nuls.

a) Majorer.

b) *1re méthode :* Utiliser une expression conjuguée, puis un équivalent.

2è méthode : Utiliser un développement limité pour obtenir un équivalent de u_n.

c) Majorer.

d) Obtenir un équivalent.

e) Majorer.

f) Minorer.

g) Majorer en isolant les facteurs $1, 2$ de $n!$.

h) Utiliser un développement limité pour obtenir un équivalent de u_n.

25.2 Remarquer d'abord : $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

• Pour u_n, v_n, w_n, obtenir un équivalent.

• Pour x_n, majorer en utilisant : $\forall x \in [0\,;\,1],\quad 0 \leqslant x^2 \leqslant x$.

25.3 *a)* Partir de $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, réduire au même dénominateur et utiliser une expression conjuguée.

b) Former les sommes partielles et faire apparaître un télescopage.

25.4 *a)* Immédiat.

b) Appliquer *a)* avec x^{2^n} à la place de a, former les sommes partielles et faire apparaître un télescopage.

25.5 *a)* Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à coefficients constants et sans second membre. Appliquer le cours : former l'équation caractéristique, écrire l'expression de ϕ_n à l'aide de deux coefficients inconnus et calculer ces deux coefficients à l'aide de ϕ_0 et ϕ_1.

Pour la commodité, noter :

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) • Montrer que la série proposée converge, en utilisant un équivalent.

• Pour calculer la somme, se ramener à des séries géométriques.

25.6 *a)* Élever au carré et faire apparaître une suite arithmétique.

b) Déduire un équivalent de u_n, puis un équivalent de $\dfrac{1}{u_n^\alpha}$.

25.7 *a)* Dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$, isoler les termes $n!$ et $(n-1)!$.

b) Déduire de *a)* un équivalent de u_n, un équivalent de v_n.

25.8 • Pour u_n, minorer. • Pour v_n, majorer.

25.9 Remarquer $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. Utiliser un développement limité pour obtenir un équivalent de u_n.

25.10 Considérer $\ln P_n$ et se ramener à la nature d'une série. Utiliser des développements limités.

25.11 Utiliser le lien suite/série : la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

25.12 *a)* Réduire au même dénominateur et identifier.

b) Former les sommes partielles et faire apparaître un télescopage.

25.13 *a)* • Montrer, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_n \geqslant 0$ et déduire que $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

• Raisonner par l'absurde pour déduire $\phi_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Immédiat.

c) Utiliser *b)*, former les sommes partielles et faire apparaître un télescopage.

25.14 Il s'agit de séries à termes $\geqslant 0$.

a) Former $n^2 u_n$.

b) Former $n^{3/2} u_n$.

c) Utiliser un équivalent et le résultat de *b)*.

d) Utiliser un développement limité pour obtenir un équivalent de u_n.

Attention : on ne peut pas développer $\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2}$ comme $(1+x)^\alpha$, car l'exposant n^2 dépend de n ; mettre sous forme exponentielle/logarithme.

e) Utiliser une comparaison série/intégrale, à l'aide de la fonction :

$$f : [2\,;\,+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{1}{x \ln x}.$$

f) Utiliser une comparaison série/intégrale, à l'aide de la fonction :

$$f : [2\,;\,+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

25.15 Utiliser : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\quad ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

25.16 Utiliser des développements limités.

25.17 *a)* Montrer, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 5$.

Ayant montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour obtenir $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, raisonner par l'absurde.

b) Remarquer :

$$u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 5u_n + 6 = (u_n - 2)(u_n - 3).$$

c) Faire apparaître un télescopage dans le calcul des sommes partielles de la série, en utilisant *b)*.

25.18 *a)* Partir du second membre, faire apparaître une somme partielle de série géométrique et permuter intégrale et sommation d'un nombre fini de fonctions.

b) Montrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,\mathrm{d}x \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$.

25.19 *a)* Considérer, pour $n \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

b) • Pour v_n, majorer.

• Pour w_n, montrer $(1+u_n)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, puis utiliser un équivalent.

25.20 Noter, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

1) Supposer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n à l'aide de U_n, U_{n+1}, u_0.

2) Supposer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n à l'aide de V_n, u_{n+1}, u_0.

25.21 *a)* Noter $\lambda = \dfrac{\ell+1}{2}$, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \lambda$,

puis faire intervenir une série géométrique.

b) Utiliser *a)*.

25.22 *a) 1)* Revenir à la définition de deux suites adjacentes.

2) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

b) Appliquer *a)*.

c) Former un développement de v_n.

Corrigés des exercices

25.1

Il s'agit de séries à termes positifs ou nuls.

a) On a : $\quad \forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n = \dfrac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut :

$$\text{la série } \sum_n u_n \text{ converge.}$$

b) 1re méthode : utilisation d'une expression conjuguée :

$$\text{On a : } u_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{n}} \geqslant 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($1/2 \leqslant 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut :

$$\text{la série } \sum_n u_n \text{ diverge.}$$

2è méthode : utilisation d'un développement limité :

On a :

$$\begin{aligned} u_n = \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1/2} - 1\right] &= \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{n}} \geqslant 0, \end{aligned}$$

et on termine comme ci-dessus.

c) On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant u_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Puisque $\left|\dfrac{5}{6}\right| < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_n \left(\frac{5}{6}\right)^n$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut : la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge.

d) On a : $\qquad \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1,$

donc : $u_n = \ln \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1} - 1$

$$= \frac{1}{n^2+3n+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geqslant 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut :

la série $\sum_n u_n$ converge.

e) On a : $\forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut :

la série $\sum_n u_n$ converge.

f) On a : $\forall n \geqslant 3,\ u_n = \dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$.

D'après l'exemple de Riemann, la série $\sum_n \dfrac{1}{n}$ diverge.

Par théorème de minoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut : la série $\sum_n u_n$ diverge.

g) On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant u_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \leqslant \frac{1\cdot 2}{n\cdot n} = \frac{2}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut :

la série $\sum_n u_n$ converge.

h) On a, par développement limité :

$$u_n = \ln\Big(1+\frac{2}{n}\Big) - \frac{1}{n} = \Big[\frac{2}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n} \geqslant 0.$$

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut :

la série $\sum_n u_n$ diverge.

25.2

Remarquons d'abord que, puisque la série $\sum_n a_n$ converge, on a : $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

- $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n} \underset{n\infty}{\sim} a_n$, donc, d'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n u_n$ converge.
- $v_n = \mathrm{e}^{a_n} - 1 \underset{n\infty}{\sim} a_n \geqslant 0$, donc, d'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n v_n$ converge.
- $w_n = \dfrac{1-\cos a_n}{a_n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}a_n^2}{a_n} = \dfrac{1}{2}a_n \geqslant 0$, donc, d'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n w_n$ converge.
- Puisque $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N,\quad a_n \leqslant 1.$$

On a alors : $\forall n \geqslant N,\quad 0 \leqslant a_n^2 \leqslant a_n$.

Comme la série $\sum_n a_n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n x_n$ converge.

25.3

a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant une expression conjuguée :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\big(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\big)}$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{n+1}+\sqrt{n}(n+1)} = u_n.$$

b) Nous allons former les sommes partielles et utiliser un télescopage. On a, pour tout $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big) = \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{N+1}} \underset{N\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On conclut : la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

25.4

a) On a, pour tout $a \in]1\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-1} = \frac{(a+1)-2}{a^2-1} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}.$$

b) Soit $x \in]1\,;+\infty[$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en appliquant *a)* à $a = x^{2^n}$:

$$\frac{1}{x^{2^n}+1} = \frac{1}{x^{2^n}-1} - \frac{2}{x^{2^{n+1}}-1}.$$

On en déduit, pour tout $N \in \mathbb{N}$, par sommation et télescopage :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{x^{2^n}+1} = \sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{2^n}{x^{2^n}-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}\Big)$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{2^{N+1}}{x^{2^{N+1}}-1} \underset{N\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x-1},$$

par prépondérance classique, puisque $x > 1$.

On conclut que la série envisagée converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{x^{2^n}+1} = \frac{1}{x-1}.$$

25.5

a) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, qui sont $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'après le cours, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$.

On a :

$$\begin{cases}\phi_0 = 0\\ \phi_1 = 1\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu = 0\\ \lambda\alpha+\mu\beta = 1\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\lambda = \dfrac{1}{\alpha-\beta} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \mu = \dfrac{1}{\beta-\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

On conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

b) • *Convergence de la série :*

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec les notations précédentes :

$$0 \leqslant \frac{\phi_n}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{\beta}{2}\Big)^n - \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^n\Big] \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{\beta}{2}\Big)^n,$$

car $0 \leqslant \left|\dfrac{\alpha}{2}\right| < \dfrac{\beta}{2}$.

Puisque $0 \leqslant \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_n \Big(\frac{\beta}{2}\Big)^n$ converge, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_n \frac{\phi_n}{2^n}$ converge.

• *Calcul de la somme :*

On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\phi_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{\beta}{2}\Big)^n - \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^n\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{\beta}{2}\Big)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^n\Big]$$

car ces deux séries sont convergentes

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\frac{1}{1-\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}\Big] = \frac{2}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{2-\beta} - \frac{1}{2-\alpha}\Big)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\beta-\alpha}{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5}}{4-2+(-1)} = 2.$$

On conclut : $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\phi_n}{2^n} = 2.$$

25.6

a) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2$,

donc $(u_n^2)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison 2.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = u_0^2 + 2n = 1 + 2n$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$,

on déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2n+1}$.

b) Soit $\alpha \in]0\,;+\infty[$ fixé. On a :

$$\frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{1}{(2n+1)^{\alpha/2}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^{\alpha/2}}\,\frac{1}{n^{\alpha/2}} \geqslant 0.$$

D'après l'exemple de Riemann, la série $\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge si et seulement si $\alpha/2 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 2$. Par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut : la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

25.7

a) a) On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} k!\Big) - n! = \sum_{k=0}^{n-1} k! = \Big(\sum_{k=0}^{n-2} k!\Big) + (n-1)!$$
$$\leqslant (n-1)(n-2)! + (n-1)! = 2\cdot(n-1)!\,,$$

donc : $$0 \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} - 1 \leqslant \frac{2\cdot(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n},$$

d'où : $$\frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$$

et on conclut : $$\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\infty}{\sim} n!\,.$$

b) • On a :

$$u_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n} \geqslant 0.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général u_n diverge.

• On a :

$$v_n = \frac{1}{(n+2)!}\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+2)!}$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geqslant 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général v_n converge.

25.8

Il s'agit de séries à termes $\geqslant 0$.

• On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{x^n}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$$

et : $$\frac{1}{2(n+1)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

D'après l'exemple de Riemann, le théorème d'équivalence et le théorème de minoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général u_n diverge.

• On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^{n^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^{n^2+1}}{n^2+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général v_n converge.

25.9

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, on a : $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où : $\sqrt{a_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc, par développement limité usuel en 0 : $\sin\sqrt{a_n} = \sqrt{a_n} - \frac{1}{6}\sqrt{a_n}^3 + o(\sqrt{a_n}^3)$,

puis :

$$u_n = 1 - \frac{\sin\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} = 1 - \Big(1 - \frac{1}{6}a_n + o(a_n)\Big)$$

$$= \frac{1}{6}a_n + o(a_n) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{6}a_n \geqslant 0.$$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

25.10

D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n existe et $P_n > 0$.

On a : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k^2+a}{k^2+b}.$

Par développements limités usuels, lorsque l'entier k tend vers l'infini :

$$\ln\frac{k^2+a}{k^2+b} = \ln\Big(1+\frac{a}{k^2}\Big) - \ln\Big(1+\frac{b}{k^2}\Big)$$

$$= \Big[\frac{a}{k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big] - \Big[\frac{b}{k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big] = \frac{a-b}{k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big).$$

D'après l'exemple de Riemann $(2 > 1)$ la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{a-b}{k^2}$ converge.

D'après l'exemple de Riemann et le théorème de comparaison en o, la série $\sum_{k\geqslant 1} o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$ converge absolument, donc converge.

On conclut, par addition, que la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln\frac{k^2+a}{k^2+b}$ converge.

Notons $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\frac{k^2+a}{k^2+b} \in \mathbb{R}$. Ainsi : $\ln P_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} S$.

Par continuité de l'exponentielle en S, on conclut :

$$P_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{S} > 0.$$

25.11

Nous allons utiliser le lien suite/série.

On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n$$

$$= \frac{1}{a+n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{a+1}{n}} - \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$$

$$= \frac{1}{n}\Big[1 - \frac{a+1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] - \Big[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big]$$

$$= -\frac{2a+1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

D'après l'exemple de Riemann $(2 > 1)$, la série $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{2a+1}{n^2}$ converge.

D'après l'exemple de Riemann $(2 > 1)$ et le théorème de comparaison en o, la série $\sum_{n\geqslant 1} o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ converge absolument, donc converge.

Par addition, on déduit que la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge.

D'après le lien suite/série, on conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

25.12

a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

$$= \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a}{x(x+1)(x+2)}.$$

La condition de l'énoncé, notée (C), équivaut à :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c-1)x + (2a+1) = 0.$$

Un polynôme s'annule en une infinité de points si et seulement si c'est le polynôme nul, donc :

$$\text{(C)} \iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 3a+2b+c-1 = 0 \\ 2a+1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

On conclut qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ unique convenant :

$$(a,b,c) = \Big(-\frac{1}{2},\, 2,\, -\frac{3}{2}\Big).$$

b) Nous allons former les sommes partielles et faire apparaître un télescopage.

On a, pour tout $N \geqslant 3$, en utilisant *a)* :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n-1}{n^3+3n^2+2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \Big(-\frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{n+2}\Big)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 2\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}$$

$$= \quad -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}\Big)+2\Big(\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+1}\Big)$$
$$-\frac{3}{2}\Big(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\Big)$$
$$= \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{2(N+1)}-\frac{3}{2(N+2)} \underset{N\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

On conclut : la série proposée converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{4}.$$

25.13

a) • Par récurrence immédiate : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \phi_n \geqslant 0$.

• D'où : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \phi_{n+2}-\phi_{n+1}=\phi_n\geqslant 0$,

donc la suite $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Comme $\phi_0=0\leqslant 1=\phi_1$, finalement, la suite $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

• S'il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\phi_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors, en passant à la limite dans la définition de la suite $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$, on obtient $\ell=\ell+\ell$, donc $\ell=0$, contradiction avec $\ell\geqslant\phi_1=1$.

Ainsi, la suite $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et divergente, donc :

$$\phi_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

b) D'après *a)* : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \phi_n\geqslant\phi_1=1>0$.

On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\phi_n^2}-\frac{1}{\phi_{n+1}^2}=\frac{\phi_{n+1}^2-\phi_n^2}{\phi_n^2\phi_{n+1}^2}$$
$$=\frac{(\phi_{n+1}-\phi_n)(\phi_{n+1}+\phi_n)}{\phi_n^2\phi_{n+1}^2}=\frac{\phi_{n-1}\phi_{n+2}}{\phi_n^2\phi_{n+1}^2}.$$

c) Nous allons former les sommes partielles et faire apparaître un télescopage. On a, pour tout $N\geqslant 1$, en utilisant *b)* :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\phi_{n-1}\phi_{n+2}}{\phi_n^2\phi_{n+1}^2}=\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{\phi_n^2}-\frac{1}{\phi_{n+1}^2}\Big)$$
$$=\frac{1}{\phi_1^2}-\frac{1}{\phi_{N+1}^2}\underset{N\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\phi_1^2}=1.$$

On conclut : la série proposée converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\phi_{n-1}\phi_{n+2}}{\phi_n^2\phi_{n+1}^2}=1.$$

25.14

Il s'agit de séries à termes $\geqslant 0$.

a) On a : $\;0\leqslant n^2u_n=n^2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}=\mathrm{e}^{2\ln n-\sqrt{n}}\underset{n\infty}{\longrightarrow}0,$

par prépondérance classique.

Il existe donc $N\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n\geqslant N,\quad 0\leqslant n^2u_n\leqslant 1$,

d'où : $\qquad \forall n\geqslant N,\quad 0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n^2}.$

D'après l'exemple de Riemann $(2>1)$ et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut : la série de terme général $\;\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge.

b) On a : $\;0\leqslant n^{3/2}u_n=n^{3/2}\dfrac{\ln n}{n^2}=\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\underset{n\infty}{\longrightarrow}0,$

par prépondérance classique.

Il existe donc $N\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n\geqslant N,\quad n^{3/2}u_n\leqslant 1$,

d'où : $\qquad \forall n\geqslant N,\quad 0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n^{3/2}}.$

D'après l'exemple de Riemann $(3/2>1)$ et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut : la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$ converge.

c) On a : $\qquad u_n=n^{\frac{1}{n^2}}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n^2}}-1.$

Comme $\dfrac{\ln n}{n^2}\underset{n\infty}{\longrightarrow}0$, on déduit : $u_n\underset{n\infty}{\sim}\dfrac{\ln n}{n^2}\geqslant 0.$

D'après *b)*, la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$ converge. Par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut : la série de terme général $\;\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1$ converge.

d) On a, par développement limité :

$$u_n=\Big(1+\frac{1}{n^3}\Big)^{n^2}-1=\exp\Big[n^2\ln\Big(1+\frac{1}{n^3}\Big)\Big]-1$$
$$=\exp\Big[n^2\Big(\frac{1}{n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)\Big]-1=\exp\Big[\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]-1$$
$$=\Big[1+\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]-1=\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\underset{n\infty}{\sim}\frac{1}{n}.$$

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence, on conclut : la série de terme général $\Big(1+\dfrac{1}{n^3}\Big)^{n^2}-1$ diverge.

e) Nous allons utiliser une comparaison série/intégrale. L'application $\;f:[2\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\dfrac{1}{x\ln x}$

est continue et décroissante, donc :

$$\forall n\geqslant 2,\quad f(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(n),$$

d'où, par sommation et utilisation de la relation de Chasles :

$$\forall N\geqslant 2,\quad \sum_{n=2}^{N}f(n+1)\leqslant\int_2^{N+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=2}^{N}f(n).$$

En particulier :

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n\ln n}\geqslant\int_2^{N+1}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\big[\ln(\ln x)\big]_2^{N+1}$$
$$=\ln\big(\ln(N+1)\big)-\ln(\ln 2)\underset{N\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

On conclut : la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.

f) Nous allons utiliser une comparaison série/intégrale.

L'application $\;f:[2\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

est continue et décroissante, donc :

$$\forall n\geqslant 2,\quad f(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(n),$$

d'où, par sommation et utilisation de la relation de Chasles :

$$\forall N\geqslant 2,\quad \sum_{n=2}^{N}f(n+1)\leqslant\int_2^{N+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=2}^{N}f(n).$$

En particulier :

$$\forall N \geqslant 2, \quad \sum_{n=2}^{N} f(n+1) \leqslant \int_2^{N+1} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^{N+1} = -\frac{1}{\ln(N+1)} + \frac{1}{\ln 2} \leqslant \frac{1}{\ln 2},$$

d'où, par changement d'indice :

$$\forall N \geqslant 3, \quad \sum_{n=3}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N-1} f(n+1) \leqslant \frac{1}{\ln 2}.$$

Ceci montre que les sommes partielles de la série $\sum_n u_n$ sont majorées. Comme il s'agit d'une série à termes $\geqslant 0$, on conclut : la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

25.15

Rappelons : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

Ici : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n = \dfrac{1}{n}(nu_n) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} + n^2u_n^2\right)$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (exemple de Riemann, $2>1$) et, par hypothèse, la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2u_n^2$ converge. Par addition et loi externe, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+n^2u_n^2\right)$ converge, puis, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

25.16

Utilisons des développements limités, lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$u_n = \ln(n^2+n+1) + a\ln(n^2+2n+4) + b\ln(n^2+3n+10)$$
$$= \left[2\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] + a\left[2\ln n + \ln\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\right]$$
$$+b\left[2\ln n + \ln\left(1+\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}\right)\right]$$
$$= 2(1+a+b)\ln n + \left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$+a\left[\left(\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{4}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+b\left[\left(\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{9}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= 2(1+a+b)\ln n + (1+2a+3b)\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2}+2a+\frac{11b}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

• Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \underset{n\infty}{\sim} 2(1+a+b)\ln n$, donc u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend l'infini, et donc la série $\sum_n u_n$ diverge (grossièrement).

• Si $1+a+b=0$ et $1+2a+3b \neq 0$, alors $u_n \underset{n\infty}{\sim} (1+2a+3b)\dfrac{1}{n}$, donc, comme la série $\sum_n \dfrac{1}{n}$ diverge, par multiplication par une constante non nulle, la série $\sum_n (1+2a+3b)\dfrac{1}{n}$ diverge, puis, par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n u_n$ diverge.

• Si $1+a+b=0$ et $1+2a+3b=0$, alors :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}+2a+\frac{11b}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après l'exemple de Riemann ($2>1$), la série $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ converge.

D'après l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème de comparaison en o, la série $\sum_n o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge absolument, donc converge.

Par combinaison linéaire, la série $\sum_n u_n$ converge.

Enfin : $\begin{cases} 1+a+b=0 \\ 1+2a+3b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=1. \end{cases}$

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :

$$a=-2 \quad \text{et} \quad b=1.$$

25.17

a) • Montrons, par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 5$.

C'est vrai pour $n=0$, puisque $u_0=5$.

Si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 8 = u_n(u_n-5)+8 \geqslant 8 \geqslant 5,$$

donc c'est vrai pour $n+1$.

On conclut : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 5$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 6u_n + 8 = (u_n-3)^2 - 1 \geqslant 3 \geqslant 0,$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

• Supposons $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Alors, par passage à la limite dans la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\ell = \ell^2 - 5\ell + 8$, d'où facilement $\ell \in \{2,4\}$. Mais : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 5$, donc, par passage à la limite : $\ell \geqslant 5$, contradiction.

Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et divergente, on conclut :

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(-1)^n}{u_n-2} - \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}-2} = \frac{(-1)^n}{u_n-2} - \frac{(-1)^{n+1}}{(u_n-2)(u_n-3)}$$
$$= \frac{(-1)^n}{(u_n-2)(u_n-3)}\big((u_n-3)+1\big) = \frac{(-1)^n}{u_n-3}.$$

c) Nous allons former les sommes partielles et faire apparaître un télescopage.

On a, d'après *b)*, pour tout $N \geqslant 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{u_n-3} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{(-1)^n}{u_n-2} - \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}-2} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{u_n-2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}-2} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{u_n-2} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^n}{u_n-2}$$
$$= \frac{1}{u_0-2} - \frac{(-1)^{N+1}}{u_{N+1}-2} \underset{N\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{u_0-2} = \frac{1}{3}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{u_n-2}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u_n-2} = \frac{1}{3}.$$

25.18

a) a) On a, pour tout $N \geqslant 1$, en utilisant une sommation géométrique :

$$\int_0^1 \frac{1-(-1)^N x^N}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{N-1}(-x)^n\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

b) D'après *a)*, on a, pour tout $N \geqslant 2$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x - (-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Mais : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^N\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N+1} \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0,$

donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,\mathrm{d}x \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0.$

On déduit :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{N\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln 2.$$

On conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

25.19

a) Considérons, pour $n \geqslant 1$, le paquet de termes $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k$.

Puisque la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et à termes $\geqslant 0$, on a : $\forall n \geqslant 1, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k \geqslant n u_{2n} \geqslant 0.$

Mais, puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 0.$$

Par théorème d'encadrement, il en résulte : $n u_{2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$

puis, en multipliant par 2 : $(2n)u_{2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

• On a, pour $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = \frac{2n+1}{2n}(2n)u_{2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1\cdot 0 = 0.$$

D'où, par théorème d'encadrement : $(2n+1)u_{2n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

• Puisque $(2n)u_{2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(2n+1)u_{2n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$

on conclut : $n u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

b) • Puisque $n u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad n u_n \leqslant 1.$$

D'où : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant v_n = n u_n^2 = (n u_n) u_n \leqslant u_n.$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, on déduit, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

• On a : $n\ln(1+u_n) \underset{n\infty}{\sim} n u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$

donc : $\mathrm{e}^{\,n\ln(1+u_n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1,$ puis :

$$w_n = u_n(1+u_n)^n = u_n \exp\big(n\ln(1+u_n)\big) \underset{n\infty}{\sim} u_n \geqslant 0.$$

Par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge.

25.20

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

1) Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Notons $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}(u_k + u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n+1} u_k = U_n + (U_{n+1} - u_0),$$

donc : $V_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 2U - u_0,$

ce qui montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

2) Réciproquement, supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Notons $V = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = U_n + U_{n+1} - u_0 = 2U_n + u_{n+1} - u_0,$$

donc : $U_n = \dfrac{1}{2}V_n + \dfrac{1}{2}u_0 - \dfrac{1}{2}u_{n+1}.$

Puisque $V_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} V$ et $u_{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ (hypothèse), on déduit :

$$U_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}u_0,$$

ce qui montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Finalement, les séries de termes généraux u_n et $u_n + u_{n+1}$ sont de même nature.

Remarque : L'hypothèse $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ est essentielle.

Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, la série de terme général u_n diverge (car u_n ne tend pas vers 0), mais la série de terme général v_n converge (car, pour tout n, $v_n = 0$).

25.21

a) Notons $\lambda = \dfrac{\ell+1}{2}$. On a donc : $\ell < \lambda < 1$.

Puisque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell < \lambda$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \lambda.$$

On a donc, pour tout $n \geqslant N+1$:

$$u_n \leqslant \lambda u_{n-1}, \quad \ldots, \quad u_{N+1} \leqslant \lambda u_N.$$

Par multiplication (les membres sont tous > 0) et par télescopage, on obtient :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant \lambda^{n-N} u_N = \lambda^n \lambda^{-N} u_N.$$

Comme $\lambda \in [0\,;1[$, la série géométrique $\sum_n \lambda^n$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

b) • On a : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0,$

et :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\big((n+1)!\big)^2 2^{n+1}}{\big(2(n+1)!\big)} \, \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$$
$$= \frac{(n+1)^2 \cdot 2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$

D'après *a)*, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

• On a : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n > 0,$

et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\binom{4(n+1)}{2(n+1)}^{-1}}{\binom{4n}{2n}^{-1}} = \frac{\binom{4n}{2n}}{\binom{4n+4}{2n+2}} = \frac{(4n)!\big((2n+2)!\big)^2}{(4n+4)!\big((2n)!\big)^2}$$
$$= \frac{\big((2n+1)(2n+2)\big)^2}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{16n^4}{256n^4} = \frac{1}{16}.$$

Ainsi : $\quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{16} < 1.$

D'après *a)*, on conclut que la série $\sum_n v_n$ converge.

25.22

a) 1) On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_{2(p+1)} - S_{2p} = u_{2p+2} - u_{2p+1} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+1}| \leqslant 0,$$

$$S_{2(p+1)+1} - S_{2p+1} = u_{2p+2} + u_{2p+3} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+3}| \geqslant 0,$$

et : $\qquad S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

On conclut que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2) Puisque les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite, notée ℓ.

Il en résulte : $S_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Puisque la suite des sommes partielles de la série converge, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b) Soit $\alpha \in]0\,;+\infty[$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ vérifie les hypothèses de *a)*, puisque :

- pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$
- la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante
- $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

On conclut, d'après *a)* : la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

c) Utilisons un développement limité :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \, \frac{1}{1 + \underbrace{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\underset{n\infty}{\longrightarrow} 0}}$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

- D'après *b)*, avec $\alpha = 1/2$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
- La série $\sum_n \dfrac{1}{n}$ diverge.
- La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ est absolument convergente (exemple de Riemann, $3/2 > 1$), donc convergente.
- Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente et à termes $\geqslant 0$, d'après le théorème de domination, la série $\sum_{n\geqslant 1} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Ainsi, v_n apparaît comme la somme des termes généraux de quatre séries, dont trois convergentes et une divergente.

On conclut que la série de terme général v_n diverge.

Vrai ou Faux ?

25.1 Pour qu'une série converge, il faut et il suffit que son terme général tende vers 0. V F

25.2 Pour qu'une série converge, il faut et il suffit que son reste tende vers 0. V F

25.3 La série complexe de terme général $u_n + \mathrm{i}\, v_n$, où $u_n \in \mathbb{R}$ et $v_n \in \mathbb{R}$, converge si et seulement si les deux séries réelles de termes généraux u_n et v_n convergent. V F

25.4 On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. V F

25.5 On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. V F

25.6 La série de terme général u_n converge si et seulement si la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. V F

25.7 Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature. V F

25.8 S'il existe $\alpha \in]1\,;+\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la série de terme général u_n converge absolument, donc converge. V F

25.9 Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. V F

25.10 Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est la n-ème somme partielle d'une série, alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} = u_0 + u_2 + \cdots + u_{2n}$. V F

Vrai ou Faux, les réponses

25.1 Contrexemple : la suite de terme général $\dfrac{1}{n}$ converge vers 0 et la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge. V **F**

Il n' y a qu'une implication : si la série de terme général u_n converge, alors la suite de terme général u_n tend vers 0.

25.2 Le reste d'ordre n n'est défini que si la série converge. V **F**

25.3 C'est un résultat du cours. **V** F

25.4 La série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} z^n$ diverge si $|z| = 1$. V **F**

Il faut remplacer l'hypothèse $|z| \leqslant 1$ par l'hypothèse plus forte $|z| < 1$.

25.5 La série commence à l'indice 1 au lieu de l'indice 0. V **F**

Les résultats corrects sont : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$

25.6 Il y a eu échange des notions de suite et de série. V **F**

Le résultat correct est : la suite de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

25.7 Il y a eu oubli d'une condition de positivité. V **F**

25.8 C'est un résultat du cours. **V** F

25.9 Contrexemple : $u_n = (-1)^n,\ v_n = 2$. V **F**

Il y a eu oubli d'une hypothèse de convergence des deux séries envisagées.

25.10 La réponse correcte est $S_{2n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n}$, c'est-à-dire que S_{2n} est la somme de tous les termes d'indices pairs ou impairs de 0 à $2n$, et pas seulement la somme des termes d'indices pairs. **V** F

Chapitre 26

Dénombrements

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Cardinal d'un ensemble fini
- Dénombrement d'un ensemble par complémentaire, différence, réunion finie disjointe, produit cartésien
- Dénombrement de p-listes, de p-listes d'éléments distincts, de parties
- Calculs de sommes et de produits
- Manipulation de coefficients binomiaux, calculs de sommes les faisant intervenir.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition du cardinal d'un ensemble fini E, noté $\operatorname{Card}(E)$ ou $\#(E)$ ou $|E|$
- Cardinal du complémentaire, d'une différence, d'une réunion finie disjointe, d'un produit cartésien
- Définition d'une p-liste, nombre de p-listes dans un ensemble à n éléments
- Définition d'une p-liste d'éléments distincts, nombre de p-listes d'éléments distincts dans un ensemble à n éléments
- Définition d'une permutation, nombre de permutations d'un ensemble à n éléments
- Définition d'une partie à p éléments, nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments
- Nombre de parties d'un ensemble à n éléments
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux, en particulier : la formule du triangle de Pascal et la formule du binôme de Newton.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer le cardinal d'un ensemble fini

Essayer :

- de décrire l'ensemble puis compter son nombre d'éléments
- d'établir une bijection entre l'ensemble dont on cherche le cardinal et un autre ensemble dont on connaît le cardinal
- de décomposer l'ensemble à l'aide de sous-ensembles dont on connaît le cardinal, et d'utiliser les règles de calculs décrites ci-dessous.

➟ **Exercices 26.1 à 26.3**

Exemple

Dénombrer les couples (x, y) de $\mathbb{N}^2$ tels que $3x + y = 11$.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$:

$$3x + y = 11 \iff \begin{cases} 0 \leqslant 3x \leqslant 11 \\ y = 11 - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ y = 11 - 3x. \end{cases}$$

Ainsi, on choisit x dans $\{0, ..., 3\}$ et on pose $y = 11 - 3x$.

Le cardinal demandé est donc égal à 4.

Méthode

Pour calculer le cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini

Si A est une partie d'un ensemble fini E, il est parfois plus simple de dénombrer le complémentaire de A dans E plutôt que A directement. Dans ce cas, on utilise : $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(E) - \operatorname{Card}(\overline{A})$.

➟ **Exercices 26.1, 26.5**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les triplets $(x, y, z) \in \{0, ..., n\}^3$ tels que $xyz = 0$.

En notant $E = \{0, ..., n\}^3$ et $A = \big\{(x, y, z) \in E\,;\, xyz = 0\big\}$, le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E est

$$\big\{(x, y, z) \in E\,;\, xyz \neq 0\big\} = \{1, ..., n\}^3.$$

On a donc $\operatorname{Card}(\overline{A}) = n^3$, d'où :

$$\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(E) - \operatorname{Card}(\overline{A}) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Méthode

Pour calculer le cardinal d'une différence de deux ensembles finis

Si A et B sont deux ensembles finis, alors :

$$\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card}(A) - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

Si de plus, $B \subset A$, alors :

$$\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card}(A) - \operatorname{Card}(B).$$

➟ **Exercice 26.1**

Exemple

Dans une classe, 18 élèves font l'option M et 4 élèves font l'option M et l'option I. Combien d'élèves ne font que l'option M ?

En notant A (resp. B) l'ensemble des élèves qui font l'option M (resp. I), l'ensemble des élèves qui ne font que l'option M est $A \setminus B$ et on a :

$$\mathrm{Card}\,(A \setminus B) = \mathrm{Card}\,(A) - \mathrm{Card}\,(A \cap B) = 18 - 4 = 14.$$

Méthode

Pour calculer le cardinal d'une réunion de deux ensembles finis

Soient A et B deux ensembles finis.

- Si A et B sont disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$), alors :
$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B).$$
- Sinon : $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$.

➟ **Exercice 26.10**

Exemple

Dénombrer l'ensemble V des entiers n entre 1 et 100 tels que :

$$2 \text{ divise } n \quad \text{ou} \quad 3 \text{ divise } n.$$

Notons $E = \{1, ..., 100\}$, $A = \{n \in E\,;\, 2 \mid n\}$, $B = \{n \in E\,;\, 3 \mid n\}$.
On a alors : $V = A \cup B$.
De plus : $A \cap B = \{n \in E\,;\, 2 \mid n \text{ et } 3 \mid n\} = \{n \in E\,;\, 6 \mid n\}$.

On a $\mathrm{Card}\,(A) = \left\lfloor \dfrac{100}{2} \right\rfloor = 50$,

$$\mathrm{Card}\,(B) = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33, \quad \mathrm{Card}\,(A \cap B) = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16.$$

D'où :

$$\mathrm{Card}\,(V) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B) = 50 + 33 - 16 = 67.$$

Méthode

Pour calculer le cardinal d'une réunion de n ensembles finis deux à deux disjoints

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors :

$$\mathrm{Card}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\,(A_i).$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les triplets $(x, y, z) \in \{1, ..., 4n\}^3$ tels que les trois restes des divisions euclidiennes de x, y, z par 4 soient égaux.

Notons $E = \{1, ..., 4n\}^3$, A (resp. B, resp. C, resp. D) l'ensemble des $(x, y, z) \in E$ tels que les trois restes des divisions euclidiennes de x, y, z par 4 soient égaux à 0 (resp. 1, resp. 2, resp. 3).
Le nombre cherché est le cardinal de $A \cup B \cup C \cup D$.
On a : $\mathrm{Card}\,\{x \in E\,;\, 4 \mid x\} = n$, donc : $\mathrm{Card}\,(A) = n^3$.
De même : $\mathrm{Card}\,(B) = (n+1)^3$, $\mathrm{Card}\,(C) = \mathrm{Card}\,(D) = n^3$.
Comme les ensembles A, B, C, D sont deux à deux disjoints, on conclut :

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B \cup C \cup D) = (n+1)^3 + 3n^3 = 4n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Méthode

Pour calculer le cardinal d'un produit cartésien de n ensembles finis

- Si A et B sont deux ensembles finis, alors :
$$\text{Card}\,(A \times B) = \text{Card}\,(A) \times \text{Card}\,(B).$$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis, alors :
$$\text{Card}\,\big(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\big) = \text{Card}\,(A_1) \times \text{Card}\,(A_2) \times \cdots \times \text{Card}\,(A_n).$$

  Remarque : Ce cas se présente lorsque l'on détaille les étapes pour décrire tous les éléments d'un ensemble E : s'il y a p étapes, et si, à chaque étape, il y a n_i choix possibles, ces choix étant indépendants les uns des autres, alors :
$$\text{Card}\,(E) = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p.$$
- Si A est un ensemble fini et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :
$$\text{Card}\,(A^n) = \big(\text{Card}\,(A)\big)^n.$$

➟ **Exercices 26.1, 26.4**

Exemple

Dénombrer les couples $(x, y) \in \{1, ..., 10\}^2$ tels que:
$$2 \mid x \quad \text{et} \quad 3 \mid y.$$

Notons $A = \{x \in \{1, ..., 10\}\,;\, 2 \mid x\}$, $B = \big\{y \in \{1, ..., 10\}\,;\, 3 \mid y\big\}$. L'ensemble cherché est alors $A \times B$ et :
$$\text{Card}\,(A \times B) = \text{Card}\,(A)\,\text{Card}\,(B) = 5 \cdot 3 = 15.$$

Méthode

Pour calculer le nombre de façons de choisir p éléments dans un ensemble E à n éléments

- Si les p éléments sont ordonnés et non nécessairement distincts, alors il s'agit d'une p-liste de E; dans ce cas :
$$\text{il y a } n^p \text{ choix possibles.}$$
- Si les p éléments sont ordonnés et distincts, alors il s'agit d'une p-liste d'éléments distincts de E (ou p-liste sans répétition de E); dans ce cas :
$$\text{il y a } \frac{n!}{(n-p)!} \text{ choix possibles.}$$
  Lorsque $p = n$, on parle de permutation de E; dans ce cas :
$$\text{il y a } n! \text{ choix possibles.}$$
- Si les p éléments sont non ordonnés et distincts, alors il s'agit d'une partie à p éléments de E; dans ce cas :
$$\text{il y a } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \text{ choix possibles.}$$

➟ **Exercices 26.1, 26.2, 26.4, 26.8, 26.10, 26.12**

Exemple

Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. Combien y a-t-il de résultats possibles dans les cas suivants ?

a) on tire successivement et avec remise trois boules de l'urne

b) on tire successivement et sans remise trois boules de l'urne

c) on tire une poignée de trois boules de l'urne.

a) Un résultat est ici une 3-liste de $\{1, ..., 6\}$.
Il y a donc $6^3 = 216$ résultats possibles.

b) Un résultat est ici un triplet formé de trois éléments deux à deux distincts de $\{1, ..., 6\}$.
Il y a donc $\dfrac{6!}{3!} = 120$ résultats possibles.

c) Un résultat est ici une partie à 3 éléments de $\{1, ..., 6\}$.
Il y a donc $\dbinom{6}{3} = 20$ résultats possibles.

Méthode

Pour calculer le nombre de parties d'un ensemble fini

Si E est un ensemble fini à n éléments, alors :

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

➟ **Exercices 26.7, 26.8**

Exemple

Combien y a-t-il de parties non vides dans un ensemble de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) ?

Dans un ensemble de n éléments, il y a 2^n parties et l'une de ces parties et une seule est l'ensemble vide. Il y a donc $2^n - 1$ parties non vides.

Méthode

Pour simplifier une expression faisant intervenir des coefficients binomiaux

Essayer de :

- remplacer les coefficients binomiaux par leurs expressions à l'aide de factorielles
- utiliser l'une des propriétés suivantes sur les coefficients binomiaux :
  - $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$
  - $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$
    (formule du triangle de Pascal)
  - $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$

• utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}.$$

➟ **Exercice 26.8**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Simplifier

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

L'expression proposée ressemble au développement de la formule du binôme de Newton. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \right) - \left(\binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{n} 2^0 \right) \\ &= (1+2)^n - (2^n + 1) = 3^n - 2^n - 1. \end{aligned}$$

Énoncés des exercices

26.1 Mots de trois lettres

Un mot de trois lettres est ici une 3-liste ordonnée, avec répétitions possibles, de lettres parmi les 26 lettres de l'alphabet (6 voyelles et 20 consonnes), n'ayant pas nécessairement une signification.

Déterminer le nombre de nombre de mots de trois lettres :

a) en tout

b) deux à deux distinctes

c) ayant exactement deux lettres identiques

d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne

e) contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne

f) contenant deux consonnes identiques et une voyelle

g) contenant au moins une consonne

h) contenant au moins une consonne et une voyelle.

26.2 Anagrammes

Déterminer le nombre d'anagrammes de chacun des mots LOI, DISCRETE, USUELLE. L'accent n'est pas pris en compte, les anagrammes n'ont pas nécessairement une signification, et on compte le mot lui-même parmi les anagrammes.

26.3 Nombre de couples de $\{1, ..., n\}^2$ satisfaisant des conditions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples (x, y) de $\{1, ..., n\}^2$ tels que :

a) $x \leqslant y$

b) $x < y$

c) $x + y = n$

d) $x + y \leqslant n$.

26.4 Tirages avec remise

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. La boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules 4,5,6 sont rouges, les boules 7,8,9,10 sont vertes. On tire dans l'urne, successivement et avec remise, 5 boules. On appelle résultat la liste ordonnée des cinq numéros des boules tirées. Par exemple, un résultat possible est (3, 7, 10, 3, 6). Déterminer le nombre de résultats :

a) en tout

b) pour lesquels les cinq boules sont toutes de la même couleur

c) pour lesquels les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules

d) pour lesquels la boule numéro 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

26.5 Répartitions de six boules dans trois urnes

On dispose de trois urnes notées A,B,C et de six boules numérotées de 1 à 6. On répartit les six boules dans les trois urnes (chaque urne peut contenir de 0 à 6 boules). Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes A,B,C. Par exemple, une répartition possible est $(2, 4, 0)$, indiquant que l'urne A contient 2 boules, l'urne B contient 4 boules et l'urne C est vide.

Déterminer le nombre de répartitions :

a) en tout

b) telles que l'urne A soit vide

c) telles que l'urne A soit vide et soit la seule urne vide

d) telle qu'une urne soit vide et une seulement

e) telles qu'aucune urne ne soit vide

f) telles qu'au moins une urne soit vide.

26.6 **Nombre d'élèves étudiant une LV1, une LV2**

Dans une classe de 30 élèves, la LV1 est obligatoire (anglais ou allemand) et une LV2 et une seule est facultative (anglais ou allemand ou espagnol). On sait qu'il y a :

3 élèves qui font anglais en LV1 et pas de LV2

28 élèves qui font anglais en LV1 ou en LV2

20 élèves qui font allemand en LV1 ou en LV2

4 élèves qui ne font pas de LV2

il y a deux fois plus d'élèves qui font anglais en LV1 et allemand en LV2 que d'élèves qui font allemand en LV1 et anglais en LV2.

Pour chaque LV1 et chaque LV2, déterminer le nombre d'élèves faisant cette LV1, faisant cette LV2.

26.7 **Nombre de parties ou de couples de parties vérifiant des conditions**

Soient E un ensemble fini, $n = \#(E)$, $A \subset E$, $B \subset E$, $p = \#(A)$, $q = \#(B)$, $r = \#(A \cap B)$.

a) Déterminer le nombre de parties X de E telles que :

1) $X \subset A$

2) $A \subset X$

3) $X \cap A = \varnothing$

4) $X \cup A = E$

5) $A \cap B \subset X \subset A \cup B$.

b) Déterminer le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que :

1) $X \subset A \cap B$ et $A \cup B \subset Y$

2) $A \cap B \subset X \cap Y$ et $X \cup Y \subset A \cup B$.

26.8 **Nombre de couples de parties vérifiant des conditions**

Soit E un ensemble fini, $n = \#(E)$. Déterminer le nombre de couples (X, Y) de parties de E tels que :

a) $X \subset Y$

b) $X \cap Y = \varnothing$

c) $X \cup Y = E$.

26.9 **Nombre de solutions d'une équation**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de N-uplets $(x_1, ..., x_N)$ d'éléments de $\{1, 2\}$ tels que : $\quad N \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 + \cdots + x_N = n$.

Par exemple, pour $n = 4$, on a les décompositions :

$$4 = 1+1+1+1, \quad 4 = 1+1+2, \quad 4 = 1+2+1, \quad 4 = 2+1+1, \quad 4 = 2+2,$$

donc $u_4 = 5$.

a) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

b) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

26.10 Nombre d'applications croissantes

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'applications de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$:

a) strictement croissantes

b) croissantes

c) monotones

d) non monotones.

26.11 Sommes de cardinaux d'intersections, de réunions

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments. Calculer

$$S_n = \sum_{(X,Y)\in\left(\mathcal{P}(E)\right)^2} \#(X \cap Y), \qquad T_n = \sum_{(X,Y)\in\left(\mathcal{P}(E)\right)^2} \#(X \cup Y).$$

26.12 Nombre de partitions d'un ensemble fini

Pour tout ensemble E, on appelle partition de E toute partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall X \in \mathcal{F}, \quad X \neq \varnothing \\ \forall X, Y \in \mathcal{F}, \quad \big(X \neq Y \implies X \cap Y = \varnothing\big) \\ \forall x \in E,\ \exists X \in \mathcal{F}, \quad x \in X. \end{cases}$$

Par exemple, $\big\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\big\}$ est une partition de $\{1, ..., 5\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le nombre de partitions de $\{1, ..., n\}$, et on note $P_0 = 1$.

a) Établir : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k.$

b) En déduire successivement P_n pour $n = 0, ..., 5$.

26.13 Nombre de p-partitions d'un ensemble à n éléments

Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on appelle p-partition de $\{1, ..., n\}$ toute partition P de $\{1, ..., n\}$ telle que $\operatorname{Card}(P) = p$.

Par exemple, $\big\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\big\}$ est une 3-partition de $\{1, ..., 6\}$.

On note $P_{n,p}$ le nombre de p-partitions de $\{1, ..., n\}$.

a) Montrer : $\qquad \forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P_{n+1,\, p+1} = P_{n,p} + (p+1)P_{n,\, p+1}.$

b) En déduire $P_{n,p}$ pour tout $(n, p) \in \{1, ..., 5\}^2$.

c) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1,2} = 2^n - 1, \qquad P_{n+1,3} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}, \qquad P_{n+1,n} = \binom{n+1}{2}.$$

Du mal à démarrer ?

26.1 Un mot de trois lettres peut être assimilé à une 3-liste de l'ensemble des 26 lettres.

a) Immédiat. Réponse : 17576.

b) Un mot de trois lettres constitué de trois lettres différentes peut être assimilé à une 3-liste d'éléments distincts. Réponse : 15600.

c) Choisir d'abord les places des lettres répétées. Réponse : 1950.

d) Immédiat. Réponse : 3120.

e) Choisir d'abord les places des deux voyelles. Réponse : 1800.

f) Choisir d'abord les places des deux consonnes. Réponse : 360.

g) Passer par le complémentaire. Réponse: 17360.

h) Passer par le complémentaire. Réponse : 9360.

26.2 Pour LOI, c'est immédiat. Réponse : 6.

Pour DISCRETE et pour USUELLE, choisir d'abord les places des lettres répétées. Réponses : 20160, 630.

26.3 Choisir d'abord x, puis dénombrer les y correspondants. Réponses :

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{n(n-1)}{2}, \quad n-1, \quad \frac{n(n-1)}{2}.$$

26.4 *a)* Immédiat. Réponse : 100000.

b) Immédiat. Réponse : 1300.

c) Dénombrer d'abord les résultats où il y a deux boules jaunes et une boule de chaque autre couleur, puis dénombrer les autres résultat analogues. Réponse : 14400.

d) Choisir d'abord les places de la boule 8, puis les autres choix. Réponse : 9720.

26.5 Noter x (resp. y, resp z) le nombre de boules contenues dans l'urne A (resp. B, resp. C).

a) Choisir x, puis y, puis z. Réponse : 28.

b) Immédiat. Réponse : 7.

c) Immédiat. Réponse : 5.

d) Immédiat. Réponse : 15.

e) Utiliser $x-1$, $y-1$, $z-1$. Réponse : 10.

f) Passer par l complémentaire. Réponse : 18.

26.6 Noter x, y, z, u,, v, w les nombres d'élèves étudiant une certaine LV1 et une certaine LV2 et traduire les données par un système d'équations.

Réponse : $x = 12,\ y = 7\ z = 3\ u = 5,\ v = 1,\ w = 1.$

26.7 *a) 1)* Immédiat. Réponse : 2^p.

2) Considérer $\overline{X}$. Réponse : 2^{n-p}.

3) Traduire $X \cap A = \varnothing$ par une inclusion. Réponse : 2^p.

4) Considérer $\overline{X}$. Réponse : 2^p.

5) Considérer l'application $Z \longmapsto (A \cap B) \cup Z$. Réponse : 2^{p+q-2r}.

b) 1) Les rôles de X et Y sont indépendants. Réponse : $2^{n-p-q+2r}$.

2) Transformer le système d'inclusions. Réponse : $2^{2(p+q-2r)}$.

26.8 *a)* Choisir d'abord $Y \subset E$, puis $X \subset Y$. Utiliser ensuite la formule du binôme de Newton. Réponse : 3^n.

b) Traduire $X \cap Y = \varnothing$ par une inclusion et utiliser *a)*. Réponse : 3^n.

c) Considérer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ et utiliser *b)*. Réponse : 3^n.

26.9 *a)* Séparer les $(x_1, ..., x_N)$ tels que $x_1 + \cdots x_N = 2$ en deux paquets.

b) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

26.10 *a)* Considérer les parties à p éléments de $\{1, ..., n\}$. Réponse : $\binom{n}{p}$.

b) Pour toute application $f : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$, considérer $f^{\#} : \{1, ..., p\} \longmapsto \{1, ..., n+p-1\}$ définie par : $\forall i \in \{1, ..., p\}, \quad f^{\#}(i) = f(i) + i - 1$

et utiliser *a)*. Réponse : $\binom{n+p-1}{p}$.

c) Noter C (resp. D, resp. F, resp. M) l'ensemble des applications croissantes (resp. décroissantes, resp. constantes, resp. monotones) de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$.

Calculer $\#(F)$, $\#(C)$, $\#(D)$ à l'aide de C, puis $\#(M)$ par complémentaire.

Réponses :

$$\binom{n+p-1}{p}, \quad \binom{n+p-1}{p}, \quad p, \quad \binom{n+p-1}{p} - p.$$

d) Passer par le complémentaire.

Réponse : $n^p - 2\binom{n+p-1}{p} + p.$

26.11 Pour $(X,Y) \in \left(\mathcal{P}(E)\right)^2$, considérer les couples $(X, \overline{Y})$, $(\overline{X}, Y)$, $(\overline{X}, \overline{Y})$. Réponse : $S_n = n2^{2n-2}$.

Pour $(X,Y) \in \left(\mathcal{P}(E)\right)^2$, considérer le couple $(\overline{X}, \overline{Y})$ et utiliser *a)*. Réponse : $T_n = 3 \cdot 2^{2n-2}$.

26.12 *a)* Étudier la donnée d'une partition de $\{1, ..., n+1\}$ en isolant $n+1$.

b) Immédiat. Réponse : 1, 1, 2, 5, 15, 52.

26.13 *a)* Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Séparer les $p+1$-partitions de $\{1, ..., n+1\}$ en isolant celles qui contiennent le singleton $\{n+1\}$.

b) Immédiat.

c) 1) Obtenir : $P_{n+1,2} = 2P_{n,2} + 1$.

2) Récurrence.

3) La donnée d'une n-partition de $\{1, ..., n+1\}$ revient à la donnée d'une paire de $\{1, ..., n+1\}$.

Corrigés des exercices

26.1

a) Il y a $26^3 = 17576$ mots de trois lettres.

b) Il y a $26 \times 25 \times 24 = 15600$ mots de trois lettres deux à deux différentes.

c) Il faut choisir les places des deux lettres répétées ($\binom{3}{2}$ choix), choisir cette lettre répétée (26 choix), puis choisir une autre lettre (25 choix).

Il y a $\binom{3}{2} \times 26 \times 25 = 1950$ mots de trois lettres ayant exactement deux lettres identiques.

d) Il faut choisir une voyelle à placer en premier (6 choix), choisir n'importe quelle lettre à placer en deuxième (26 choix), puis choisir une consonne à placer en troisième (20 choix).
Il y a $6 \times 26 \times 20 = 3120$ mots de trois lettres commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

e) Il faut choisir les places des deux voyelles ($\binom{3}{2}$ choix), choisir deux voyelles (6×5 choix), puis choisir une consonne à mettre à la place restante (20 choix).

Il y a $\binom{3}{2} \times (6 \times 5) \times 20 = 1800$ mots de trois lettres contenant deux voyelles distinctes et une consonne.

f) Il faut choisir les places des deux consonnes identiques ($\binom{3}{2}$ choix), choisir une consonne à répéter à ses places (20 choix), puis choisir une voyelle à mettre à la place restante (6 choix).

Il y a $\binom{3}{2} \times 20 \times 6 = 360$ mots de trois lettres contenant deux consonnes identiques et une voyelle.

g) Nous allons passer par un ensemble complémentaire.
Cherchons d'abord le nombre de mots de trois lettres ne contenant aucune consonne. Il s'agit du nombre de mots de trois lettres ne contenant que des voyelles, donc il y en a exactement 6^3.
Il y a donc $26^3 - 6^3 = 17360$ mots de trois lettres contenant au moins une consonne.

h) Nous allons passer par un ensemble complémentaire.
Cherchons d'abord le nombre de mots de trois lettres ne contenant que des voyelles et le nombre de mots de trois lettres ne contenant que des consonnes. Il y a exactement 6^3 mots de trois lettres ne contenant que des voyelles, et exactement 20^3 mots de trois lettres ne contenant que des consonnes.
Il y a donc $26^3 - (6^3 + 20^3) = 9360$ mots de trois lettres contenant au moins une consonne et au moins une voyelle.

26.2

• Pour le mot LOI, comme les trois lettres sont deux à deux distinctes, il y a $3! = 6$ anagrammes du mot LOI.

• Pour le mot DISCRETE, il y a une lettre répétée et une seule, la lettre E.
Pour obtenir tous les anagrammes, on choisit les places des E ($\binom{8}{2}$ choix), puis on met les autres lettres aux six places restantes ($6!$ choix).

Il y a donc $\binom{8}{2} 6! = 20160$ anagrammes du mot DISCRETE.

• Pour le mot USUELLE, les lettres E,L,U sont répétées, la lettre S est seule.
Pour obtenir tous les anagrammes, on choisit les places des E ($\binom{7}{2}$ choix), puis les places des L ($\binom{5}{2}$ choix), puis les places

des U ($\binom{3}{2}$ choix), et enfin la place du S (1 choix).

Il y a donc $\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} \cdot 1 = 630$ anagrammes du mot USUELLE.

26.3

a) Pour $x \in \{1, ..., n\}$ donné, y prend ses valeurs dans $\{x, x+1, ..., n\}$, donc le cardinal demandé est :

$$n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Pour $x \in \{1, ..., n-1\}$ donné, y prend ses valeurs dans $\{x+1, ..., n\}$, donc le cardinal demandé est :

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

c) Pour $x \in \{1, ..., n-1\}$ donné, y est égal à $n - x$, donc le cardinal demandé est $n - 1$.

d) Pour $x \in \{1, ..., n-1\}$ donné, y prend ses valeurs dans $\{1, ..., n - x\}$, donc le cardinal demandé est :

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

26.4

a) Il y a $10^5 = 100\,000$ résultats possibles.

b) il y a 1^5 (resp. 2^5, resp. 3^5, resp. 4^5) résultats pour lesquels les cinq boules tirées sont jaunes (resp. bleues, resp. rouges, resp. vertes). Il y a donc $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 = 1300$ résultats pour lesquels les cinq boules tirées sont toutes de la même couleur.

c) Un résultat pour lequel les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules est un résultat pour lequel il y a exactement deux boules d'une couleur et une boule de chaque autre couleur.

Dénombrons les résultats où il y a deux boules jaunes et une boule de chaque autre couleur.

Il y a 1^2 choix pour les boules jaunes et $\binom{5}{2}$ choix pour les places des boules jaunes, puis 2 choix pour la boule bleue et $\binom{3}{1}$ choix pour la place de la boule bleue, puis 3 choix pour la boule rouge et $\binom{2}{1}$ choix pour la place de la boule rouge, puis 4 choix pour la boule verte et 1 choix pour la place de la boule verte.

Il y a $\left(1^2 \cdot \binom{5}{2}\right)\left(2 \cdot \binom{3}{1}\right)\left(3 \cdot \binom{2}{1}\right)\left(4 \cdot \binom{1}{1}\right) = 1440$ résultats où il y a deux boules jaunes et une boule de chaque autre couleur.

Il y a $\left(1 \cdot \binom{5}{1}\right)\left(2^2 \cdot \binom{4}{2}\right)\left(3 \cdot \binom{2}{1}\right)\left(4 \cdot \binom{1}{1}\right) = 2880$ résultats où il y a deux boules bleues et une boule de chaque autre couleur.

Il y a $\left(1 \cdot \binom{5}{1}\right)\left(2 \cdot \binom{4}{1}\right)\left(3^2 \cdot \binom{3}{2}\right)\left(4 \cdot \binom{1}{1}\right) = 4320$ résultats où il y a deux boules rouges et une boule de chaque autre couleur.

Il y a $\left(1 \cdot \binom{5}{1}\right)\left(2 \cdot \binom{4}{1}\right)\left(3 \cdot \binom{3}{1}\right)\left(4^2 \cdot \binom{2}{2}\right) = 6760$ résultats où il y a deux boules vertes et une boule de chaque autre couleur.

Finalement, il y a 14 400 résultats pour lesquels les quatre couleurs apparaissent.

d) Il y a $\binom{5}{1}$ choix pour placer la boule 8, puis $3^2 \cdot \binom{4}{2}$ choix pour les boules rouges (la boule 8 n'est pas rouge), puis 6^2 choix pour compléter par des boules autres que la boule 8 et non rouges.

Il y a donc $\binom{5}{1}\left(3^2 \cdot \binom{4}{2}\right) \cdot 6^2 = 9720$ résultats pour lesquels la boule 8 a été tirée et il y a exactement deux des boules tirées sont rouges.

26.5

a) Le nombre total de répartitions est le nombre de triplets (x, y, z) de $\mathbb{N}^3$ tels que $x+y+z = 6$, où x (resp. y, resp. z) est le nombre de boules contenues dans l'urne A (resp. B, resp. C).

Le nombre x prend les valeurs $0, ..., 6$.

Pour x fixé, y prend les valeurs $0, ..., 6 - x$.

Enfin, pour x et y fixés, z prend la valeur $6 - x - y$.

Le nombre total de répartitions possibles est donc :

$$\sum_{x=0}^{6}\sum_{y=0}^{6-x} 1 = \sum_{x=0}^{6}(7-x) = \sum_{x=0}^{6} 7 - \sum_{x=0}^{6} x = 7 \cdot 7 - \frac{6 \cdot 7}{2} = 28.$$

b) Le nombre de répartitions telles que l'urne A soit vide est le nombre de triplets (x, y, z) de $\mathbb{N}^3$ tels que $x = 0$ et $x + y + z = 6$, c'est-à-dire le nombre de couples (y, z) de $\mathbb{N}^2$ tels que $y+z = 6$. Il y a donc exactement 7 répartitions telles que l'urne A soit vide.

c) Le nombre de répartitions telles que l'urne A soit vide et soit la seule vide est le nombre de triplets (x, y, z) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $x = 0$ et $x + y + z = 6$, c'est-à-dire le nombre de couples $(y, z) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $y + z = 6$. Il y a donc exactement 5 répartitions telles que l'urne A soit vide et soit la seule vide.

d) L'urne vide (unique) peut-être l'urne A, ou l'urne B, ou l'urne C. D'après *c)*, on déduit que le nombre de répartitions telles qu'une urne soit vide et une seulement est : $3 \times 5 = 15$.

e) Le nombre de répartitions telles qu'aucune urne ne soit vide est le nombre de triplets (x, y, z) de $(\mathbb{N}^*)^3$ tels que $x + y + z = 6$.

C'est aussi, en considérant $(x-1,\ y-1,\ z-1)$, le nombre de triplets (u, v, w) de $\mathbb{N}^3$ tels que $u + v + w = 3$.

En raisonnant comme en *a)*, le nombre demandé est :

$$\sum_{u=0}^{3}\sum_{v=0}^{3-x} 1 = \sum_{u=0}^{3}(4-x) = \sum_{u=0}^{3} 4 - \sum_{u=0}^{3} x = 4 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2} = 10.$$

f) Par complémentation, le nombre de répartitions telles qu'au moins une urne soit vide est la différence entre le nombre total de répartitions et le nombre de répartitions telles qu'aucune urne ne soit vide.

Le nombre demandé est donc $28 - 10 = 18$.

26.6

Notons x, y, z, u, v, w les nombres d'élèves faisant une certaine LV1 et une certaine LV2, sous forme d'un tableau :

LV1 \ LV2	anglais	allemand	espagnol	rien
anglais	/	x	y	z
allemand	u	/	v	w

D'après l'énoncé :

$$x+y+z+u+v+w=30, \quad z=3, \quad x+y+z+u=28$$
$$u+v+w+x=20, \quad z+w=4, \quad x=2u.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système linéaire d'équations. On obtient d'abord $z=3,\ w=4-z=1$, puis :

$$x=2u, \quad 3u+y+v=26, \quad 3u+y=25, \quad 3u+v=19$$

d'où : $\quad v=1, \quad u=6, \quad x=12, \quad y=7.$

Finalement : $x=12, \quad y=7, \quad z=3, \quad u=6, \quad v=1, \quad w=1.$

26.7

a) 1) Le nombre de parties X de E telles que $X \subset A$ est le nombre de parties de A, c'est-à-dire $2^{\#(A)}=2^p$.

2) On a, pour toute partie X de E : $A \subset X \iff \overline{X} \subset \overline{A}$.
L'application $X \longmapsto \overline{X}$ est donc une bijection de l'ensemble des parties X de E telles que $A \subset X$ sur l'ensemble des parties Y de E telles que $Y \subset \overline{A}$.
Le nombre de parties X de E telles que $A \subset X$ est donc $2^{\#(\overline{A})}=2^{n-p}$.

3) On a, pour toute partie X de E :

$$X \cap A = \varnothing \iff X \subset \overline{A}.$$

D'après *1)* appliqué à $\overline{A}$ à la place de A, le nombre de parties X de E telles que $X \cap A = \varnothing$ est donc $2^{\#(\overline{A})}=2^{n-p}$.

4) 1re méthode :

On a, pour toute partie X de E :

$$X \cup A = E \iff \overline{X \cup A} = \varnothing \iff \overline{X} \cap \overline{A} = \varnothing.$$

L'application $X \longmapsto \overline{X}$ est donc une bijection de l'ensemble des parties X de E telles que $X \cup A = E$ sur l'ensemble des parties Y de E telles que $Y \cap \overline{A} = \varnothing$. En appliquant le résultat de *3)* à $\overline{A}$ au lieu de A, on déduit que le nombre cherché est 2^p.

2è méthode :

L'application $Z \longmapsto \overline{A} \cup Z$ est une bijection de l'ensemble de toutes les parties Z de A sur l'ensemble des parties X de E telles que $X \cup A = E$.
Le nombre cherché est donc le nombre de parties de A, c'est-à-dire 2^p.

5) L'application $Z \longmapsto (A \cap B) \cup Z$ est une bijection de l'ensemble des parties de $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ sur l'ensemble des parties X de E telles que $A \cap B \subset X \subset A \cup B$, donc le nombre cherché est le nombre de parties de $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Comme $A \cap B \subset A \cup B$, on a :

$$\begin{aligned}\#\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) &= \#(A \cup B) - \#(A \cap B)\\ &= \#(A)+\#(B)-2\#(A \cap B) = p+q-2r.\end{aligned}$$

Le nombre cherché est donc 2^{p+q-2r}.

b) 1) Le nombre de couples de parties (X,Y) de E telles que $X \subset A \cap B$ et $A \cup B \subset Y$ est le produit du nombre de parties X de E telles que $A \cap B \subset X$ par le nombre de parties Y de E telles que $A \cup B \subset Y$.
D'après *a) 1)* et *2)*, le nombre cherché est donc

$$2^r \times 2^{n-(p+q-r)} = 2^{n-p-q+2r}.$$

2) On a, pour tout couple (X,Y) de parties de E :

$$\begin{cases} A \cap B \subset X \cap Y \\ X \cup Y \subset A \cup B \end{cases} \iff \begin{cases} A \cap B \subset X \ \text{ et } \ A \cap B \subset Y \\ X \subset A \cup B \ \text{ et } \ Y \subset A \cup B \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A \cap B \subset X \subset A \cup B \\ A \cap B \subset Y \subset A \cup B. \end{cases}$$

D'après *a) 5)*, on déduit que le nombre cherché est :

$$(2^{p+q-2r})^2 = 2^{2(p+q-2r)}.$$

26.8

a) La donnée d'un couple (X,Y) de parties de E tel que $X \subset Y$ revient à la donnée d'une partie quelconque Y de E puis d'une partie X de Y.

Soit $k \in \{0,\dots,n\}$. Il y a $\dbinom{n}{k}$ parties Y de E telles que $\#(Y)=k$.
Pour chaque partie Y de E telle que $\#(Y)=k$, il y a 2^k parties X de Y.

Le nombre cherché est donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

On reconnaît le développement de la formule du binôme de Newton : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

On conclut que le nombre de couples (X,Y) de parties de E tels que $X \subset Y$ est 3^n.

b) On a, pour tout couples (X,Y) de parties de E :

$$X \cap Y = \varnothing \iff X \subset \overline{Y}.$$

Le nombre cherché est dont le nombre de couples (X,Z) de parties de E tels que $X \subset Z$, c'est-à-dire, d'après *a)* : 3^n.

c) On a, pour tout couple (X,Y) de parties de E :

$$X \cup Y = E \iff \overline{X \cup Y} = \varnothing \iff \overline{X} \cap \overline{Y} = \varnothing.$$

L'application $(X,Y) \longmapsto (\overline{X},\overline{Y})$ est donc une bijection de l'ensemble des couples (X,Y) de parties de E tels que $X \cup Y = E$ sur l'ensemble des couples (U,V) de parties de E tels que $U \cap V = \varnothing$.

D'après *b)*, le nombre cherché est donc : 3^n.

26.9

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les N-uplets $(x_1,\dots,x_N)$ d'éléments de $\{1,2\}$ tels que $N \in \mathbb{N}^*$ et $x_1+\cdots x_N = n+2$ se répartissent en :

- ceux tels que $x_N=2$, et il y en autant que de $N-1$ uplets $(x_1,\dots,x_{N-1})$ de $\{1,2\}$ tels que $x_1+\cdots+x_{N-1}=n$
- ceux tels que $x_N=1$, et il y en a autant que de $N-1$ uplets $(x_1,\dots,x_{N-1})$ de $\{1,2\}$ tels que $x_1+\cdots+x_{N-1}=n+1$.

D'où : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.
L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux racines réelles et distinctes, $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

On a, par définition, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, d'où :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 1.$$

On déduit : $\lambda_1 = \dfrac{1}{r_1 - r_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

26.10

a) Le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$ est le nombre de parties à p éléments de l'ensemble $\{1, ..., n\}$, donc c'est $\dbinom{n}{p}$.

b) Pour toute application $f : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$, considérons l'application $f^\sharp : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n+p-1\}$ définie par : $\forall i \in \{1, ..., p\}$, $f^\sharp(i) = f(i) + i - 1$.
Il est clair que, pour toute $f : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$, $f^\sharp$ est correctement définie.

D'autre part, pour toute application :

$$g : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n+p-1\},$$

considérons l'application :

$$g^\flat : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$$

définie par :

$$\forall j \in \{1, ..., n+p-1\}, \quad g^\flat(j) = g(j) - j + 1.$$

Il est clair que, pour toute $g : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n+p-1\}$, l'application $g^\flat$ est correctement définie.

De plus, f est croissante si et seulement si $f^\sharp$ est strictement croissante, et g est strictement croissante si et seulement si $g^\flat$ est croissante.

Le nombre d'applications croissantes de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$ est donc égal au nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n+p-1\}$, c'est donc $\dbinom{n+p-1}{p}$, d'après *a)*.

c) Notons C (resp. D, resp. F, resp. M) l'ensemble des applications de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$, croissantes (resp. décroissantes, resp. constantes, resp. monotones).
On a donc : $\quad C \cup D = M, \quad C \cap D = F$.

D'où :

$$\#(M) = \#(C \cup D) = \#(C) + \#(D) - \#(C \cap D) = \#(C) + \#(D) - \#(F).$$

On a vu en *b)* : $\#(C) = \dbinom{n+p-1}{p}$.

Il est clair que l'application qui, à $f \in C$, associe

$$g : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}, \quad i \longmapsto n + 1 - f(i)$$

est une bijection de C sur D, donc : $\#(D) = \#(C)$.

Enfin, à l'évidence : $\#(F) = p$.

D'où : $$\#(M) = 2\binom{n+p-1}{p} - p.$$

d) Avec les notations précédentes et en notant E l'ensemble de toutes les applications de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$ et N l'ensemble des applications non monotones, on a :

$$\#(N) = \#(E) - \#(M) = n^p - 2\binom{n+p-1}{p} + p.$$

26.11

1) On a, pour tout $(X, Y) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\#(X \cap Y) + \#(X \cap \overline{Y}) + \#(\overline{X} \cap Y) + \#(\overline{X} \cap \overline{Y}) = \#(E) = n.$$

D'autre part, les trois applications qui à (X, Y) associent respectivement $(X, \overline{Y})$, $(\overline{X}, Y)$, $(\overline{X}, \overline{Y})$ sont des bijections de $\big(\mathcal{P}(E)\big)^2$ sur lui-même. On a donc, les sommes étant toutes indexées par $(X, Y) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$S_n = \sum \#(X \cap Y) = \sum \#(X \cap \overline{Y}) = \sum \#(\overline{X} \cap Y) = \sum \#(\overline{X} \cap \overline{Y}).$$

En sommant la relation obtenue au début, on a donc :

$$4S_n = n\sum 1 = n\,\#\big(\mathcal{P}(E)\big)^2 = n\big(\#\mathcal{P}(E)\big)^2 = n(2^n)^2 = n2^{2n}.$$

On conclut : $\qquad S_n = n2^{2n-2}$.

2) L'application qui à (X, Y) associe $(\overline{X}, \overline{Y})$ est une bijection de $\big(\mathcal{P}(E)\big)^2$ sur lui-même, donc :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum \#(X \cup Y) = \sum \#(\overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}) \\ &= \sum \big(n - \#(\overline{X} \cap \overline{Y})\big) = n\sum 1 - \sum \#(\overline{X} \cap \overline{Y}) \\ &= n\sum 1 - \sum \#(X \cap Y) = n(2^n)^2 - S_n = 3n2^{2n-2}. \end{aligned}$$

26.12

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
La donnée d'une partition de $\{1, ..., n+1\}$ est définie par :
$\star$ la donnée d'une partie A de $\{1, ..., n+1\}$ telle que $n+1 \in A$, et il y a $\dbinom{n}{k}$ possibilités, où $k = \#(A) - 1$
$\star$ puis la donnée d'une partition de $\{1, ..., n+1\} \setminus A$, et il y en a P_{n-k} possibilités.

D'où : $$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k.$$

b) On obtient successivement :

$P_0 = 1$,

$$P_1 = \binom{0}{0} P_0 = 1,$$

$$P_2 = \binom{1}{0} P_0 + \binom{1}{1} P_1 = 2,$$

$$P_3 = \binom{2}{0} P_0 + \binom{2}{1} P_1 + \binom{2}{2} P_2 = 5,$$

$$P_4 = \binom{3}{0} P_0 + \binom{3}{1} P_1 + \binom{3}{2} P_2 + \binom{3}{3} P_3 = 15,$$

$$P_5 = \binom{4}{0} P_0 + \binom{4}{1} P_1 + \binom{4}{2} P_2 + \binom{4}{3} P_3 + \binom{4}{4} P_4 = 52.$$

26.13

a) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Les $p+1$-partitions de $\{1,...,n+1\}$ sont :

• d'une part, celles qui contiennent le singleton $\{n+1\}$, et il y en a $P_{n,p}$

• d'autre part, celles qui ne contiennent pas le singleton $\{n+1\}$, c'est-à-dire celles pour lesquelles $n+1$ est associé avec une partie non vide de $\{1,...,n\}$, et il y en a $(p+1)P_{n,p+1}$.

On conclut : $\quad P_{n+1,p+1} = P_{n,p} + (p+1)P_{n,p+1}$.

b) Remarquons que, puisque les éléments d'une partition sont tous non vides, on a : $p > n \implies P_{n,p} = 0$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a une 1-partition et une seule, qui est $\big\{\{1,...,n\}\big\}$, donc $P_{n,1} = 1$, et il y a une n-partition et une seule, qui est $\big\{\{1\},...,\{n\}\big\}$, donc $P_{n,n} = 1$.

La formule du *a)* permet alors de calculer les $P_{n,p}$ de proche en proche :

$$P_{3,2} = P_{2,1} + 2P_{2,2} = 1 + 2 = 3,$$

$$P_{4,2} = P_{3,1} + 2P_{3,2} = 1 + 2 \cdot 3 = 7,$$

$$P_{4,3} = P_{3,2} + 3P_{3,3} = 3 + 3 \cdot 1 = 6, ...$$

On consigne les résultats dans un tableau :

p \ n	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

c) 1) D'après *a)*, en remplaçant p par 1, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad P_{n+1,2} = P_{n,1} + 2P_{n,2} = 1 + 2P_{n,2}$,

d'où : $\qquad P_{n+1,2} + 1 = 2(P_{n,2} + 1)$.

La suite $(P_{n,2}+1)_{n \geqslant 1}$ est donc une suite géométrique de raison 2, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1,2} + 1 = 2^n(P_{1,2}+1) = 2^n$,

et on conclut : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1,2} = 2^n - 1$.

La formule obtenue est aussi vraie pour $n = 0$, puisque $P_{1,2} = 0 = 2^0 - 1$.

2) Démontrons la formule demandée, par récurrence (par exemple).

⋆ La formule est vraie pour $n = 1$, car $P_{2,3} = 0$ et $\dfrac{3^1 2 - 2^2 + 1}{2} = 0$.

⋆ Si la formule est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$, alors, d'après *a)* :

$$P_{n+2,3} = P_{n+1,2} + 3P_{n+1,3} = (2^n - 1) + 3\frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}$$
$$= \frac{2^{n+1} - 2 + 3^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} + 3}{2} = \frac{3^{n+1} - 2^{n+2} + 1}{2},$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1,3} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}.$$

3) La donnée d'une n-partition de $\{1,...,n+1\}$ revient à la donnée d'une paire d'éléments de $\{1,...,n+1\}$. Par exemple, la donnée de la 5-partition $\big\{\{1\},\{2\},\{3,5\},\{4\},\{6\}\big\}$ de $\{1,...,6\}$ revient à la donnée de la paire $\{3,5\}$.

On a donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1,n} = \dbinom{n+1}{2} = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

Remarque : On peut contrôler la cohérence des formules obtenues en *c)* par rapport aux valeurs numériques obtenues en *b)*.

Vrai ou Faux ?

26.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de couples (x, y) de $\{1, ..., n\}^2$ tels que $x < y$ est $\dfrac{n(n-1)}{2}$. V F

26.2 On a, pour tous ensembles finis A, B : $\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card}(A) - \operatorname{Card}(B)$. V F

26.3 On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous ensembles finis $A_1, ..., A_n$: V F

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Card}(A_k).$$

26.4 Soient E un ensemble fini, $f, g : E \longrightarrow E$. V F
Si $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$.

26.5 On a, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n$: $\dbinom{n+1}{p} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p-1}$. V F

26.6 On a, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n$: $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$. V F

26.7 Si E, F sont des ensembles finis, et si $f : E \longrightarrow F$ est une application injective, alors f est surjective. V F

26.8 Si E, F sont des ensembles finis, alors le cardinal de l'ensemble des applications de E dans F est $\big(\operatorname{Card}(E)\big)^{\operatorname{Card}(F)}$. V F

26.9 Si deux ensembles E, F sont finis, si $E \subset F$ et si $\operatorname{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = \operatorname{Card}\big(\mathcal{P}(F)\big)$, alors $E = F$. V F

26.10 Le nombre d'applications injectives d'un ensemble fini de cardinal p dans un ensemble fini de cardinal n, où $p \leqslant n$, est $\dbinom{n}{p}$. V F

Vrai ou Faux, les réponses

26.1 Il s'agit du nombre de parties à deux éléments d'un ensemble à n éléments, donc c'est $\binom{n}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{n(n-1)}{2}$. **V**

26.2 Contrexemple : $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2\}$, $A \setminus B = \{1\}$. **F**
La formule correcte est : $\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card}(A) - \operatorname{Card}(A \cap B)$.
Si $B \subset A$, alors on a bien : $\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card}(A) - \operatorname{Card}(B)$.

26.3 Démonstration par récurrence sur n. **V**

26.4 L'application f est injective, car, pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$. Puisque f est injective et que E est fini, f est bijective, puis $g = f^{-1}$, donc g est bijective. **V**

26.5 C'est la formule de Pascal, plus souvent écrite sous la forme : **V**
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

26.6 On a : $p\dbinom{n}{p} = p\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n\dbinom{n-1}{p-1}$. **V**

26.7 Il y a eu oubli de l'hypothèse : $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$. **F**
Le résultat correct est : si les ensembles E et F sont finis et de même cardinal et si $f : E \longrightarrow F$ est injective, alors f est surjective.

26.8 Il y a eu interversion de E et F, le résultat correct est : $\big(\operatorname{Card}(F)\big)^{\operatorname{Card}(E)}$. **F**

26.9 En notant $n = \operatorname{Card}(E)$, $p = \operatorname{Card}(F)$, on a : $2^n = \operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F) = 2^p$, donc $n = p$, puis, comme $E \subset F$, on conclut $E = F$. **V**

26.10 C'est un résultat du cours. **V**

Chapitre 27

Probabilités sur un univers fini

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Expérience aléatoires, univers des possibles, événements
- Probabilité, probabilité uniforme
- Probabilité conditionnelle
- Indépendance d'événements.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Vocabulaire probabiliste : événement élémentaire, événement certain, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements
- Définition d'une probabilité, de la probabilité uniforme
- Propriétés d'une probabilité : probabilité d'un événement contraire, probabilité d'une réunion (formule de Poincaré ou du crible)
- Probabilité conditionnelle : définition et notation $P_A(B)$, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
- Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de n événements.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer la probabilité d'un événement A

Dans les exemples les plus simples, préciser l'univers des possibles Ω (supposé fini) lié à l'expérience aléatoire, et écrire A comme un sous-ensemble de Ω :

- s'il y a équiprobabilité des événements élémentaires, alors :
$$P(A) = \frac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$
- sinon, il faut calculer les probabilités des événements élémentaires $P\big(\{\omega\}\big)$, pour tout $\omega \in \Omega$, et utiliser : $P(A) = \sum_{\omega \in A} P\big(\{\omega\}\big)$.

➟ **Exercices 27.1 à 27.4, 27.6**

Exemple

On lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) un double ?

b) une somme des deux dés égale à 9 ?

c) un minimum des deux dés égal à 4 ?

L'ensemble Ω des résultats possibles est $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$, donc $\text{Card}\,(\Omega) = 6^2 = 36$.
La probabilité P est ici la probabilité uniforme sur Ω.

a) L'événement A « obtenir un double » est
$$A = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\},$$
donc $\text{Card}\,(A) = 6$, puis : $P(A) = \dfrac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

b) L'événement B « obtenir une somme égale à 9 » est
$$B = \{(3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3)\},$$
donc $\text{Card}\,(B) = 4$, puis : $P(B) = \dfrac{\text{Card}\,(B)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

c) L'événement C « obtenir un minimum des dés égal à 4 » est
$$C = \{(4,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,4),\ (6,4)\},$$
donc $\text{Card}\,(C) = 5$, puis : $P(C) = \dfrac{\text{Card}\,(C)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{5}{36}$.

Méthode

Pour calculer la probabilité d'un événement A à l'aide des opérations sur les événements

Essayer de :

- utiliser l'événement contraire $\overline{A}$, et dans ce cas :
$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$
- décomposer A sous la forme $A = B \setminus C$, et dans ce cas :
$$P(A) = P(B \setminus C) = P(B) - P(B \cap C)\,;$$
si de plus C implique B (c'est-à-dire $C \subset B$), alors :
$$P(A) = P(B \setminus C) = P(B) - P(C)$$

- décomposer A sous la forme $A = B \cup C$, et dans ce cas :
$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)\,;$$
si de plus B et C sont incompatibles (c'est-à-dire $B \cap C = \varnothing$), alors :
$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C).$$

➟ **Exercices 27.6, 27.8, 27.14**

Exemple

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un nombre pair en lançant 5 fois un dé équilibré à 6 faces ?

L'ensemble Ω des résultats possibles est $\Omega = \{1, ..., 6\}^5$, donc $\mathrm{Card}\,(\Omega) = 6^5$.
La probabilité P est ici la probabilité uniforme sur Ω.

Notons A l'événement « au cours des 5 lancers, on obtient au moins une fois un nombre pair ».

Alors, l'événement contraire $\overline{A}$ est « les 5 résultats obtenus sont tous impairs », donc $\overline{A} = \{1,\, 3,\, 5\}^5$, d'où : $\mathrm{Card}\,(\overline{A}) = 3^5$, puis :
$$P(\overline{A}) = \frac{\mathrm{Card}\,(\overline{A})}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \frac{3^5}{6^5} = \frac{1}{2^5}.$$

On déduit : $\quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{31}{32} \simeq 0,969\,.$

Méthode

Pour calculer la probabilité d'une réunion finie d'événements deux à deux incompatibles
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Si les événements A_k sont deux à deux incompatibles, alors :
$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

➟ **Exercices 27.8, 27.11, 27.13**

Exemple

On lance simultanément trois dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir : 421 ou trois chiffres pairs ou trois chiffres impairs ?

L'ensemble Ω des résultats est $\Omega = \{1, ..., 6\}^3$ et la probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω.

L'événement A « obtenir 421 » est l'ensemble des triplets formés par $1, 2, 4$ dans n'importe quel ordre, donc $\mathrm{Card}\,(A) = 6$, puis :
$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

L'événement B « obtenir trois chiffres pairs » est $B = \{2, 4, 6\}^3$, donc $\mathrm{Card}\,(B) = 3^3$, puis : $\quad P(B) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(B)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{3^3}{6^3} = \dfrac{1}{8}.$

De même, en notant C l'événement « obtenir trois chiffres impairs », on a : $\quad P(C) = \dfrac{1}{8}.$

L'événement D de l'énoncé est $D = A \cup B \cup C$. Il est clair que A, B, C sont deux à deux incompatibles, donc, d'après le cours :
$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{36} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{18}.$$

Méthode

Pour calculer la probabilité d'une intersection finie d'événements $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$

- Si les événements A_k sont mutuellement indépendants, alors :
$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$$
- Sinon, on utilise la formule des probabilités composées :
$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2, \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n),$$
à condition que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$
- On peut aussi essayer de calculer la probabilité de l'événement contraire : $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$. On se ramène alors au calcul de la probabilité d'une réunion finie d'événements.

➟ **Exercices 27.8, 27.9, 27.11**

Exemple

Une urne contient 12 boules : 8 boules blanches et 4 boules noires.

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches et une boule noire dans cet ordre ?

Notons, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, B_k l'événement « on obtient une boule blanche au k-ème tirage », et N_k l'événement « on obtient une boule noire au k-ème tirage ».

L'énoncé demande la probabilité de $B_1 \cap B_2 \cap N_3$.

Les événements B_1, B_2, N_3 ne sont pas indépendants, car les tirages se font sans remise. On va donc appliquer la formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) &= P(B_1)\, P_{B_1}(B_2)\, P_{B_1 \cap B_2}(N_3) \\ &= \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{165} \simeq 0{,}170\,. \end{aligned}$$

Méthode

Pour calculer la probabilité d'un événement B en fonction de probabilités conditionnelles liées à cet événement

Utiliser la formule des probabilités totales : soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ un système complet d'événements tels que : $\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad P(A_k) \neq 0$;
alors pour tout événement B :
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B).$$
Cette formule est souvent utilisée lorsqu'une expérience se réalise en plusieurs temps, et que l'on s'intéresse au résultat final

➟ **Exercices 27.10, 27.12 à 27.15**

Exemple

Une urne U_1 contient 5 boules : 3 boules blanches et 2 boules noires, et une urne U_2 contient 12 boules : 6 boules blanches et 6 boules noires.

On tire une boule de U_1, puis on la place dans U_2, puis on tire une boule de U_2.

Quelle est la probabilité d'obtenir au final une boule blanche ?

Notons B_1 (resp. N_1) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) de U_1 », et B_2 (resp. N_2) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) de U_2 au final ».
L'énoncé demande $P(B_2)$.

Puisque la composition de l'urne U_2 dépend du premier tirage, nous allons utiliser la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements (B_1, N_1).

On a, d'après le cours :

$$\begin{aligned}P(B_2) &= P(B_1)\,P_{B_1}(B_2) + P(N_1)\,P_{N_1}(B_2)\\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{13} + \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{13} = \frac{33}{65} \simeq 0,508\,.\end{aligned}$$

Méthode

Pour calculer la probabilité d'une cause A sachant une conséquence B

Utiliser la formule de Bayes : $\quad P_B(A) = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$,

à condition que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Cette formule est aussi appelée la formule de probabilité des causes : elle permet de « remonter le temps ». Très souvent, pour calculer le dénominateur $P(B)$, on utilise la formule des probabilités totales

Exemple

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces, d'une urne U contenant initialement 20 boules : 10 boules blanches et 10 boules noires, et on dispose de 6 boules blanches et 6 boules noires supplémentaires.

On lance le dé, on note i le numéro sorti, on place dans U (en plus des 20 boules qui y sont déjà) i boules blanches et $6-i$ boules noires, puis on tire une boule au hasard dans U.

Sachant que la boule sortie de U au final est noire, quelle est la probabilité d'avoir obtenu un 4 au dé ?

Notons, pour tout $i \in \{1, ..., 6\}$, D_i l'événement « le lancer du dé donne le numéro i » et A l'événement « on tire au final une boule noire de U ».
L'énoncé demande $P_A(D_4)$.

On a : $\qquad \forall i \in \{1, ..., 6\}, \quad P(D_i) = \dfrac{1}{6}.$

• Calculons $P_{D_i}(A)$ pour tout $i \in \{1, ..., 6\}$.

Ayant obtenu le numéro i au lancer du dé, on a placé i boules blanches et $6-i$ boules noires dans U, donc U contient $10+i$ boules blanches et $16-i$ boules noires, d'où : $\quad P_{D_i}(A) = \dfrac{16-i}{26}.$

• Calculons $P(A)$ en utilisant la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(D_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$:

$$\begin{aligned}P(A) &= \sum_{i=1}^{6} P(D_i)\,P_{D_i}(A) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\cdot\frac{16-i}{26}\\ &= \frac{1}{156}\Big(\sum_{i=1}^{6} 16 - \sum_{i=1}^{6} i\Big) = \frac{1}{156}\Big(6\cdot 16 - \frac{6\cdot 7}{2}\Big) = \frac{75}{156}.\end{aligned}$$

• D'après la formule de Bayes :

$$P_A(D_4) = \frac{P(D_4)P_{D_4}(A)}{P(A)} = \frac{\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{16-4}{26}}{\dfrac{75}{156}} = \frac{12}{75} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

Méthode

Pour montrer l'indépendance d'événements

- Deux événements A et B sont indépendantes lorsque :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
- Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants lorsque : $P_A(B) = P(B)$ ou encore $P_B(A) = P(A)$
- Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants lorsque, pour toute partie non vide I de $\{1, ..., n\}$,
$$P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

➟ **Exercices 27.5, 27.8**

Exemple

On lance une fois une pièce équilibrée. On note A l'événement « on obtient face », et B l'événement « on obtient pile ». Est-ce que A et B sont indépendants ?

On a : $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ et $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, donc $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ et on conclut, par la définition, que A et B ne sont pas indépendants.

Attention à ne pas confondre la notion d'indépendance et la notion d'incompatibilité. Si deux événements sont incompatibles, alors en général, ils ne sont pas indépendants, puisque la réalisation de l'un est liée à la (non-)réalisation de l'autre.

Exemple

On effectue deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.

On note A l'événement « on obtient face au premier lancer », B l'événement « on obtient pile au premier lancer », C l'événement « on obtient deux résultats différents aux deux lancers ».

Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

Est-ce que les événements A et C sont indépendants ?

En notant F pour face et P pour pile, l'ensemble Ω des résultats possibles est $\Omega = \{(F, F), (F, P), (P, F), (P, P)\}$ et on a :

$$A = \big\{(F, F), (F, P)\big\}, \; B = \big\{(P, F), (P, P)\big\}, \; C = \big\{(F, P), (P, F)\big\}$$

d'où aussi : $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \{(F, P)\}$.

On déduit :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = 0, \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4}.$$

On a donc : $P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$.

On conclut que A et B ne sont pas indépendants, et que A et C sont indépendants.

Énoncés des exercices

27.1 Lancers de deux dés

On lance deux dés (à 6 faces) équilibrés discernables. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) un double

b) une somme des deux dés égale à 8

c) au moins un six.

27.2 Tirages dans une urne, obtention de boules de même couleur

Une urne contient 20 boules : 5 boules blanches, 5 boules rouges et 10 boules noires.

a) On tire 3 boules, successivement et avec remise à chaque tirage.

Calculer la probabilité que le tirage soit :

1) tricolore *2)* bicolore *3)* unicolore.

b) On tire 3 boules simultanément. Reprendre les questions précédentes.

27.3 Tirages dans une urne, obtention de boules de même parité

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans les différents cas suivants :

a) on tire les 2 boules simultanément,

b) on tire une boule, on ne la remet pas, puis on tire la seconde,

c) on tire une boule, on la remet, puis on tire la seconde.

27.4 Tirages successifs dans une urne

Une urne contient 9 boules : 5 boules blanches et 4 boules noires.
On tire successivement et sans remise 4 boules de cette urne.
Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 2 boules noires dans cet ordre.

27.5 Événements 2 à 2 indépendants, non mutuellement indépendants

On lance deux fois de suite un dé (à 6 faces) équilibré. On définit les événements :

A : le premier lancer amène un chiffre pair,

B : le deuxième lancer amène un chiffre impair,

C : l'un des lancers amène un chiffre pair, l'autre un chiffre impair.

a) Montrer que les événements A et B sont indépendants, que les événements A et C sont indépendants, que les événements B et C sont indépendants.

b) Les événements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

27.6 Reconstitution de paires de chaussures

Dix paires de chaussures toutes différentes sont rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :

a) d'obtenir deux paires de chaussures ?

b) d'obtenir au moins une paire de chaussures ?

c) d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

27.7 Probabilités conditionnelles

On dispose de trois urnes $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$, dont chacune contient exactement 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire une boule de $\mathcal{U}_1$ et une boule dans $\mathcal{U}_2$, puis on les place dans l'urne $\mathcal{U}_3$. On tire alors une boule dans $\mathcal{U}_3$.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules noires ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche dans $\mathcal{U}_3$?

c) On a obtenu une boule blanche dans $\mathcal{U}_3$. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule blanche dans $\mathcal{U}_1$ et une boule blanche dans $\mathcal{U}_2$?

27.8 Événements indépendants

Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On effectue n tirages avec remise de la boule tirée. On définit les événements

A_n : « on obtient, au cours des n tirages, des boules des deux couleurs »

B_n : « on obtient, au cours des n tirages, au plus une boule rouge ».

a) Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, $P(A_n)$ et $P(B_n)$.

b) Étudier l'indépendance des événements A_n et B_n lorsque $n = 2$.

c) Étudier l'indépendance des événements A_n et B_n lorsque $n = 3$.

d) Étudier l'indépendance des événements A_n et B_n dans le cas général.

27.9 Clefs pour l'ouverture d'une porte

Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clefs, dont une et une seule convient. Il essaie les clefs au hasard les unes après les autres. Calculer, pour tout k de $\{1, ..., n\}$, la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

27.10 Tirages dans une urne à contenu aléatoire

Soit $n \geqslant 2$. On dispose de n cartons numérotés de 1 à n. On prend un carton au hasard. Si l'on obtient le carton numéro i, pour $i \in \{1, ..., n\}$, on place alors dans une urne i boules blanches et $n - i$ boules noires. On tire alors successivement et avec remise deux boules de cette urne.

a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

b) On a tiré deux boules blanches. Quelle est la probabilité d'avoir pris le carton numéro n ?

27.11 Transmission d'un message

Des personnes se transmettent une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$), et la transmet fidèlement avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que la n-ième personne reçoive l'information non déformée (cela ne veut pas nécessairement dire que la n-ième personne a transmis fidèlement le message). Ainsi, $p_1 = 1$.

a) Exprimer, pour n de $\mathbb{N}^*$, p_{n+1} en fonction de p_n.

b) En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique, puis exprimer p_n en fonction de n et de p.

c) Calculer : $\lim\limits_{n\infty} p_n$. Que remarque-t-on ?

27.12 Tirages dans des urnes de façon aléatoire

On considère deux urnes A et B dont chacune contient des boules noires et des boules blanches. La probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne A est a (avec $0 < a < 1$), et la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne B est b (avec $0 < b < 1$).

a) On effectue N tirages successifs, avec remise de la boule dans l'urne d'où elle provient, et ceci de la façon suivante :

⋆ pour le premier tirage, on choisit l'une des deux urnes au hasard et on tire une boule de cette urne ;

⋆ si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne; et si elle est noire, on tire la boule suivante dans l'autre urne ;

⋆ on continue suivant la même règle jusqu'au N-ième tirage.

Pour tout entier n de $\{1, ..., N\}$, on définit :

A_n : le n-ième tirage est effectué dans l'urne A et $q_n = P(A_n)$,

BL_n : la n-ième boule tirée est blanche et $p_n = P(BL_n)$.

beginenumerate

b) Calculer q_1, p_1, q_2, p_2.

c) Pour tout n de $\{2, ..., N\}$, déterminer une relation entre q_n et q_{n-1}.
En déduire une expression de q_n en fonction de a, b et n.

d) Pour tout n de $\{1, ..., N\}$, déterminer une relation entre p_n et q_n.
En déduire une expression de p_n en fonction de a, b et n.

27.13 Un jeu de pile ou face

Soit n un entier naturel non nul. Camille lance une pièce de monnaie qui amène pile avec la probabilité a (avec $0 < a < 1$). Elle marque un point si elle obtient pile et marque deux points si elle obtient face. Le jeu s'arrête dès qu'elle atteint ou dépasse n points.

On note p_n la probabilité qu'elle marque exactement n points.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Montrer : $\forall n \geqslant 1, \quad p_{n+2} = a\,p_{n+1} + (1-a)\,p_n$.

c) En déduire une expression de p_n en fonction de n et de a.

27.14 Tirages dans une urne, obtention d'une boule blanche

On dispose d'une urne contenant b boules blanches, n boules noires et r boules rouges. On effectue des tirages successifs dans cette urne.

Si l'on obtient une boule blanche, on gagne ; si l'on obtient une boule noire, on perd ; et si l'on obtient une boule rouge, on ne remet pas la boule rouge dans l'urne et on effectue un nouveau tirage.

On note p_r la probabilité de gagner la partie.

a) Calculer p_0 et p_1.

b) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, exprimer p_{r+1} en fonction de p_r.

c) En déduire que la suite $(p_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est constante.

27.15 Déplacement d'un mobile aux sommets d'un triangle

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle A B C de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste avec une probabilité de $2/3$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets.

Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements A_n (resp. B_n, C_n) :

le mobile se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n,

et les probabilités $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

c) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n) \quad$ et $\quad a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - c_n).$

d) En déduire une expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n.

Du mal à démarrer ?

27.1 Noter Ω l'ensemble des résultats possibles.
Alors $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$, et on est dans le cas d'équiprobabilité. Décrire les événements comme des parties de Ω.

a) L'événement A : « on obtient un double » est l'ensemble :
$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}.$$

b) L'événement B : « on obtient une somme égale à 8 » est l'ensemble :
$$B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}.$$

c) Pour l'événement C : « on obtient au moins un six », utiliser l'événement $\overline{C}$: on n'obtient aucun six.

27.2 Noter Ω l'ensemble des tirages possibles. Alors :

a) $\operatorname{Card}(\Omega) = 20^3$

b) $\operatorname{Card}(\Omega) = \binom{20}{3}$.

Dans les deux questions, on est dans le cas d'équiprobabilité.
Décrire les événements « le tirage est tricolore », « le tirage est unicolore », « le tirage est bicolore » à l'aide d'événements élémentaires.

27.3 Noter Ω l'ensemble des tirages possibles. Alors :

a) $\operatorname{Card}(\Omega) = \binom{9}{2}$

b) $\operatorname{Card}(\Omega) = 9 \times 8$

c) $\operatorname{Card}(\Omega) = 9^2$.

Dans les trois questions, on est dans le cas d'équiprobabilité.
Décomposer l'événement « on obtient des boules de même parité » en « on obtient des boules paires » ou « on obtient des boules impaires ».

27.4 Noter B_k (resp. N_k) l'événement : « on obtient une boule blanche (resp. noire) au k-ième tirage ».
Ensuite calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$ à l'aide de la formule des probabilités composées.

27.5 Utiliser la définition de l'indépendance de deux événements, puis de trois événements.

27.6 Noter Ω l'ensemble des choix possibles.
Alors $\operatorname{Card}(\Omega) = \binom{20}{4}$, et on est dans le cas d'équiprobabilité.

a) En notant A : « on obtient deux paires de chaussures », alors $\operatorname{Card}(A) = \binom{10}{2}$.

b) Pour l'événement B : « on obtient au moins une paire de chaussures », calculer dans un premier temps $\operatorname{Card}(\overline{B})$.

c) En notant C l'événement : « on obtient une et une seule paire de chaussures », remarquer que $C = B \backslash A$.

27.7 Noter, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, B_i (resp. N_i) l'événement : « on tire une boule blanche (resp. noire) dans $\mathcal{U}_i$ ».

a) Calculer $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$ à l'aide de la formule des probabilités composées.

b) Calculer $P(B_3)$ à l'aide de la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements
$(B_1 \cap B_2,\ B_1 \cap N_2,\ N_1 \cap B_2,\ N_1 \cap N_2)$.

c) Calculer $P_{B_3}(B_1 \cap B_2)$ à l'aide de la formule de Bayes.

27.8 *a)* Immédiat.

b) Utiliser la définition de l'indépendance de deux événements.

c) Utiliser la définition de l'indépendance de deux événements.

d) Étudier la suite de terme général $u_n = 2^{n-1} - n - 1$ et montrer que : $u_n = 0 \iff n = 3$.

27.9 Noter, pour tout k de $\{1, ..., n\}$, A_k : « la porte s'ouvre à la k-ième tentative, et pas avant ».
Écrire $A_k = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$, puis calculer $P(A_k)$ à l'aide de la formule des probabilités composées.

27.10 Noter, pour tout i de $\{1, ..., n\}$, C_i :
« on obtient le carton numéro i ».

a) Calculer la probabilité de l'événement A à l'aide de la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

b) Utiliser la formule de Bayes.

27.11 *a)* Définir les événements A_n : « la n-ième personne reçoit l'information non déformée » et B_n « la n-ième transforme l'information reçue en son contraire ».
Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n, $\overline{A_n}$, B_n, $\overline{B_n}$.

b) Obtenir une suite arithmético-géométrique.

c) Immédiat.

27.12 *a)* Décrire les événements A_1, BL_1, A_2, BL_2.

b) Exprimer l'événement A_{n+1} en fonction des événements A_n, $\overline{A_n}$, BL_n, $\overline{BL_n}$.

c) Calculer $P(BL_n)$ à l'aide de la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$.

27.13 Noter A_n l'événement :
« Camille marque exactement n points ».

a) Décrire les événements A_1 et A_2.

b) Noter P_k (resp. F_k) l'événement :
« Camille obtient pile (resp. face) au k-ième lancer ».
Pour calculer $P(A_{n+2})$, utiliser la formule des probabilités totales avec comme système complet d'événements (P_1, F_1). Remarquer :

$$P_{P_1}(A_{n+2}) = P(A_{n+1}) \text{ et } P_{F_1}(A_{n+2}) = P(A_n).$$

c) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre.

27.14 Noter B_k (resp. N_k, R_k) l'événement : « on obtient une boule blanche (resp. noire, rouge) au k-ième tirage » et G l'événement : « on gagne la partie ».

a) Écrire la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $\big(B_1, N_1, R_1\big)$. Puis remarquer que $P_{B_1}(G) = 1$, $P_{N_1}(G) = 0$, $P_{R_1}(G) = p_r$.

b) Montrer par récurrence sur r que : $\quad p_r = \dfrac{b}{n+b}$.

27.15 *a)* Remarquer que les événements A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements.
Donc : $\quad P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1.$

b) Utiliser la formule des probabilités totales avec comme système complet d'événements $\big(A_n,\, B_n,\, C_n\big)$.

c) Immédiat.

d) Les suites $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n - b_n = \frac{1}{2^n} = a_n - c_n$$

Utiliser la relation du *a)* pour en déduire une expression de a_n, puis de b_n et de c_n en fonction de n.

Corrigés des exercices

27.1

Notons Ω l'ensemble des résultats possibles.
Ainsi $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$, et donc $\text{Card}\,(\Omega) = 6^2 = 36$.
Tous les résultats étant équiprobables, P est la probabilité uniforme sur Ω.

a) On note A l'événement : « on obtient un double ».

Alors : $\quad A = \Big\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\Big\}$.

Donc : $\quad P(A) = \dfrac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

b) On note B l'événement : « la somme des deux dés est 8 ».

Alors : $\quad B = \Big\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\Big\}$.

Donc : $\quad P(B) = \dfrac{\text{Card}\,(B)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{5}{36}$.

c) On note C l'événement : « on obtient un moins un six ».
Alors $\overline{C}$ est l'événement : « n n'obtient aucun six ».

Ainsi : $\quad \overline{C} = \{1, ..., 5\}^2 \quad$ et $\quad P(\overline{C}) = \dfrac{\text{Card}\,(\overline{C})}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{25}{36}$.

Donc : $\quad P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{25}{36} = \dfrac{11}{36}$.

27.2

a) Considérons le tirage successif de trois boules avec remise.

Notons Ω l'ensemble des résultats possibles. L'ensemble Ω est alors l'ensemble des triplets de $\{1, ..., 20\}$.

Donc : $\quad \text{Card}\,(\Omega) = 20^3 = 8000$.

Tous les triplets étant équiprobables, P est la probabilité uniforme sur Ω.

1) Considérons l'événement A : « le tirage est tricolore ».

Pour réaliser A, il faut tirer une boule blanche, une boule rouge et une boule noire, dans n'importe quel ordre.

Ainsi $\text{Card}\,(A) = 5 \times 5 \times 10 \times 3!$ (il y a $3!$ ordres possibles des trois boules).

Donc : $\quad P(A) = \dfrac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{5 \times 5 \times 10 \times 3!}{20^3} = \dfrac{3}{16}$.

2) Considérons l'événement B : « le tirage est bicolore ».

Pour réaliser B, il faut tirer :

- une boule blanche et deux boules rouges (pas nécessairement dans cet ordre, mais seule la place de la boule blanche est à fixer, les boules rouges se plaçant dans les deux places restantes) : il y a $5 \times 5^2 \times 3 = 375$ cas favorables,

- deux boules blanches et une boule rouge (pas nécessairement dans cet ordre) : il y a $5^2 \times 5 \times 3 = 375$ cas favorables,

- une boule blanche et deux boules noires (pas nécessairement dans cet ordre) : il y a $5 \times 10^2 \times 3 = 1500$ cas favorables,

- deux boules blanches et une boule noire (pas nécessairement dans cet ordre) : il y a $5^2 \times 10 \times 3 = 750$ cas favorables,

- une boule rouge et deux boules noires (pas nécessairement dans cet ordre) : il y a $5 \times 10^2 \times 3 = 1500$ cas favorables,

- deux boules rouges et une boule noire (pas nécessairement dans cet ordre) : il y a $5^2 \times 10 \times 3 = 750$ cas favorables.

Tous ces cas étant deux à deux incompatibles,

$\mathrm{Card}\,(B) = 375 + 375 + 1500 + 750 + 1500 + 750 = 5250.$

Donc : $\quad P(B) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(B)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{5250}{8000} = \dfrac{21}{32}.$

3) Considérons l'événement C : « le tirage est unicolore ».

Pour réaliser C, il faut tirer :

- trois boules blanches : il y a $5^3 = 125$ cas favorables,

- trois boules rouges : il y a $5^3 = 125$ cas favorables,

- trois boules noires : il y a $10^3 = 1000$ cas favorables.

Tous ces cas étant deux à deux incompatibles,

$\mathrm{Card}\,(C) = 125 + 125 + 1000 = 1250.$

Donc : $\quad P(C) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(C)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{1250}{8000} = \dfrac{5}{32}.$

Remarque : $P(A) + P(B) + P(C) = \dfrac{3}{16} + \dfrac{21}{32} + \dfrac{5}{32} = 1.$

Ce résultat est normal puisque (A, B, C) est un système complet d'événements. Il aurait été plus simple de le remarquer dès le départ, de calculer $P(A)$ et $P(C)$ (qui sont les plus simples) puis d'en déduire $P(B)$.

b) Considérons le tirage simultané de trois boules.
Dans ce cas, Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments de $\{1, ..., 20\}$, donc $\mathrm{Card}\,(\Omega) = \dbinom{20}{3} = 1140.$

Toutes les parties étant équiprobables, P est encore la probabilité uniforme sur Ω. Conservons les mêmes notations que dans le *a)*.

1) Pour réaliser A, il faut tirer une boule blanche, une boule rouge et une boule noire, l'ordre n'intervenant pas ici.
Ainsi $\mathrm{Card}\,(A) = 5 \times 5 \times 10 = 250.$

Donc : $\quad P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{250}{1140} = \dfrac{25}{114}.$

2) Pour réaliser B, il faut tirer : - une boule blanche et deux boules rouges (l'ordre n'intervient pas) : il y a $5 \times \dbinom{5}{2} = 50$ cas favorables,

- deux boules blanches et une boule rouge :
il y a $\dbinom{5}{2} \times 5 = 50$ cas favorables,

- une boule blanche et deux boules noires :
il y a $5 \times \dbinom{10}{2} = 225$ cas favorables,

- deux boules blanches et une boule noire :
il y a $\dbinom{5}{2} \times 10 = 100$ cas favorables,

- une boule rouge et deux boules noires :
il y a $5 \times \dbinom{10}{2} = 225$ cas favorables,

- deux boules rouges et une boule noire :
il y a $\dbinom{5}{2} \times 10 = 100$ cas favorables.

Tous ces cas étant deux à deux incompatibles,

$$\mathrm{Card}\,(B) = 50 + 50 + 225 + 100 + 225 + 100 = 750.$$

Donc : $\quad P(B) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(B)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{750}{1140} = \dfrac{25}{38}.$

3) Pour réaliser C, il faut tirer :

- trois boules blanches : il y a $\dbinom{5}{3} = 10$ cas favorables,

- trois boules rouges : il y a $\dbinom{5}{3} = 10$ cas favorables,

- trois boules noires : il y a $\dbinom{10}{3} = 120$ cas favorables.

Tous ces cas étant deux à deux incompatibles,

$$\mathrm{Card}\,(C) = 10 + 10 + 120 = 140.$$

Donc : $\quad P(C) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(C)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{140}{1140} = \dfrac{7}{57}.$

Remarque :

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{25}{114} + \frac{25}{38} + \frac{7}{57} = 1.$$

Ce résultat est normal puisque (A, B, C) est un système complet d'événements. Il aurait été plus simple de le remarquer dès le départ, de calculer $P(A)$ et $P(C)$ (qui sont les plus simples) puis d'en déduire $P(B)$.

27.3

Notons Ω l'ensemble des résultats possibles, A l'événement : « on obtient des boules de même parité », et B (resp. C) l'événement : « on obtient des boules de numéros pairs (resp. impairs) ». Ainsi $A = B \cup C$, et les événements B et C sont incompatibles.

a) Les tirages se font simultanément.
Ω est l'ensemble des parties à 2 éléments de $\{1, ..., 9\}$, donc :
$\mathrm{Card}\,(\Omega) = \dbinom{9}{2} = 36.$

B est l'ensemble des parties à 2 éléments de $\{2, 4, 6, 8\}$, donc :
$\mathrm{Card}\,(B) = \dbinom{4}{2} = 6.$

C est l'ensemble des parties à 2 éléments de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, donc : $\quad \mathrm{Card}\,(C) = \dbinom{5}{2} = 10.$

Toutes les parties de Ω étant équiprobables, P est donc la probabilité uniforme sur Ω, et l'on a :

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}\,(B) + \mathrm{Card}\,(C)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \frac{6 + 10}{36} = \frac{4}{9}.$$

b) Les tirages se font successivement et sans remise.
Ainsi Ω est l'ensemble des 2-listes sans répétitions de $\{1, ..., 9\}$, donc : $\quad \mathrm{Card}\,(\Omega) = 9 \times 8 = 72.$

B est l'ensemble des 2-listes sans répétitions de $\{2, 4, 6, 8\}$, donc : $\quad \mathrm{Card}\,(B) = 4 \times 3 = 12.$

C est l'ensemble des 2-listes sans répétitions de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, donc : $\quad \mathrm{Card}\,(C) = 5 \times 4 = 20.$

Toutes les listes de Ω étant équiprobables, P est donc la probabilité uniforme sur Ω, et l'on a :

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}\,(B) + \mathrm{Card}\,(C)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}.$$

c) Les tirages se font successivement et avec remise.
Ainsi Ω est l'ensemble des couples de $\{1, ..., 9\}$, donc :
$\mathrm{Card}\,(\Omega) = 9^2 = 81.$

B est l'ensemble des couples de $\{2, 4, 6, 8\}$, donc :
$\text{Card}\,(B) = 4^2 = 16$.
C est l'ensemble des couples de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, donc :
$\text{Card}\,(C) = 5^2 = 25$.
Tous les couples de Ω étant équiprobables, P est donc la probabilité uniforme sur Ω, et l'on a :

$$P(A) = \frac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \frac{\text{Card}\,(B) + \text{Card}\,(C)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \frac{41}{81}.$$

27.4

Notons, pour tout k de $\{1, ..., 4\}$, B_k l'événement : « on obtient une boule blanche au k-ième tirage » et N_k l'événement : « on obtient une boule noire au k-ième tirage ».

On veut calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$. Les événements ne sont pas indépendants (car les tirages se font sans remise), on utilise alors la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} &P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) \\ &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) \times P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(N_4) \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{63}. \end{aligned}$$

27.5

Notons Ω l'ensemble des résultats possibles.

Alors $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$ et $\text{Card}\,(\Omega) = 36$.

La probabilité P est la probabilité uniforme.

a) • On a $\text{Card}\,(A) = 3 \times 6$ et donc : $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

De même : $P(B) = \dfrac{3 \times 6}{36} = \dfrac{1}{2}$.

De plus : $P(A \cap B) = \dfrac{3 \times 3}{36} = \dfrac{1}{4} = P(A) \times P(B)$.

Donc A et B sont indépendants.

• Notons C_1 (resp. C_2) : « le premier lancer amène un chiffre pair (resp. impair), et le deuxième lancer amène un chiffre impair (resp. pair) ».

Alors $C = C_1 \cup C_2$, et les événements C_1 et C_2 sont incompatibles.

Donc : $P(C) = P(C_1) + P(C_2) = \dfrac{3 \times 3}{36} + \dfrac{3 \times 3}{36} = \dfrac{1}{2}$.

De plus, l'événement $A \cap C$ est l'événement C_1, d'où :

$$P(A \cap C) = P(C_1) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(C).$$

Donc A et C sont indépendants.

• De la même façon :

$$P(B \cap C) = P(C_1) = \frac{1}{4} = P(B) \times P(C).$$

Donc B et C sont indépendants.

b) Les événements A, B, C sont mutuellement indépendants si et seulement si :

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) = P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}.$$

Or : $P(A \cap B \cap C) = P(C_1) = \dfrac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$.

Donc les événements A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

27.6

Notons Ω l'ensemble des combinaisons de 4 chaussures, parmi les 20 chaussures possibles.

Alors $\text{Card}\,(\Omega) = \dbinom{20}{4}$.

Toutes les combinaisons étant équiprobables, P est la probabilité uniforme sur Ω.

a) Notons A l'événement : « on obtient deux paires de chaussures ».
Pour réaliser A, il faut :

- choisir deux paires de chaussures : $\dbinom{10}{2}$ choix,
- prendre les deux chaussures de chaque paire choisie : 1 choix.

Ainsi : $\text{Card}\,(A) = \dbinom{10}{2}$,

et : $P(A) = \dfrac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{3}{323}$.

b) Notons B l'événement :
« on obtient au moins une paire de chaussures ».
Alors $\overline{B}$ est l'événement
« on n'obtient aucune paire de chaussures ».

Pour réaliser $\overline{B}$, il faut :

- choisir 4 paires de chaussures : $\dbinom{10}{4}$ choix,
- choisir l'une des deux chaussures pour chaque paire choisie : 2^4 choix.

Ainsi : $\text{Card}\,(\overline{B}) = \dbinom{10}{4} \times 2^4$,

et : $P(\overline{B}) = \dfrac{\binom{10}{4} \times 2^4}{\binom{20}{4}} = \dfrac{224}{323}$.

Donc : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \dfrac{99}{323}$.

c) Notons C l'événement : « on obtient une et une seule paire de chaussures ».
Alors $C = B \setminus A$, et puisque $A \subset B$, on a :

$$P(C) = P(B) - P(A) = \frac{99}{323} - \frac{3}{323} = \frac{96}{323}.$$

27.7

Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note B_i l'événement : « on tire une boule blanche dans l'urne $\mathcal{U}_i$ » et N_i l'événement : « on tire une boule noire dans l'urne U_i ».
Les événements N_1 et N_2 sont indépendants, mais N_3 dépend de N_1 et N_2; donc les événements N_1, N_2, N_3 ne sont pas mutuellement indépendants.

a) On veut calculer $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$. Les événements N_1, N_2, N_3 n'étant pas mutuellement indépendants, utilisons la formule des probabilités composées :

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3)$$

$$= P(N_1) \times P(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3)$$
car N_1 et N_2 sont indépendants
$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{175}.$$

b) On veut calculer $P(B_3)$. La composition de l'urne $\mathcal{U}_3$ dépend de ce qu'il s'est passé précédemment. Utilisons la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $\big(N_1 \cap N_2,\, B_1 \cap N_2,\, B_1 \cap B_2,\, N_1 \cap B_2\big)$:

$$\begin{aligned}
P(B_3) &= P(N_1 \cap N_2)P_{N_1 \cap N_2}(B_3) \\
&\quad + P(B_1 \cap N_2)P_{B_1 \cap N_2}(B_3) \\
&\quad + P(B_1 \cap B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \\
&\quad + P(N_1 \cap B_2)P_{N_1 \cap B_2}(B_3) \\
&= P(N_1)P(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(B_3) + P(B_1)P(N_2)P_{B_1 \cap N_2}(B_3) \\
&\quad + P(B_1)P(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) + P(N_1)P(B_2)P_{N_1 \cap B_2}(B_3) \\
&= \frac{2}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{7} + \frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{4}{7} + \frac{3}{5}\frac{3}{5}\frac{5}{7} + \frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{4}{7} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

c) On veut maintenant calculer $P_{B_3}(B_1 \cap B_2)$. Utilisons la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
P_{B_3}(B_1 \cap B_2) &= \frac{P(B_1 \cap B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3)}{P(B_3)} \\
&= \frac{P(B_1) \times P(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3)}{P(B_3)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

27.8

Notons, pour tout k de $\{1,...,n\}$, R_k :
« on obtient une boule rouge au k-ième tirage »
et N_k : « on obtient une boule noire au k-ième tirage ».

a) • $\overline{A_n} = \underbrace{\big(R_1 \cap \cdots \cap R_n\big)}_{\text{noté } E} \cup \underbrace{\big(N_1 \cap \cdots \cap N_n\big)}_{\text{noté } F}.$

Alors :

$$P(\overline{A_n}) = P(E) + P(F)$$
car E et F sont incompatibles
$$= P(R_1) \cdots P(R_n) + P(N_1) \cdots P(N_n)$$
par indépendance des événements
$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc : $\quad P(A_n) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}.$

• $$B_n = \underbrace{\big(N_1 \cap \cdots \cap N_n\big)}_{\text{noté } F} \cup \underbrace{\big(R_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n\big)}_{\text{noté } G_1} \cup \cdots \cup \underbrace{\big(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap R_n\big)}_{\text{noté } G_n}.$$

Alors :

$$P(B_n) = P(F) + P(G_1) + \cdots + P(G_n)$$
par incompatibilité de $F, G_1, \ldots, G_n$
$$= (n+1) \times \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}.$$

b) Pour $n = 2$:
$A_2 \cap B_2 = \big(R_1 \cap N_2\big) \cup \big(N_1 \cap R_2\big)$.
Donc : $\quad P(A_2 \cap B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}.$
Et : $\quad P(A_2)P(B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8} \neq P(A_2 \cap B_2).$
Donc A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.

c) Pour $n = 3$:
$$A_3 \cap B_3 = \big(R_1 \cap N_2 \cap N_3\big) \cup \big(N_1 \cap R_2 \cap N_3\big) \cup \big(N_1 \cap N_2 \cap R_3\big).$$
Donc : $\quad P(A_3 \cap B_3) = 3 \times \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{3}{8}.$
De plus : $\quad P(A_3)P(B_3) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} = P(A_3 \cap B_3).$
Donc A_3 et B_3 sont indépendants.

d) Cas général :
$$A_n \cap B_n = \Big(R_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n\Big) \cup \cdots \cup \Big(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap R_n n\Big).$$
Donc : $\quad P(A_n \cap B_n) = \dfrac{n}{2^n}.$

Ainsi : $\quad A_n$ et B_n sont indépendants
si et seulement si $\quad P(A_n \cap B_n) = P(A_n)P(B_n)$
si et seulement si $\quad \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \times \dfrac{n+1}{2^n}$
si et seulement si $\quad 2^{n-1} - 1 - n = 0.$

Or la suite de terme général $u_n = 2^{n-1} - 1 - n$ est strictement croissante, car :
$$\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} - u_n = 2^{n-1} - 1 > 0,$$
et $u_3 = 0$, donc : $\; u_n = 0 \iff n = 3.$

Ainsi les événements A_n et B_n sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

27.9

Notons, pour tout k de $\{1,...,n\}$, A_k :
« la porte s'ouvre à la k-ième tentative, et pas avant ».
Alors $A_k = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
Par la formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned}
P(A_k) &= P\left(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) \\
&= P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdots P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n} \quad \text{(car les facteurs se simplifient deux à deux).}
\end{aligned}$$

Remarque : Cette probabilité ne dépend pas de k.

27.10

Notons, pour tout i de $\{1,...,n\}$, C_i l'événement : « on obtient le carton numéro i » et A l'événement : « on tire deux boules blanches dans l'urne ». Alors :
$$\forall i \in \{1,...,n\}, \quad P(C_i) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad P_{C_i}(A) = \left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

a) On veut calculer $P(A)$. Utilisons la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $\big(C_i,\ \text{pour } i \in \{1,...,n\}\big)$:
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i) \times P_{C_i}(A) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

b) On veut maintenant calculer $P_A(C_n)$.

Utilisons la formule de Bayes :

$$P_A(C_n) = \frac{P(C_n) \times P_{C_n}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{n} \times 1}{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}} = \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

27.11

Notons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A_n : « la n-ième personne reçoit l'information non déformée » et B_n : « la n-ième personne transforme l'information reçue en son contraire ».

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $A_{n+1} = \big(A_n \cap \overline{B_n}\big) \cup \big(\overline{A_n} \cap B_n\big)$. D'où :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P\big(A_n \cap \overline{B_n}\big) + P\big(\overline{A_n} \cap B_n\big) \\ &\qquad \text{par incompatibilité des événements} \\ &= P(A_n)P(\overline{B_n}) + P(\overline{A_n})P(B_n) \\ &\qquad \text{par indépendance des événements} \\ &= (1-p)\,p_n + p\,(1-p_n). \end{aligned}$$

On en déduit : $\quad p_{n+1} = (1-2p)\,p_n + p$.

b) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite arithmético-géométrique.

On cherche α tel que : $\alpha = (1-2p)\alpha + p$, et on obtient $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Posons alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \dfrac{1}{2}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} &= (1-2p)p_n + p - \frac{1}{2} \\ &= (1-2p)\Big(p_n - \frac{1}{2}\Big) = (1-2p)u_n. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $(1-2p)$, donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n &= (1-2p)^{n-1}u_1 \\ &= (1-2p)^{n-1}\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2} \times (1-2p)^{n-1}. \end{aligned}$$

On en déduit : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \dfrac{1}{2}\Big(1 + (1-2p)^{n-1}\Big)$.

c) Puisque $0 < p < 1$, alors $-1 < 1-2p < 1$, et donc $\lim\limits_{n\infty}(1-2p)^{n-1} = 0$. Ainsi : $\quad \lim\limits_{n\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$.

On remarque que cette probabilité est indépendante de p.

27.12

a) • $q_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$.

• Pour calculer $P(BL_1)$, utilisons la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$:

$$\begin{aligned} p_1 = P(BL_1) &= P(A_1)P_{A_1}(BL_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(BL_1) \\ &= \frac{1}{2} \times a + \frac{1}{2} \times b = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

• On a :

$$\begin{aligned} q_2 = P(A_2) &= P\Big((A_1 \cap BL_1) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{BL_1})\Big) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(BL_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{BL_1}) \\ &= \frac{1}{2} \times a + \frac{1}{2}(1-b) = \frac{1+a-b}{2}. \end{aligned}$$

• Pour calculer $P(BL_2)$, utilisons la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $(A_2, \overline{A_2})$:

$$\begin{aligned} p_2 = P(BL_2) &= P(A_2)P_{A_2}(BL_2) + P(\overline{A_2})P_{\overline{A_2}}(BL_2) \\ &= \frac{1+a-b}{2} \times a + \Big(1 - \frac{1+a-b}{2}\Big) \times b \\ &= \frac{a^2+b^2+a+b-2ab}{2}. \end{aligned}$$

b) L'événement A_{n+1} se décompose sous la forme :

$$A_{n+1} = (A_n \cap BL_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{BL_n}).$$

Donc :

$$\begin{aligned} q_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P\Big((A_n \cap BL_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{BL_n})\Big) \\ &= P(A_n \cap BL_n) + P(\overline{A_n} \cap \overline{BL_n}) \\ &\qquad \text{par incompatibilité des événements} \\ &= P(A_n)P_{A_n}(BL_n) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(\overline{BL_n}) \\ &= q_n \times a + (1-q_n) \times (1-b) = (a+b-1)q_n + 1 - b. \end{aligned}$$

La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
On cherche α tel que : $\alpha = (a+b-1)\alpha + 1 - b$,
et on obtient $\alpha = \dfrac{1-b}{2-a-b}$
et on a bien $2-a-b \neq 0$ car $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
En posant $u_n = q_n - \alpha$, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = (a+b-1)u_n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n &= (a+b-1)^{n-1}u_1 \\ &= (a+b-1)^{n-1} \times \frac{b-a}{2(2-a-b)}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = \frac{b-a}{2(2-a-b)}\,(a+b-1)^{n-1} + \frac{1-b}{2-a-b}.$$

c) En utilisant la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$:

$$\begin{aligned} p_n = P(BL_n) &= P(A_n)P_{A_n}(BL_n) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(BL_n) \\ &= q_n \times a + (1-q_n) \times b = (a-b)q_n + b \\ &= b + \frac{(1-b)(a-b)}{2-a-b} - \frac{(b-a)^2}{2(2-a-b)}\,(a+b-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

27.13

Notons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « Camille marque exactement n points », P_n (resp. F_n) l'événement : « Camille obtient pile (resp. face) au n-ième lancer ».

a) • L'événement A_1 est l'événement P_1.
Donc : $p_1 = P(A_1) = a$.

• L'événement A_2 est l'événement $F_1 \cup (P_1 \cap P_2)$.
Donc : $p_2 = P(A_2) = (1-a) + a^2$.

b) La famille d'événements (P_1, F_1) forme un système complet d'événements.

Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+2}) &= P(P_1) \times P_{P_1}(A_{n+2}) + P(F_1) \times P_{F_1}(A_{n+2}) \\ &= a\, P_{P_1}(A_{n+2}) + (1-a)\, P_{F_1}(A_{n+2}). \end{aligned}$$

Or, si P_1 est réalisé, alors Camille marque un point au premier lancer, et doit alors encore marquer exactement $(n+1)$ points ; ainsi : $P_{P_1}(A_{n+2}) = p_{n+1}$.

Par le même raisonnement : $P_{F_1}(A_{n+2}) = p_n$.

On en déduit la relation : $p_{n+2} = a\, p_{n+1} + (1-a)\, p_n$.

c) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors une suite récurrente linéaire du second ordre.

Le polynôme $\mathrm{X}^2 - a\,\mathrm{X} - (1-a)$ admet deux racines distinctes : 1 et $a-1$.

D'après le cours, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \alpha + \beta(a-1)^n.$$

En utilisant $p_1 = a$ et $p_2 = a^2 + 1 - a$, on trouve :
$$\alpha = \frac{1}{2-a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-a}{2-a}.$$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \dfrac{1}{2-a}\Big(1 - (a-1)^{n+1}\Big).$

27.14

Notons, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, B_k (resp. N_k, resp. R_k) l'événement : « on obtient une boule blanche (resp. noire, resp. rouge) au k-ième tirage ». Notons G l'événement : « on gagne la partie ».

a) • Supposons que l'urne contienne b boules blanches et n boules noires et aucune boule rouge.

Alors : $G = B_1$, d'où : $p_0 = P(G) = \dfrac{b}{n+b}$.

• Supposons que l'urne contienne b boules blanches, n boules noires et une seule boule rouge.

Alors : $G = B_1 \cup (R_1 \cap B_2)$, d'où :

$$\begin{aligned} p_1 = P(G) &= P(B_1) + P(R_1 \cap B_2) \\ &\qquad \text{par incompatibilité des événements} \\ &= P(B_1) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) \\ &= \frac{b}{n+b+1} + \frac{1}{n+b+1} \times \frac{b}{n+b} \\ &= \frac{b(n+b+1)}{(n+b+1)(n+b)} = \frac{b}{n+b}. \end{aligned}$$

b) Supposons que l'urne contienne b boules blanches, $n$boules noires et $(r+1)$ boules rouges.

La famille d'événements (B_1, N_1, R_1) forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(B_1)P_{B_1}(G) + P(N_1)P_{N_1}(G) + P(R_1)P_{R_1}(G).$$

Or : $P_{N_1}(G) = 0$, $P_{B_1}(G) = 1$ et $P_{R_1}(G) = p_r$
En effet, si on obtient une boule rouge au premier tirage, il faut alors gagner avec, dans l'urne, r boules rouges. D'où :

$$p_{r+1} = \frac{b}{n+b+r} + 0 + \frac{r}{n+b+r}\, p_r = \frac{1}{n+b+r}\big(b + r\, p_r\big).$$

c) On montre alors par récurrence sur r : $p_r = \dfrac{b}{n+b}$.

Remarque : Cette probabilité est indépendante de r.

27.15

a) Les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements.
Donc : $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = a_n + b_n + c_n = 1$.

b) Appliquons la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $\big(A_n, B_n, C_n\big)$:

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) \\ &\quad + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{6} + c_n \times \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On en déduit la relation :
$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n \qquad (1)$$

De le même façon, on a :
$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}c_n \qquad (2)$$
$$c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n \qquad (3).$$

c) Ainsi : $(1)-(2)$ donne : $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$
$(1)-(3)$ donne : $a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$.

d) Puisque $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n - b_n = \dfrac{1}{2^n}(a_0 - b_0) = \dfrac{1}{2^n} \\[2ex] a_n - c_n = \dfrac{1}{2^n}(a_0 - c_0) = \dfrac{1}{2^n}. \end{cases}$$

En sommant ces égalités et en utilisant le fait que $a_n + b_n + c_n = 1$, on obtient :
$$2a_n - b_n - c_n = 3a_n - 1 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On conclut,pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\Big),$$
$$b_n = a_n - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big),$$
$$c_n = a_n - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big).$$

Vrai ou Faux ?

27.1 On a, pour tous événements A, B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. V F

27.2 On a, pour tous événements A, B, C : V F

$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - \big(P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)\big) + P(A \cap B \cap C).$$

27.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la probabilité uniforme sur $\{1, ..., n\}$ est donnée par : V F

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad P(\{k\}) = \frac{1}{n}.$$

27.4 La probabilité conditionnelle $P(A \,|\, B)$ est la probabilité de l'événement : A sachant B. V F

27.5 Si A et B sont des événements et si $P(B) \neq 0$, alors la probabilité de A sachant B est donnée par : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. V F

27.6 On a, pour tous événements A, B, C tels que $B \subset C$ et $P(B) \neq 0$: $P_B(A \cap C) = P_B(A)$. V F

27.7 Si deux événements sont incompatibles, alors ils sont indépendants. V F

27.8 Si deux événements A, B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}, \overline{B}$ sont indépendants. V F

27.9 Deux événements A, B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont indépendants si et seulement si : $P_B(A) = P(B)$. V F

27.10 En lançant deux fois une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir deux résultats différents (un pile et un face) est $1/3$ car il y a trois cas possibles : pile-pile, pile-face, face-face. V F

Vrai ou Faux, les réponses

27.1 La formule est vraie si et seulement si $P(A \cap B) = 0$, et, si $P(A \cap B) \neq 0$, la formule correcte est : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. **F**

27.2 On a : **V**

$$P(A \cup B \cup C) = P\big((A \cup B) \cup C\big) = P(A \cup B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big)$$
$$= \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) + P(C) - P\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \big(P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\big).$$

27.3 C'est une définition du cours. **V**

27.4 L'expression A sachant B ne désigne pas un événement. **F**

27.5 C'est la définition de la probabilité conditionnelle $P_B(A)$. **V**

27.6 On a : $P_B(A \cap C) = \dfrac{P\big((A \cap C) \cap B\big)}{P(B)} = \dfrac{P\big(A \cap (B \cap C)\big)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$. **V**

27.7 Si deux événements A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, alors : **F**

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B),$$

donc A et B ne sont pas indépendants.

27.8 Si A et B sont indépendants, alors : **V**

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = \big(1 - P(A)\big)\big(1 - P(B)\big) = P(\overline{A})P(\overline{B}),$$

donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

27.9 Il y a eu interversion de A et B. **F**
Le résultat correct est : A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

27.10 Il y a quatre cas possibles et équiprobables : PP, PF, FP, FF, donc la probabilité d'obtenir deux résultats différents est $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et non $\dfrac{1}{3}$. **F**

Chapitre 28

Variables aléatoires

Plan

On utilise l'abréviation :

va pour
variable aléatoire.

Thèmes abordés dans les exercices

- Loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Espérance, variance, moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}^*$) d'une variable aléatoire.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition d'une variable aléatoire
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Définition de la variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$, loi de probabilité de $Y = g(X)$
- Définition de l'espérance d'une variable aléatoire, théorème de transfert, espérance de $Y = aX + b$
- Définition du moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}^*$) et du moment centré d'ordre r d'une variable aléatoire
- Définition de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire, variance de $Y = aX + b$.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

Essayer de :

- déterminer toutes les valeurs x_i que peut prendre la va X, puis pour chaque valeur possible, calculer $P(X = x_i)$
- déterminer toutes les valeurs x_i que peut prendre la va X, puis pour chaque valeur possible, calculer $P(X \leqslant x_i)$ ou $P(X < x_i)$ ou $P(X \geqslant x_i)$ ou $P(X > x_i)$, pour en déduire $P(X = x_i)$
- exprimer la va X à l'aide d'une autre va Y, déterminer la loi de Y pour en déduire la loi de X

➟ **Exercices 28.1 à 28.5, 28.8**

Exemple

Une urne contient 3 boules : 2 blanches et 1 noire.
On effectue trois tirages successifs et sans remise.
On note X le rang d'apparition de la boule noire.
Déterminer la loi de X.

La va X est à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.

L'événement $(X = 1)$ consiste à tirer en premier la boule noire, donc $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.

L'événement $(X = 2)$ consiste à tirer en premier une boule blanche, puis en second la boule noire, donc $P(X = 2) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

L'événement $(X = 3)$ consiste à tirer les deux boules blanches puis la boule noire, donc $P(X = 3) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{1}{3}$.

On conclut que la loi de X est donnée par :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad P(X = i) = \frac{1}{3}.$$

Il s'agit de la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.

Exemple

On considère une va X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et on suppose :

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X \leqslant 1) = \frac{1}{2}.$$

Déterminer la loi de X.

Les deux événements $(X = 0)$ et $(X = 1)$ étant incompatibles, on a : $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

On déduit : $P(X = 1) = P(X \leqslant 1) - P(X = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Et : $P(X = 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

On conclut que la loi de X est donnée par :

$$P(X = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{2}.$$

Méthode

Pour montrer que $\{(x_i, p_i)\ ;\ i \in I\}$ est la loi de probabilité d'une va

Montrer :

$$\big(\forall i \in I, \quad p_i \geqslant 0\big) \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} p_i = 1$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour qu'une va X à valeurs dans $\{1, ..., n\}$ vérifie :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad P(X = k) = ak.$$

L'ensemble $\big\{(k, ak)\,;\ k \in \{1, ..., n\}\big\}$ est une loi de probabilité d'une va si et seulement si : $\begin{cases} \forall k \in \{1, ..., n\}, \quad ak \geqslant 0 & (1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ak = 1 & (2). \end{cases}$

On a : (1) $\iff$ $a \geqslant 0$, et :

$$(2) \iff a \sum_{k=1}^{n} k = 1 \iff a \frac{n(n+1)}{2} = 1 \iff a = \frac{2}{n(n+1)} \ (\geqslant 0).$$

On conclut : $a = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

Méthode

Pour calculer l'espérance $E(X)$ d'une va X

Essayer de :

- utiliser la définition : si $X(\Omega) = \big\{x_1, \ldots, x_n\big\}$, alors :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$
- utiliser la formule de transfert :

  si $X = g(Y)$ avec $Y(\Omega) = \big\{y_j\ ;\ j \in J\big\}$, alors :
$$E(X) = \sum_{j \in J} g(y_j)\, P(Y = y_j)$$
- exprimer X sous la forme $X = aY + b$, et alors :
$$E(X) = aE(Y) + b.$$

➟ **Exercices 28.1 à 28.8**

Exemple

On considère une va X à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ et de loi : $P(X = 1) = \dfrac{1}{6}$,

$$P(X = 2) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{2}.$$

Calculer $E(X)$ et $E(X^3)$.

On a : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} kP(X = k) = 1\,\frac{1}{6} + 2\,\frac{1}{3} + 3\,\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$.

D'après la formule de transfert :

$$E(X^3) = \sum_{k=1}^{3} k^3 P(X = k) = 1^3\,\frac{1}{6} + 2^3\,\frac{1}{3} + 3^3\,\frac{1}{2} = \frac{49}{3}.$$

Méthode

Pour calculer la variance $V(X)$ d'une va X

Essayer de :

- utiliser la formule : $V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$
- utiliser la formule : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$
- utiliser la formule : $V(X) = a^2 V(Y)$ si $X = aY + b$.

➟ **Exercices 28.1 à 28.5**

Exemple

On considère une va X à valeurs dans $\{1,2,3,4\}$ et de loi :

$$P(X=1)=\frac{1}{6},$$
$$P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{4},$$
$$P(X=4)=\frac{1}{3}.$$

Calculer $V(X)$.

D'après le cours : $V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$.

On a : $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{4}kP(X=k)=1\frac{1}{6}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{4}+4\frac{1}{3}=\frac{33}{12}=\frac{11}{4}$,

et, par la formule de transfert :

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{4}k^2P(X=k)=1^2\frac{1}{6}+2^2\frac{1}{4}+3^2\frac{1}{4}+4^2\frac{1}{3}=\frac{105}{12}=\frac{35}{4}.$$

On déduit : $V(X)=\dfrac{35}{4}-\left(\dfrac{11}{4}\right)^2=\dfrac{19}{16}$ $(\geqslant 0)$.

Méthode

Pour calculer une somme d'un nombre fini de termes

Essayer de se ramener à des sommes classiques :

- la sommation d'entiers, de carrés d'entiers, de cubes d'entiers :

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

- la formule du binôme de Newton :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

- la sommation géométrique :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\quad \sum_{q=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

➟ **Exercices 28.2 à 28.5**

Exemple

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. on considère une va X à valeurs dans $\{0,...,n\}$ et de loi :

$\forall k\in\{0,...,n\}$,

$$P(X=k)=\frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Calculer $E(X)$.

D'abord, on a bien : $\forall k\in\{0,...,n\},\quad P(X=k)\geqslant 0$

et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2=1.$

On a :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{6k^3}{n(n+1)(2n+1)}$$
$$=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Énoncés des exercices

28.1 Tirages sans remise : loi du rang d'apparition de la première boule blanche

Une urne contient 10 boules : 7 boules blanches et 3 boules noires. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à vider l'urne, et on note X la va égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

28.2 Lancer d'un dé truqué : loi du numéro de la face obtenue

On dispose d'un dé truqué : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout k de $\{1, ..., 6\}$, la probabilité d'obtenir la face numérotée k est égale à $a\,k$. On lance ce dé, et on note X la va égale au numéro de la face obtenue.

a) Calculer le réel a. En déduire la loi de X, puis calculer son espérance et sa variance.

b) On définit la va $Y = \dfrac{1}{X}$.

1) Calculer l'espérance de Y.

2) Déterminer la loi de Y et retrouver $E(Y)$.

28.3 Tirages sans remise : loi du rang d'apparition de la première boule blanche

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la va égale au nombre de tirages effectués.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

28.4 Tirages avec remise : loi du nombre de boules blanches obtenues

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient des boules blanches en proportion p $(0 < p < 1)$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. On y effectue n tirages successifs et avec remise. On note X la va égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer $E(X)$, puis $E\big(X(X-1)\big)$, et en déduire $V(X)$.

28.5 Tirages de deux boules : loi du plus petit et du plus grand numéros obtenus

Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on tire deux boules sans remise. On note X (resp. Y) la va égale au plus petit (resp. au plus grand) des deux numéros obtenus.

a) Pour tout k de $\{1, ..., n\}$, calculer $P(Y \leqslant k)$. En déduire la loi de Y.

b) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

c) Pour tout k de $\{1, ..., n\}$, calculer $P(X \geqslant k)$. En déduire la loi de X.

d) Montrer que les va Y et $n+1-X$ ont même loi. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

28.6 Suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée : loi du nombre de changement de côtés

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout $n \geqslant 2$, on définit la va X_n égale au gain total à l'issue des n premiers lancers.

a) Déterminer les lois de X_2 et de X_3, puis calculer leurs espérances.

b) Soit $n \geqslant 2$. Justifier que X_n prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n-1\}$.

Calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$, montrer :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\, P(X_n = k) + \frac{1}{2}\, P(X_n = k-1).$$

d) On note, pour tout $n \geqslant 2$, $Q_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^k.$$

1) Soit $n \geqslant 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.

2) Montrer, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $s \in \mathbb{R}$: $\quad Q_{n+1}(s) = \dfrac{1+s}{2} Q_n(s)$.

3) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.

e) Calculer alors, pour tout $n \geqslant 2$, l'espérance et la variance de X_n.

28.7 Loi du nombre de pistes différentes lues par un lecteur mp3

Soit $n \geqslant 2$. Un lecteur mp3 contient n pistes de lectures (numérotées de 1 à n) et fonctionne en mode aléatoire selon le protocole suivant :
- la première piste lue est choisie de façon aléatoire parmi les n pistes ;
- à la fin de la lecture d'une piste, la suivante est choisie de façon aléatoire parmi les n pistes ; ainsi il est possible qu'une même piste soit lue plusieurs fois de suite.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de pistes différentes qui ont été lues au moins une fois au cours des k premières lectures.

a) Déterminer, en fonction de n et de k, les valeurs prises par X_k.

b) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la probabilité des événements $(X_k = 1)$ et $(X_k = k)$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n} P(X_k = i) + \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1).$$

d) Montrer alors : $\quad E(X_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n} E(X_k) + 1.$

En déduire une expression de $E(X_k)$ en fonction de n et k.

e) Calculer, pour n fixé, $\lim\limits_{k\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?

f) Calculer, pour k fixé, $\lim\limits_{n\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?

28.8 Tirages dans une urne jusqu'à l'obtention d'un numéro inférieur au précédent

Soit $N \geqslant 3$. Une urne contient N jetons numérotées de 1 à N. On tire les jetons au hasard et sans remise, jusqu'à ce que le numéro tiré soit inférieur au numéro précédemment tiré ou que l'urne soit vide.

On note X_N la va égale au nombre de tirages effectués.

a) Calculer, pour tout k de $\{1, ..., N-1\}$, $P(X_N > k)$.

b) En déduire la loi de X_N.

c) Calculer l'espérance de X_N, puis la limite de $E(X_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Du mal à démarrer ?

28.1 *a)* Montrer $X(\Omega) = \{1, ..., 4\}$, puis pour tout i de $\{1, ..., 4\}$, calculer $P(X = i)$ en utilisant le formule des probabilités composées.

b) Calculer $E(X)$, puis $E(X^2)$ à l'aide de la formule de transfert pour en déduire $V(X)$.

28.2 *a)* Utiliser le fait que $\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1$ pour en déduire la valeur de a.

b) 1) Utiliser la formule de transfert.

2) Montrer : $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

et : $\forall k \in \{1, ..., 6\}, \quad P(Y = \frac{1}{k}) = P(X = k)$.

28.3 *a)* Montrer que $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$, puis calculer $P(X = k)$ à l'aide de la formule des probabilités composées.

b) Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ puis $V(X)$ en utilisant les sommes usuelles.

28.4 *a)* Montrer que $X(\Omega) = \{0, ..., n\}$, puis décomposer l'événement $(X = k)$ à l'aide d'événements élémentaires.

b) Calculer $E\big(X(X-1)\big)$ à l'aide de la formule de transfert, et montrer :

$$V(X) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - \big(E(X)\big)^2.$$

28.5 *a)* Exprimer l'événement $(Y \leqslant k)$ à l'aide d'événements élémentaires. Pour calculer ensuite $P(Y = k)$, écrire :

$P(Y = k) = P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k - 1)$.

b) Utiliser les définitions de $E(Y)$ et $V(Y)$.

c) Exprimer l'événement $(X \geqslant k)$ à l'aide d'événements élémentaires. Pour calculer ensuite $P(X = k)$, écrire :

$$P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k + 1).$$

d) Montrer : $(n + 1 - X)(\Omega) = \{2, ..., n\} = Y(\Omega)$

puis : $\forall k \in \{2, ..., n\}, \ P(n+1-X = k) = P(Y = k)$.

En déduire : $E(Y) = E(n + 1 - X) = n + 1 - E(X)$

et : $V(Y) = V(n + 1 - X) = V(X)$.

28.6 *a)* Immédiat.

b) L'événement $(X_n = 0)$ est réalisé si et seulement s'il n'y a aucun changement de côté lors des n premiers lancers.

L'événement $(X_n = n - 1)$ est réalisé si et seulement s'il y a un changement de côté à chaque lancer.

c) Définir E l'événement : « les côtés obtenus aux lancers n et $n + 1$ sont les mêmes ». Puis utiliser la formule des probabilités totales avec comme système complet d'événements $(E, \overline{E})$.

d) 1) Montrer : $Q_n(1) = 1$, $Q'_n(1) = E(X_n)$, $Q''_n(1) = E(X_n^2) - E(X_n)$.

2) Replacer dans l'expression de $Q_{n+1}(s)$, $P(X_{n+1} = k)$ par :

$\frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k - 1)$.

3) Obtenir : $\forall n \geqslant 2, \ \forall s \in \mathbb{R}, \quad Q_n(s) = \left(\frac{s+1}{2}\right)^{n-1}$.

e) Utiliser les résultats de la question *d)1)* et l'expression de $Q_n(s)$.

28.7 *a)* Montrer : $X_k(\Omega) = \{1, ..., \mathrm{Min}(n, k)\}$.

b) L'événement $(X_k = 1)$ est réalisé si et seulement si le lecteur lit toujours la même piste.

L'événement $(X_k = k)$ est réalisé si et seulement si le lecteur lit des pistes deux à deux distinctes.

c) Remarquer : $P(X_{k+1} = i)$

$$= P(X_k = i)P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = i) + P(X_k = i - 1)P_{(X_k=i-1)}(X_{k+1} = i).$$

d) Sommer l'égalité précédente pour i allant de 1 à n.

e) Montrer : $E(X_k) \underset{k\infty}{\longrightarrow} n$.

f) Montrer : $E(X_k) \underset{n\infty}{\longrightarrow} k$.

28.8 *a)* L'événement $(X_N > k)$ est réalisé si et seulement si les k premiers numéros obtenus sont rangés par ordre strictement croissant.

b) Écrire : $P(X_N = N) = P(X_N > N - 1)$

et, si $k \in \{2, ..., N - 1\}$:

$$P(X_N = k) = P(X_N > k - 1) - P(X_N > k).$$

c) Utiliser la définition de $E(X_N)$ pour la calculer, puis montrer : $E(X_N) \underset{N\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

Corrigés des exercices

28.1

a) L'urne ne contenant que 3 boules noires, la première boule blanche peut donc apparaître aux rangs 1,2,3,4.

Ainsi : $X(\Omega) = \{1, ..., 4\}$.

Calculons $P(X = 1), P(X = 2), P(X = 3), P(X = 4)$.

Notons, pour $k \in \{1, ..., 10\}$, B_k (resp. N_k) l'événement : « on obtient une boule blanche (resp. noire) au k-ième tirage ».

- L'événement $(X = 1)$ est l'événement B_1.

Donc : $P(X = 1) = P(B_1) = \dfrac{7}{10}$.

- L'événement $(X = 2)$ est l'événement $N_1 \cap B_2$.

Donc :

$$P(X = 2) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

- L'événement $(X = 3)$ est l'événement $N_1 \cap N_2 \cap B_3$.

Donc :

$$P(X = 3) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \frac{3}{10}\,\frac{2}{9}\,\frac{7}{8} = \frac{7}{120}.$$

- L'événement $(X = 4)$ est l'événement $N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4$.

Donc :

$$P(X = 4) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(N_3)P_{N_1 \cap N_2 \cap N_3}(B_4) = \frac{3}{10}\,\frac{2}{9}\,\frac{1}{8}\,\frac{7}{7} = \frac{1}{120}.$$

- Ainsi, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

Remarque : on a bien

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{7}{10} + \frac{7}{30} + \frac{7}{120} + \frac{1}{120} = 1.$$

b) • On a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) = \frac{11}{8}.$$

• Calculons $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$:

Utilisons la formule de transfert pour calculer $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{4} k^2 P(X = k) = P(X = 1) + 4P(X = 2) + 9P(X = 3) + 16P(X = 4) = \frac{55}{24}.$$

Donc : $V(X) = \dfrac{55}{24} - \left(\dfrac{11}{8}\right)^2 = \dfrac{77}{192}$.

28.2

a) Déterminons la loi de X :

La va X prend ses valeurs dans $\{1, ..., 6\}$.

De plus, d'après l'énoncé, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in \{1, ..., 6\}, \quad P(X = k) = a\,k.$$

Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a\,k = a \sum_{k=1}^{6} k = a\frac{6 \times 7}{2} = 21a,$

on en déduit : $a = \dfrac{1}{21}$.

Ainsi la loi de X est donnée par :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On a : $\forall k \in \{1, ..., 6\},\ P(X = k) = \dfrac{k}{21}$.

Calculons $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k\,P(X = k) = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{21} \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = \frac{13}{3}.$$

Calculons $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$:

Utilisons la formule de transfert pour calculer $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2\,P(X = k) = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^{6} k^3 = \frac{1}{21} \times \frac{6^2 \times 7^2}{2^2} = 21.$$

Donc : $V(X) = 21 - \left(\dfrac{13}{3}\right)^2 = \dfrac{20}{9}$.

b) 1) D'après la formule de transfert :

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}\,P(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{21} = \frac{6}{21}.$$

2) Déterminons la loi de Y.

La va Y prend ses valeurs dans $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Pour tout k de $\{1, ..., 6\}$, $P(Y = \frac{1}{k}) = P(X = k)$.

Ainsi, la loi de Y est donnée par :

y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

On a : $E(Y) = \frac{1}{6} \times \frac{6}{21} + \cdots + 1 \times \frac{1}{21} = \frac{6}{21}$.

Remarque : on retrouve bien le même résultat.

28.3

a) Déterminons la loi de X :

La va X prend ses valeurs dans $\{1, .., n\}$.

Notons, pour tout k de $\{1, ..., n\}$, B_k l'événement : « on obtient la boule blanche au k-ième tirage ».

Soit $i \in \{1, ..., n\}$.

Alors : $(X = i) = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}} \cap B_i$.

Par la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times P_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-2}}}(\overline{B_{i-1}}) \\ &\quad \times P_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}}}(B_i) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-i+1}{n-i+2} \times \frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi : $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$

et : $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $P(X = i) = \frac{1}{n}$.

Remarque : $\sum_{i=1}^{n} P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

La loi de X est la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.

b) • On a : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} i\,P(X = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}$.

• Calculons $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$. On a :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2\,P(X = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc : $V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$.

28.4

a) Déterminons la loi de X :

- La va X prend ses valeurs dans $\{0, ..., n\}$.

- Soit $k \in \{0, ..., n\}$. L'événement $(X = k)$ est la réunion disjointe des événements $E_{i_1, ..., i_k}$: « les tirages numéros $i_1, i_2, \ldots, i_k$ amènent une boule blanche, les autres amènent une boule noire », pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$.

Par indépendance des tirages :

$$P(E_{i_1, ..., i_k}) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

De plus, il y a $\binom{n}{k}$ événements de ce type (qui correspondent au nombre de façons de placer les k boules blanches). Donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ainsi : $X(\Omega) = \{0, ..., n\}$

et : $\forall k \in \{0, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarque : En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1.$$

Remarque : la loi de X est la loi binomiale de paramètre (n, p).

b) • Calculons $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Or, si $k \in \{1, ...n\}$, on sait que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} \\ &= n\,p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} \\ &= n\,p\big(p + (1-p)\big)^{n-1} = n\,p. \end{aligned}$$

• Calculons $E\big(X(X-1)\big)$, par la formule de transfert :

$$\begin{aligned} E\big(X(X-1)\big) &= \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Si $k \in \{2, ..., n\}$, alors $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

Donc :

$$\begin{aligned} &E\big(X(X-1)\big) \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n\,(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-(k+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= n\,(n-1)\,p^2 \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k(1-p)^{(n-2)-k} \\ &\underset{\text{Newton}}{=} n\,(n-1)\,p^2\big(p+(1-p)\big)^{n-2} \\ &= n\,(n-1)\,p^2. \end{aligned}$$

• On a :

$$E\big(X(X-1)\big)=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)P(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k^2P(X=k)-\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)=E(X^2)-E(X).$$

Donc :

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$$

$$=E\big(X(X-1)\big)+E(X)-\big(E(X)\big)^2$$

$$=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p).$$

28.5

a) • Soit $k\in\{1,...,n\}$.

L'événement $(Y\leqslant k)$ est réalisé si et seulement si on obtient deux boules de numéros inférieurs ou égaux à k, donc si et seulement si on obtient deux boules dont le numéro est compris entre 1 et k.

Par équiprobabilité des tirages possibles, on a :

$$P(Y\leqslant k)=\frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

• Déterminons la loi de Y.

- La va Y prend ses valeurs dans $\{2,...n\}$.

- Soit $k\in\{2,...,n\}$.

Alors : $(Y=k)=(Y\leqslant k)\setminus(Y\leqslant k-1)$,
avec : $(Y\leqslant k-1)\subset(Y\leqslant k)$.
Donc :

$$P(Y=k)=P(Y\leqslant k)-P(Y\leqslant k-1)$$

$$=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}-\frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)}=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

Remarque :

$$\sum_{k=2}^{n}P(Y=k)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{2}{n(n-1)}\times\frac{(n-1)n}{2}=1.$$

b) • On a :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=2}^{n}kP(Y=k)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k\Big) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\Big(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}\Big) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\times\frac{(n-1)n(n+1)}{3}=\frac{2(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

• Par la formule de transfert :

$$\begin{aligned} &E(Y^2) \\ &= \sum_{k=2}^{n}k^2P(Y=k)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^2k \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}k^3+2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k\Big) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\Big(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\Big) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\times\frac{n(n-1)(3n+2)(n+1)}{12} \\ &= \frac{(3n+2)(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Donc :

$$V(Y)=E(Y^2)-\big(E(Y)\big)^2$$

$$=\frac{(3n+2)(n+1)}{6}-\frac{4(n+1)^2}{9}=\frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

c) • Soit $k\in\{1,...,n\}$. L'événement $(X\geqslant k)$ est réalisé si et seulement si on obtient deux boules de numéros supérieurs ou égaux à k, donc si et seulement si on obtient deux boules dont le numéro est compris entre k et n.

Par équiprobabilité des tirages possibles, on a :

$$P(X\geqslant k)=\frac{\binom{n-k+1}{2}}{\binom{n}{2}}=\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)}.$$

• Déterminons la loi de X.

- La va X prend ses valeurs dans $\{1,...,n-1\}$.

- Soit $k\in\{1,...,n-1\}$.
On a alors : $(X=k)=(X\geqslant k)\setminus(X\geqslant k+1)$,
avec $(X\geqslant k+1)\subset(X\geqslant k)$, donc :

$$P(X=k)=P(X\geqslant k)-P(X\geqslant k+1)$$

$$=\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)}-\frac{(n-k-1)(n-k)}{n(n-1)}=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

d) • On a $X(\Omega)=\{1,...,n-1\}$, donc :

$$(n+1-X)(\Omega)=\{2,...,n\}=Y(\Omega).$$

De plus, pour tout $k\in\{2,...,n\}$:

$$P(n+1-X=k)=P(X=n+1-k)$$

$$=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}=P(Y=k).$$

On en déduit que Y et $(n+1-X)$ ont même loi.

• Ainsi :

$$E(n+1-X)=E(Y)\quad\text{et}\quad V(n+1-X)=V(Y).$$

Comme : $E(n+1-X)=n+1-E(X)$,

on en déduit : $E(X) = n + 1 - E(Y) = \dfrac{n+1}{3}$.

De plus : $V(n+1-X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$.

On conclut : $V(X) = V(Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{18}$.

28.6

a) Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, P_k (resp. F_k) l'événement :
« on obtient pile (resp. face) au k-ième lancer. »

• Loi de X_2 :

- La va X_2 prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$.
- De plus : $P(X_2 = 0) = P\big((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)\big)$
$= P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2)$ par incompatibilité
$= P(P_1)P(P_2) + P(F_1)P(F_2)$ par indépendance
$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Donc : $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi la loi de X_2 est :

x	0	1
$P(X_2 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On en déduit :

$$E(X_2) = 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

• Loi de X_3 :

- La va X_3 prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.
- De plus :

$$\begin{aligned} & P(X_3 = 0) \\ = \;& P\big((P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)\big) \\ = \;& P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \\ & \qquad \text{par incompatibilité} \\ = \;& P(P_1)P(P_2)P(P_3) + P(F_1)P(F_2)P(F_3) \\ & \qquad \text{par indépendance} \\ = \;& \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

De la même façon :

$P(X_3 = 2) = P\big((P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)\big)$
$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Enfin : $P(X_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi la loi de X_3 est :

x	0	1	2
$P(X_3 = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On en déduit : $E(X_3) = 0 \times \dfrac{1}{4} + 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{4} = 1$.

b) • La plus petite valeur que peut prendre X_n est 0, lorsqu'il n'y a aucun changement de côté.
La plus grande valeur que peut prendre X_n est $n-1$, lorsqu'il y a un changement de côté à chaque lancer, à partir du deuxième.
Enfin, X_n peut prendre toutes les valeurs intermédiaires.

On en déduit : $X_n(\Omega) = \{0, ..., n-1\}$.

On a :

$$\begin{aligned} & P(X_n = 0) \\ = \;& P\big((P_1 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n)\big) \\ = \;& P(P_1 \cap \cdots \cap P_n) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) \\ & \qquad \text{par incompatibilité} \\ = \;& P(P_1) \cdots P(P_n) + P(F_1) \cdots P(F_n) \\ & \qquad \text{par indépendance} \\ = \;& \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} & P(X_n = n-1) \\ = \;& P\big((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots)\big) \\ = \;& \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

c) Soient $n \geqslant 2$ et $k \in \{0, ..., n\}$. Notons E l'événement : « les côtés obtenus aux lancers n et $n+1$ sont les mêmes ».

Alors :

$$\begin{aligned} P(E) &= P\Big((P_n \cap P_{n+1}) \cup (F_n \cap F_{n+1})\Big) \\ &= P(P_n)P(P_{n+1}) + P(F_n)P(F_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La famille d'événements $(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales :

$P(X_{n+1} = k) = P(E)P_E(X_{n+1} = k) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}(X_{n+1} = k)$.

Or : $\begin{cases} P_E(X_{n+1} = k) = P(X_n = k) \\ P_{\overline{E}}(X_{n+1} = k) = P(X_n = k-1). \end{cases}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = k) \\ = \;& P(E)P(X_n = k) + P(\overline{E})P(X_n = k-1) \\ = \;& \frac{1}{2} P(X_n = k) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) P(X_n = k-1) \\ = \;& \frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k-1). \end{aligned}$$

d) 1) • On a : $Q_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) = 1$.

• On a : $\forall s \in \mathbb{R}, \quad Q_n'(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n = k)s^{k-1}$.

Donc : $Q_n'(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n = k) = E(X_n)$.

• On a :
$$\forall s \in \mathbb{R},\ \ Q''_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k)s^{k-1}.$$
Donc :
$$\begin{aligned} & Q''_n(1) \\ = \ & \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k) \\ = \ & \sum_{k=0}^{n-1} k^2 P(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n = k) \\ = \ & E(X_n^2) - E(X_n). \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\begin{aligned} & V(X_n) \\ = \ & E(X_n^2) - \big(E(X_n)\big)^2 \\ = \ & E(X_n^2) - E(X_n) + E(X_n) - \big(E(X_n)\big)^2 \\ = \ & Q''_n(1) + Q'_n(1) - \big(Q'_n(1)\big)^2. \end{aligned}$$

2) Soit $n \geqslant 2$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} & Q_{n+1}(s) \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} P(X_{n-1} = k)s^k \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k-1)\Big)s^k \\ = \ & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k-1)s^k \\ = \ & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=-1}^{n-1} P(X_n = k)s^{k+1} \\ = \ & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^{k+1} \\ = \ & \frac{1+s}{2} Q_n(s). \end{aligned}$$

3) On en déduit, par récurrence immédiate :
$$\forall n \geqslant 2,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \ Q_n(s) = \Big(\frac{1+s}{2}\Big)^{n-2} Q_2(s).$$
Or : $\ Q_2(s) = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1)s = \dfrac{1+s}{2}$.

Ainsi : $\quad \forall n \geqslant 2,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \ Q_n(s) = \Big(\dfrac{1+s}{2}\Big)^{n-1}$.

e) Soit $n \geqslant 2$. On en déduit, pour tout $s \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} Q'_n(s) = \dfrac{n-1}{2}\Big(\dfrac{1+s}{2}\Big)^{n-2} \\ Q''_n(s) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4}\Big(\dfrac{1+s}{2}\Big)^{n-3}. \end{cases}$$

Donc : $\ Q'_n(1) = \dfrac{n-1}{2}\ $ et $\ Q''_n(1) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4}$.

Ainsi : $\quad E(X_n) = Q'_n(1) = \dfrac{n-1}{2} \quad$ et :
$$V(X_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{n-1}{4}.$$

28.7

a) • La plus petite valeur que peut prendre X_k est 1, lorsque le lecteur lit toujours la même piste.

• Pour la plus grande valeur de X_k, distinguons deux cas :

- si $k \leqslant n$, alors la plus grande valeur de X_k est k, lorsque le lecteur lit des pistes deux à deux distinctes;

- si $k > n$, alors la plus grande valeur de X_k est n, lorsque le lecteur lit, par exemple, aux cours des n premières lectures, les n pistes, puis lit des pistes quelconques.

• Enfin, X_k peut prendre toutes les valeurs intermédiaires.

On en déduit : $\quad X_k(\Omega) = \{1\,;\mathrm{Min}(n,k)\}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons E l'ensemble des k premières lectures possibles. Alors : $\quad \mathrm{Card}(E) = n^k$.

De plus, chaque élément de E est équiprobable.

- L'événement $A = (X_k = 1)$ est réalisé si et seulement si le lecteur lit toujours la même piste. Il faut donc choisir cette piste (n choix), et lire cette piste k fois ($1^k = 1$ choix).

Ainsi : $\quad \mathrm{Card}(A) = n$.

Et donc : $\quad P(A) = P(X_k = 1) = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.

- L'événement $B = (X_k = k)$ n'est réalisable que si $k \leqslant n$. Dans ce cas, B est réalisé si et seulement si le lecteur lit des pistes deux à deux distinctes. Il y a donc $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ choix.

Ainsi : $\quad \mathrm{Card}(B) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Et donc :
$$P(B) = P(X_k = k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{n^k\,(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $i \in \{1, ..., n\}$.

La famille d'événements $\big((X_k = \ell), \ell \in \{1, ..., n\}\big)$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :
$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{\ell=1}^{n} P(X_k = \ell)P_{(X_k=\ell)}(X_{k+1} = i).$$

Or : $\ $ si $\ell \neq i, i-1$, alors $P_{(X_k=\ell)}(X_{k+1} = i) = 0$.

On a alors :
$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i) = \ & P(X_k = i)P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = i) \\ & + P(X_k = i-1)P_{(X_k=i-1)}(X_{k+1} = i). \end{aligned}$$

Si $(X_k = i)$, alors $(X_{k+1} = i)$ est réalisé si et seulement si on lit une piste déjà lue, parmi les i pistes lues, donc :
$$P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n}.$$

De même, si $(X_k = i-1)$, alors $(X_{k+1} = i)$ est réalisé si et seulement si on lit une piste pas encore lue, parmi les $n-(i-1)$ pistes non lues, donc :

$$P_{(X_k=i-1)}(X_{k+1}=i) = \frac{n-i+1}{n}.$$

On en déduit :

$$P(X_{k+1}=i) = \frac{i}{n}P(X_k=i) + \frac{n-i+1}{n}P(X_k=i-1).$$

d) • Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
&E(X_{k+1})\\
&= \sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(n,k+1)} iP(X_{k+1}=i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} iP(X_{k+1}=i) \quad \text{car si } \ k+1<n \text{ et } k+2 \leqslant i \leqslant n,\\
&\qquad\qquad \text{alors } \ P(X_{k+1}=i)=0\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{i^2}{n}P(X_k=i) + \frac{i(n-i+1)}{n}P(X_k=i-1)\Big)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2P(X_k=i) + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)(n-i)P(X_k=i)}_{=0 \text{ pour } i=0 \text{ et } i=n}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2P(X_k=i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(i+1)(n-i)P(X_k=i)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2P(X_k=i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i(n-1)P(X_k=i)\\
&\qquad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i^2)P(X_k=i)\\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} iP(X_k=i) + \sum_{i=1}^{n}P(X_k=i)\\
&= \frac{n-1}{n}E(X_k)+1.
\end{aligned}$$

• La suite $\big(E(X_k)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

La suite de terme général $u_k = E(X_k) - n$ est alors une suite géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$.

Donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_k) = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{k-1}(E(X_1)-n)+n.$$

Or la va X_1 est constante, égale à 1, donc $E(X_1)=1$.

On en déduit :

$$E(X_k) = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{k-1}(1-n)+n = n\Big[1-\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{k}\Big].$$

e) On a : $\left|\dfrac{n-1}{n}\right| < 1$, donc $\Big(\dfrac{n-1}{n}\Big)^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit : $E(X_k) \underset{k\infty}{\longrightarrow} n$.

Ce résultat est prévisible car, lorsque le nombre de lectures tend vers l'infini, toutes les pistes vont tendre à être lues, donc X_k va tendre vers n, et son espérance aussi.

f) On a : $\Big(\dfrac{n-1}{n}\Big)^k = \big(1-\dfrac{1}{n}\big)^k = 1 - \dfrac{k}{n} + \underset{n\infty}{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

Donc : $E(X_k) = n\Big(1-1+\dfrac{k}{n}+\underset{n\infty}{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) = k + \underset{n\infty}{o}(1)$.

On en déduit : $E(X_k) \underset{n\infty}{\longrightarrow} k$.

Ce résultat est prévisible car, lorsque le nombre de pistes tend vers l'infini, les pistes lues lors de k premières lectures vont tendre à être toutes différentes, donc X_k va tendre vers k, et son espérance aussi.

28.8

a) Notons, pour $k \in \{1,\dots,N-1\}$, $E_k = (X_N > k)$.

L'événement E_k est réalisé si et seulement si les k premiers numéros obtenus sont rangés par ordre strictement croissant.

Pour réaliser E_k, il faut :

- choisir les k premiers numéros : $\dbinom{N}{k}$ choix,
- les ordonner par ordre croissant : 1 choix,
- répartir les $(N-k)$ autres numéros dans les $(N-k)$ derniers tirages : $(N-k)!$ choix.

Ainsi : $\mathrm{Card}(E_k) = \dbinom{N}{k}(N-k)! = \dfrac{N!}{k!}$.

De plus, il y a $N!$ tirages possibles, les tirages étant équiprobables.

On en déduit :

$$(E_k) = P(X_N > k) = \frac{\mathrm{Card}(E_k)}{N!} = \frac{1}{k!}.$$

b) • La va X_N prend ses valeurs dans $\{2,\dots,N\}$.

• On a, pour tout $k \in \{2,\dots,N-1\}$:

$$P(X_N=k) = P(X_N>k-1) - P(X_N>k)$$

et : $\quad P(X_N=N) = P(X_N>N-1)$.

Ainsi,pour tout $k \in \{2,\dots,N-1\}$:

$$P(X_N=k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}$$

et : $\quad P(X_N=N) = \dfrac{1}{(N-1)!}$.

Remarque : on vérifie $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} P(X_N=k) = 1$.

c) On a :

$$\begin{aligned}
E(X_N) &= \sum_{k=2}^{N} kP(X_N=k)\\
&= \Big(\sum_{k=2}^{N-1}\frac{k(k-1)}{k!}\Big) + \frac{N}{(N-1)!} = \Big(\sum_{k=0}^{N-3}\frac{1}{k!}\Big) + \frac{N}{(N-1)!}.
\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-3}\frac{1}{k!} \underset{N\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ et $\dfrac{N}{(N-1)!} \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit : $E(X_N) \underset{N\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

Vrai ou Faux ?

28.1 Si X est une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{X}$ est aussi une variable aléatoire. V F

28.2 Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$, alors X^2 est une variable aléatoire et $P(X^2 = 1) = P(X = 1)$. V F

28.3 Si X est une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω et si f est une application définie sur $X(\Omega)$, alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire définie sur Ω et la loi de probabilité de Y est donnée par : $\forall y \in f\big(X(\Omega)\big), \quad P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega),\ y = f(x)} P(X = x)$. V F

28.4 L'espérance d'une variable aléatoire réelle X définie sur un univers fini Ω est donnée par : V F

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

28.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance d'une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$ est égale à $\dfrac{n}{2}$. V F

28.6 Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors : V F

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p).$$

28.7 D'après le théorème du transfert, si X est une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini Ω et si f est une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$, alors l'espérance de $f(X)$ est donnée par : $E\big(f(X)\big) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$. V F

28.8 La variance d'une variable aléatoire réelle X définie sur un univers fini est donnée par : V F

$$V(X) = \big(E(X)\big)^2 - E(X^2).$$

28.9 La variance d'une variable aléatoire réelle X définie sur un univers fini vérifie : V F

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big).$$

28.10 Si deux variables aléatoires réelles X, Y définies sur un même univers fini vérifient $X \leqslant Y$, alors : $V(X) \leqslant V(Y)$. V F

Vrai ou Faux, les réponses

28.1 L'application $\dfrac{1}{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \omega \longmapsto \dfrac{1}{X(\omega)}$ est une variable aléatoire. **V**

28.2 On a l'égalité d'événements $(X^2 = 1) = (X = 1) \cup (X = -1)$, où la réunion est disjointe, donc $P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1)$, et il se peut que $P(X = -1) \neq 0$. **F**

28.3 C'est un résultat du cours. **V**

28.4 C'est une définition du cours. **V**

28.5 D'après le cours, c'est $\dfrac{n+1}{2}$ au lieu de $\dfrac{n}{2}$. **F**

28.6 C'est un résultat du cours. **V**

28.7 C'est un résultat du cours. **V**

28.8 La différence est dans le mauvais sens, le résultat correct est : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$. **F**

28.9 C'est un résultat du cours. **V**

28.10 Contrexemple : $\Omega = \{1, 2\}$, $X(1) = -1$, $X(2) = 1$, P la probabilité uniforme, $Y = 2$. **F**

On a alors $X \leqslant Y$, mais $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 1$ et $V(Y) = 0$, donc on n'a pas $V(X) \leqslant V(Y)$.

Couples de variables aléatoires

Chapitre 29

Plan

On utilise l'abréviation :

va pour
variable aléatoire.

Thèmes abordés dans les exercices

- Loi d'un couple, lois marginales, lois conditionnelles
- Indépendance de variables aléatoires
- Covariance d'un couple de variables aléatoires
- lois usuelles : loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme
- Obtention d'inégalités sur des probabilités.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de la loi d'un couple de variables aléatoires, des lois marginales, des lois conditionnelles ; obtention des lois marginales à partir de la loi du couple
- Indépendance de deux variables aléatoires, indépendance mutuelle d'une suite finie de variables aléatoires
- Définition de la covariance d'un couple de variables aléatoires, propriétés
- Espérance et variance d'une somme de n variables aléatoires
- Loi de Bernoulli : définition, espérance et variance
- Loi binomiale : définition, espérance et variance
- Loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$: définition, espérance et variance
- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour déterminer la loi de probabilité d'un couple (X,Y) de va

Commencer par déterminer les valeurs x_i que peut prendre la va X et les valeurs y_j que peut prendre la va Y.

Ensuite, pour chaque couple (x_i, y_j) possible, calculer la probabilité $P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$.

➟ **Exercices 29.1 à 29.3, 29.6, 29.7**

Exemple

Une urne contient 3 boules : deux blanches et une noire.
On tire successivement et sans remise, les trois boules de l'urne.
On note X (resp. Y) le rang d'apparition de la première boule blanche (resp. noire).

Déterminer la loi du couple (X,Y).

Le couple de va (X,Y) est à valeurs dans $\{1,2\} \times \{1,2,3\}$.
Soit $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}$.
Nous allons calculer $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$.
Si $i = j$, l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ est impossible, donc $p_{ij} = 0$.
L'événement $(X = 2, Y = 3)$ est impossible, donc $p_{23} = 0$.

On a :
$$p_{12} = P(X = 1, Y = 2) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$
$$p_{13} = P(X = 1, Y = 3) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1} = \frac{1}{3},$$
$$p_{21} = P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{3}\,\frac{2}{2} = \frac{1}{3}.$$

On conclut que la loi du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant :

Y \ X	1	2
1	0	1/3
2	1/3	0
3	1/3	0

Méthode

Pour montrer que $\{(x_i, y_j, p_{i,j}),\ (i,j) \in I \times J\}$ est la loi d'un couple de va

Montrer :
$$\Big(\forall (i,j) \in I \times J, \quad p_{i,j} \geqslant 0\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1.$$

➟ **Exercice 29.3**

Exemple

On considère un couple de va (X, Y) dont la loi est donnée par le tableau suivant, où $a \in \mathbb{R}$:

$Y \backslash X$	1	2
1	a	$2a$
2	a	$3a$
3	$3a$	0

Déterminer a.

On a : $a \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 3} P(X = i, Y = j) = 1$,

d'où $10a = 1$, et on conclut : $a = \dfrac{1}{10}$.

Méthode

Pour déterminer les lois marginales connaissant la loi du couple (X, Y) de va discrètes

- Pour déterminer $P(X = x_i)$, écrire :
$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$
- Pour déterminer $P(Y = y_j)$, écrire :
$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$

➟ **Exercices 29.1 à 29.3, 29.6**

Exemple

On considère un couple de va (X, Y) dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$Y \backslash X$	0	1	2
0	1/10	2/10	1/10
1	2/10	1/10	3/10

Déterminer les lois marginales de X et Y.

On vérifie d'abord que chaque probabilité est bien $\geqslant 0$ et que la somme totale est égale à 1.

On calcule les lois marginales de X et Y en appliquant les formules du cours :

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, \quad P(X = i) = \sum_{j=0}^{1} P(X = i, Y = j)$$
$$= P(X = i, Y = 0) + P(X = i, Y = 1),$$

$$\forall j \in \{0, 1\}, \quad P(Y = j) = \sum_{i=0}^{2} P(X = i, Y = j)$$
$$= P(X = 0, Y = j) + P(X = 1, Y = j) + P(X = 2, Y = j).$$

Les totaux correspondants sont alors placés dans les « marges » du tableau de la loi du couple (X, Y) :

$Y \backslash X$	0	1	2	Y
0	1/10	2/10	1/10	4/10
1	2/10	1/10	3/10	6/10
X	3/10	3/10	4/10	

Méthode

Pour montrer que deux va X et Y sont indépendantes

Montrer que, pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$:
$$P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = P(X = x)P(Y = y).$$

➟ **Exercice 29.3**

Exemple

Soit (X, Y) un couple de va à valeurs dans $\{0, 1\}$.
Montrer que les va X et Y sont indépendantes si et seulement si les deux événements $(X = 0)$ et $(Y = 0)$ sont indépendants.

1) Si les va X et Y sont indépendantes, alors en particulier :
$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0),$$
donc les deux événements $(X = 0)$ et $(Y = 0)$ sont indépendants.

2) Réciproquement, supposons que les deux événements $(X = 0)$ et $(Y = 0)$ sont indépendants, c'est-à-dire :
$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0).$$
On a, d'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X = 0,\ X = 1)$:
$$P(Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0),$$
donc :
$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 0) &= P(Y = 0) - P(X = 0, Y = 0) \\ &= P(Y = 0) - P(X = 0)P(Y = 0) \\ &= \big(1 - P(X = 0)\big)P(Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0). \end{aligned}$$
De même : $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1)$.
Enfin :
$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 1) &= P(Y = 1) - P(X = 0, Y = 1) \\ &= P(Y = 1) - P(X = 0)P(Y = 1) \\ &= \big(1 - P(X = 0)\big)P(Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1). \end{aligned}$$
On a montré :
$$\forall (i, j) \in \{0, 1\}^2, \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j),$$
donc, par définition, les va X et Y sont indépendantes.

Méthode

Pour montrer que deux va discrètes X et Y ne sont pas indépendantes

Essayer de :

- montrer qu'il existe $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :
$$P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) \neq P(X = x)P(Y = y)$$
- montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$

➟ **Exercices 29.1, 29.2, 29.6**

Exemple

On considère deux variables aléatoires X, Y telles que
$E(X) = 2, \quad E(Y) = 3, \quad E(XY) = 4.$
Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

On a :

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0,$$

donc, d'après le cours, les va X et Y ne sont pas indépendantes.

Exemple

On considère un couple de va (X, Y) à valeurs dans $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$ et de loi donnée par le tableau suivant :

$Y \backslash X$	0	1	2
0	1/10	2/10	3/10
1	0	2/10	2/10

Montrer que les va X et Y ne sont pas indépendantes.

Essayons de montrer, par exemple :

$$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0).$$

D'après le tableau : $P(X = 0, Y = 0) = \dfrac{1}{10}.$

On a :

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{10} + 0 = \frac{1}{10},$$

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &\\ &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 0) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}, \end{aligned}$$

donc :

$$P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{10}\,\frac{6}{10} = \frac{6}{100} \neq \frac{1}{10} = P(X = 0, Y = 0).$$

On conclut que les deux va X et Y ne sont pas indépendantes.

Méthode

Pour calculer la covariance d'un couple (X, Y) de va

Essayer de :

- utiliser la définition : $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- calculer $V(X), V(Y), V(X + Y)$ (ou $V(X - Y)$) et utiliser la formule :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

(ou la formule $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$)
- si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

➟ **Exercices 29.1 à 29.3, 29.6, 29.7, 29.15**

Exemple

Soit (X, Y) un couple de va à valeurs dans $\{0, 1\}$. On note :

$$a = P(X = 0, Y = 0),$$
$$b = P(X = 0, Y = 1),$$
$$c = P(X = 1, Y = 0),$$
$$d = P(X = 1, Y = 1).$$

Montrer :

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = ad - bc.$$

On a :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{1} iP(X = i) = P(X = 1)$$
$$= P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = c + d,$$

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{1} jP(Y = j) = P(Y = 1)$$
$$= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) = b + d,$$

et, par la formule de transfert :

$$E(XY) = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant 1 \\ 0 \leqslant j \leqslant 1}} ijP(X = i, Y = j) = P(X = 1, Y = 1) = d.$$

On déduit :

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = d - (c + d)(b + d)$$
$$= d(1 - b - c - d) - bc = ad - bc.$$

Méthode

Pour calculer l'espérance et la variance d'une somme S_n de n va $X_1, ..., X_n$

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des va discrètes.

- On a : $$E(S_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$
- On a : $$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i,\, X_j);$$

  si de plus les va $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $V(S_n)$ est donnée par : $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

➟ **Exercices 29.8, 29.11, 29.13**

Exemple

Soient X, Y, Z trois va mutuellement indépendantes et suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0\,;\,1]$.

On note $U = X + XY + XYZ$.

Calculer $E(U)$.

On a, par linéarité de l'espérance :

$$E(U) = E(X) + E(XY) + E(XYZ),$$

puis, par indépendance mutuelle des va X, Y, Z :

$$E(U) = E(X) + E(X)E(Y) + E(X)E(Y)E(Z)$$
$$= p + p^2 + p^3 = p(1 + p + p^2).$$

Méthode

Pour reconnaître une loi usuelle

Essayer de :

- reconnaître une « situation type » d'une loi usuelle

Nom	Situation type
Loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(p)$	Succès ou échec (1 ou 0) lors d'une expérience n'ayant que deux issues dont la probabilité de succès est p
Loi binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$	Loi du nombre de succès lors d'une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p
Loi uniforme : $\mathcal{U}(\{1,...,n\})$	Choix d'un entier « au hasard » entre 1 et n

- utiliser l'une des méthodes décrites dans le chapitre 27 et reconnaître une loi usuelle par l'expression de $P(X=k)$

Nom - Variable	Univers image	Loi
Loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p \quad \text{et} \quad P(X=0)=1-p$
Loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$\forall k \in \{0,...,n\},\ P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,...,n\})$	$\{1,\dots,n\}$	$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ P(X=k)=\dfrac{1}{n}$

➟ **Exercices 29.4, 29.8 à 29.10**

Exemple

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5.

Dans chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres.

a) On tire une boule et on note X le numéro obtenu.

b) On tire successivement deux boules avec remise et on note X le nombre de numéros pairs obtenus.

a) Chaque boule a la probabilité $\dfrac{1}{5}$ d'être tirée, donc X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{1,...,5\})$.

b) On réalise ici une succession de deux épreuves de Bernoulli (tirer une boule) de façon indépendantes et dont la probabilité de succès (obtenir une boule de numéro pair) est $\dfrac{2}{5}$, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \dfrac{2}{5}\right)$.

Méthode

Pour déterminer l'espérance et la variance d'une va X dont la loi est une loi usuelle

Utiliser les résultats du cours :

Variable	Espérance	Variance
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$E(X) = p$	$V(X) = p(1-p)$
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$E(X) = np$	$V(X) = np(1-p)$
$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,...,n\})$	$E(X) = \dfrac{n+1}{2}$	$V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

➟ **Exercices 29.9, 29.10**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de piles obtenus. Reconnaître la loi de X et donner $E(X)$ et $V(X)$.

La va X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$, et on a donc, d'après le cours :

$$E(X) = n\frac{1}{2} = \frac{n}{2}, \quad V(X) = n\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}.$$

Exemple

On lance une fois un dé équilibré à 6 faces et on note X le numéro de la face obtenue. Reconnaître la loi de X et donner $E(X)$ et $V(X)$.

La va X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{1,...,6\})$ et on a donc, d'après le cours :

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}, \quad V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}.$$

Méthode

Pour majorer ou minorer une probabilité

Penser à utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si X est une va discrète, alors : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

➟ **Exercices 29.9, 29.14**

Exemple

On effectue une suite de n lancers d'une pièce équilibrée ($n \in \mathbb{N}^*$).

Déterminer n pour que l'on puisse affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 4%, que la fréquence des piles obtenus diffère de $\frac{1}{2}$ d'au plus 3% .

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus et $F = \frac{X}{n}$ la fréquence des piles obtenus.

On cherche n pour que : $P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{100}\right) \geqslant 1 - \frac{4}{100}$.

La va X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, donc :

$$E(X) = \frac{n}{2}, \quad V(X) = \frac{n}{4},$$

d'où : $E(F) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{2}, \quad V(F) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{1}{4n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on a :

$$P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{100}\right) \leqslant \frac{V(F)}{\left(\frac{3}{100}\right)^2} = \frac{10^4}{36n}.$$

D'où :

$$P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{100}\right) = 1 - P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{100}\right) \geqslant 1 - \frac{10^4}{36n}.$$

Pour que $\quad P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{100}\right) \geqslant 1 - \frac{4}{100}$,

il suffit donc que : $1 - \frac{10^4}{36n} \geqslant 1 - \frac{4}{100}$,

c'est-à-dire : $\frac{10^4}{36n} \leqslant \frac{4}{100}$ ou encore : $n \geqslant \frac{10^6}{4 \cdot 36} = 6944,4...$

On conclut qu'un entier n convenant est $n = 6945$.

Énoncés des exercices

29.1 Tirages sans remise, loi du plus petit et du plus grand des numéros obtenus

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y prélève deux boules sans remise. On définit les va X et Y égales respectivement au plus petit et au plus grand des deux numéros obtenus.

a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

b) En déduire les lois marginales de X et de Y. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

c) Les va X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

d) On pose $Z = Y - X$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$. Déterminer ensuite la loi de Z.

29.2 Exemple de va non corrélées et non indépendantes

On considère une va X dont la loi est donnée ci contre, et on pose $Y = |X|$.

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

a) Déterminer la loi du couple (X, Y), puis la loi de Y.

b) Les va X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

29.3 Exemple de loi conjointe

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit, pour $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, les réels $p_{i,j}$ par : $p_{i,j} = a \cdot i \cdot j$.

a) Trouver a pour que $\left\{(i, j, p_{i,j})\ ;\ (i, j) \in \{1, ..., n\}^2\right\}$ soit la loi d'un couple (X, Y) de va.

b) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les va sont-elles indépendantes ?

c) En déduire $\text{Cov}(X, Y)$ puis $E(XY)$.

d) On pose $Z = X + Y$. Calculer l'espérance et la variance de Z.

29.4 Reconnaissance de lois usuelles

Pour chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres :

a) on lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la va égale au numéro obtenu

b) une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire successivement et avec remise 8 boules et on note X la va égale au nombre de boules rouges obtenues

c) on range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac

d) une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) ; on les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués

e) on pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la va égale au nombre de bonnes réponses.

29.5 Somme de deux va indépendantes suivant une loi binomiale

Soient X et Y deux va indépendantes suivant respectivement la loi binomiale de paramètre (n, p) et la loi binomiale de paramètre (m, p), avec $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, p \in]0\,;1[$.

a) Déterminer la loi de $S = X + Y$.

b) À quelle situation type peut-on associer les va X et Y ? Que représente alors S ? Commenter le résultat obtenu au *a)*.

c) Soit $k \in \{0, ..., n+m\}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $(S = k)$.

29.6 Choix d'une urne, puis tirage d'une boule dans cette urne

Soit $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$. Pour tout k de $\{1, ..., n\}$, l'urne $\mathcal{U}_k$ contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule de cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.

a) Déterminer la loi de X. Calculer son espérance.

b) Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire la loi marginale de Y. Calculer son espérance.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et commenter son signe.

29.7 Loi du rang d'apparition de la première et de la deuxième boule blanche

Soit $m \geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $m - 2$ boules noires. On les tire une à une sans remise, et on note X (resp. Y) la va égale au rang d'apparition de la première (resp. deuxième) boule blanche.

a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

b) On pose $D = Y - X$. Montrer que X et D ont la même loi. Les va X et D sont-elles indépendantes ?

c) En déduire : $E(Y) = 2E(X)$ et $\text{Cov}(X, Y) = \dfrac{V(Y)}{2}$.

d) Montrer que X et $m + 1 - Y$ ont la même loi. En déduire $E(X)$ et $E(Y)$.

29.8 Probabilité qu'une va de loi donnée soit à valeurs paires

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de va indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p, avec $0 < p < 1$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et u_n la probabilité que S_n soit pair.

a) Préciser, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la loi de S_n.

b) Calculer u_1, u_2, u_3.

c) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = au_n + b$.

En déduire une expression de u_n en fonction de n, ainsi que la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

29.9 Détermination d'une proportion inconnue p de boules blanches dans une urne

Soit $n \geqslant 1$. Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On y effectue n tirages avec remise et on note X_n le nombre de boules blanches obtenues lors de ces n tirages.

a) Donner la loi, l'espérance et la variance de X_n.

b) Montrer : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

c) Combien de tirages faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'obtention de boules blanches au cours des tirages diffère de p d'au plus 10^{-2} ?

29.10 Répartition de n boules dans 3 sacs

Soit $n \geqslant 1$. On répartit au hasard n boules dans 3 sacs notés S_1, S_2, S_3, indépendamment les unes des autres. On note, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, N_i le nombre de boules dans le sac S_i.

a) Déterminer les lois, les espérances, les variances de N_1, N_2, N_3.

b) Déterminer la loi de $N_1 + N_2$. En déduire la covariance de (N_1, N_2), et commenter son signe.

29.11 Tirages avec remise et ajout d'autres boules

Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, et on note sa couleur. On la remet alors dans l'urne, avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette opération, et on réalise ainsi une succession de tirages.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n la va égale à 1 si on obtient une boule blanche au n-ième tirage et 0 sinon, et S_n la va égale au nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages ; ainsi $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Déterminer la loi de X_1 et la loi de X_2.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout $k \in \{0, ...n\}$, $P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1)$.

En déduire : $\quad P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(S_n)}{2 + cn}$.

c) Montrer, par récurrence sur n, que X_n vérifie : $\quad P(X_n = 1) = P(X_n = 0) = \dfrac{1}{2}$.

29.12 Problème des coïncidences

Soit $n \geqslant 1$. On dispose de n jetons numérotés de 1 à n que l'on répartit dans n boîtes numérotées de 1 à n (chaque boîte contient un jeton et un seul).

On définit, pour tout k de $\{1, ..., n\}$, la va X_k égale à 1 si la boîte numéro k contient le jeton numéro k et 0 sinon, et la va S égale au nombre de boîtes contenant le jeton de même numéro.

a) Déterminer, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, la loi de X_k, son espérance et sa variance.

b) Calculer, pour tout $(k, \ell) \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $k \neq \ell$, la covariance du couple (X_k, X_ℓ).

c) En déduire $E(S)$ et $V(S)$.

29.13 Tirages d'un nombre aléatoire de jetons, loi de la somme des numéros obtenus

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On dispose de deux urnes : la première $\mathcal{U}_1$ contient $(n+1)$ jetons numérotés de 0 à n, la seconde $\mathcal{U}_2$ contient n jetons numérotés de 1 à n.

On tire au hasard un jeton de $\mathcal{U}_1$, et on note N son numéro. Puis on tire une poignée de N jetons de l'urne $\mathcal{U}_2$.

a) Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

b) Pour tout i de $\{1, ..., n\}$, on note X_i la va égale à 1 si le jeton numéroté i de l'urne $\mathcal{U}_2$ est tiré et 0 sinon.

1) Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.

2) Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$? En déduire la covariance des couples $(X_i,\, X_j)$, pour $i \neq j$.

c) On note S la va égale à la somme des numéros des jetons obtenus dans l'urne $\mathcal{U}_2$. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

29.14 Exemple d'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Un exploitant agricole possède 100 vaches qui se répartissent au hasard entre deux étables, qui contiennent chacune n places $(50 \leq n \leq 100)$.

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place, avec une probabilité supérieure à 95%.

29.15 Inégalité de Cauchy-Schwarz

On considère deux variables aléatoires X et Y.

a) Justifier : $\forall t \in \mathbb{R},\ V(tX+Y) \geqslant 0$.

En déduire : $\left|\mathrm{Cov}(X,Y)\right| \leqslant \sqrt{V(X)V(Y)}$.

b) Que peut-on dire lorsque $\left|\mathrm{Cov}(X,Y)\right| = \sqrt{V(X)V(Y)}$?

29.16 Un QCM

Soient $n \geqslant 1$ et $p \in]0\,;1[$. Un QCM comporte n questions. Pour chaque question, un élève a la probabilité p de connaître la bonne réponse et donc de répondre correctement.

a) On note X la va égale au nombre de bonnes réponses données. Reconnaître la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

b) L'élève a la possibilité de répondre une seconde fois aux questions mal répondues. On note Y le nombre de questions refaites et Z le nombre de questions refaites et correctement répondues.

1) Soit $k \in \{0, ..., n\}$. Déterminer la loi conditionnelle de Z sachant $(Y = k)$.

2) En déduire la loi de Z et son espérance.

c) On définit la va $S = X + Z$. Que représente S ? Montrer que S suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Du mal à démarrer ?

29.1 *a)* Remarquer que X et Y prennent leurs valeurs respectivement dans $\{1, ..., 3\}$ et $\{2, ..., 4\}$, puis calculer, pour tous $i \in \{1, ..., 3\}$ et $j \in \{2, ..., 4\}$, $P(X = i, Y = j)$.

b) Utiliser : $\begin{cases} \forall i \in \{1, ..., 3\}, \quad P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=2}^{4} p_{i,j} \\ \forall j \in \{2, ..., 4\}, \quad P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} p_{i,j}. \end{cases}$

c) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
Pour $\mathrm{Cov}(X, Y)$, utiliser :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

d) Utiliser : $\quad E(Z) = E(Y) - E(X),$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Pour déterminer la loi de Z, remarquer que Z prend ses valeurs dans $\{1, ..., 3\}$, et exprimer, pour tout i de $\{1, ..., 3\}$, l'événement $(Z = i)$ à l'aide des va X et Y.

29.2 *a)* La va Y prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, calculer, pour tout $i \in \{-2, ..., 2\}$ et $j \in \{0, ..., 2\}$, $P(X = i, Y = j)$.

b) Montrer que les va X et Y ne sont pas indépendantes.

c) Pour $\mathrm{Cov}(X, Y)$, utiliser :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

29.3 *a)* Déterminer a pour que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_{i,j} = 1$.

b) • Pour la loi de X, utiliser :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad P(X = i) = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}.$$

• Pour la loi Y, utiliser :

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \quad P(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.$$

• Montrer :
$\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad p_{i,j} = P(X = i)P(Y = j).$

c) En déduire : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

d) Utiliser : $\quad E(Z) = E(X) + E(Y),$
$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).$

29.4 Essayer de reconnaître des situations types.

29.5 *a)* Écrire, pour tout k de $\{0, ..., n + m\}$:

$$P(S = k) = \sum_{(i,j)\ ;\ i+j=k} P(X = i, Y = j),$$

utiliser ensuite l'indépendance de X et Y, puis la formule de Vandermonde :

$$\sum_{(i,j)\ ;\ i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}.$$

Montrer que S suit une loi binomiale.

b) Immédiat.

c) Écrire, pour tout i de $\{0\,;k\}$:

$$P_{(S=k)}(X = i) = \frac{P(X = i, S = k)}{P(S = k)} = \frac{P(X = i, Y = k - i)}{P(S = k)},$$

puis utiliser l'indépendance de X et Y.

29.6 *a)* Montrer : $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$

et : $\quad \forall k \in \{1, ..., n\}, \quad P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Puis montrer : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

b) • Calculer, pour tout $(k, \ell) \in \{1, ..., n\}^2$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = \ell)$,
puis en déduire $P(X = k, Y = \ell)$.

• Déterminer la loi marginale de Y par la méthode usuelle.

c) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Pour $\mathrm{Cov}(X, Y)$, utiliser :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Justifier que $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$.

29.7 *a)* Remarquer que X prend ses valeurs dans $\{1, ..., m - 1\}$ et que Y prend ses valeurs dans $\{2, ..., m\}$.

Calculer pour $k \in \{1, ..., m - 1\}$ et $\ell \in \{2, ..., m\}$, $P(X = k, Y = \ell)$.

b) Déterminer la loi de X et la loi de D, et vérifier que ce sont les mêmes lois.

c) En déduire que $E(D) = E(X)$ et $V(D) = V(X)$.

d) Déterminer la loi de $m + 1 - Y$, et en déduire que $E(m + 1 - Y) = E(X)$.

29.8 *a)* Utiliser un résultat de cours.

b) Expliciter les probabilités demandées.

c) • En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement :

« la va S_n est paire »,

écrire :

$$u_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}),$$

puis justifier : $\begin{cases} P_{A_n}(A_{n+1}) = P(X_{n+1} = 0) \\ P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P(X_{n+1} = 1). \end{cases}$

• En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Trouver alors l'expression de u_n en fonction de n puis sa limite lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

29.9 *a)* Reconnaître que la va X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

b) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\dfrac{X_n}{n}$.

Utiliser : $\forall p \in [0\,;1],\quad p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

c) Déterminer un entier n tel que :

$$P\Big(\Big|\frac{X_n}{n} - p\Big| < 10^{-2}\Big) \geqslant 0.95.$$

29.10 *a)* Reconnaître que les va N_1, N_2, N_3 suivent la loi binomiale de paramètre $\Big(n, \dfrac{1}{3}\Big)$.

b) Justifier que la va $N_1 + N_2$ suit la loi binomiale de paramètre $\Big(n, \dfrac{2}{3}\Big)$. En déduire $V(N_1 + N_2)$ puis $\mathrm{Cov}(N_1, N_2)$.

29.11 *a)* Obtenir : $\begin{cases} P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2} \\ P(X_2 = 0) = P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

b) Puisque S_n prend ses valeurs dans $\{0, ..., n\}$, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) P_{(S_n = k)}(X_{n+1} = 1).$$

c) Raisonner par récurrence forte.
Pour montrer l'hérédité, calculer $E(S_n)$.

29.12 *a)* Obtenir : $P(X_k = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(X_k = 0) = \dfrac{n-1}{n}$.

b) Pour $\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)$, utiliser :

$$\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = E(X_k X_\ell) - E(X_k)E(X_\ell).$$

Remarquer : $E(X_k X_\ell) = P(X_k = 1, X_\ell = 1)$.

c) Remarquer : $S = X_1 + \cdots + X_n$.

En déduire, par linéarité de l'espérance, $E(S)$.

Pour calculer $V(S)$, utiliser la formule :

$$V(S) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell).$$

29.13 *a)* Montrer : $N(\Omega) = \{0, ..., n\}]$

et : $\forall k \in \{0, ..., n\},\quad P(N = k) = \dfrac{1}{n+1}$,

puis obtenir : $E(N) = \dfrac{n}{2}$ et $V(N) = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

b) 1) Utiliser :

$$P(X_i = 1) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k) P_{(N=k)}(X_i = 1),$$

et remarquer : $P_{(N=k)}(X_i = 1) = \dfrac{k}{n}$.

2) Remarquer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = N$, donc :

$$V(N) = V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Puisque toutes les variances sont égales et que toutes les covariances sont égales, en déduire :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{V(N) - nV(X_1)}{2\binom{n}{2}}.$$

c) Écrire : $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\, X_i$.

29.14 Considérer la va X égale au nombre de vaches qui choisissent l'étable numéro 1, et montrer que X suit la loi binomiale de paramètre $\Big(100, \dfrac{1}{2}\Big)$.

En déduire que l'événement E :

« chaque vache trouve une place »

s'écrit : $E = (100 - n \leqslant X \leqslant n)$.

Déterminer ensuite un entier n tel que $P(E) \geqslant 0.95$, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

29.15 *a)* Une variance est toujours positive ou nulle.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant V(tX + Y) = t^2 V(X) + 2t\,\mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

En déduire que $t \mapsto V(tX+Y)$ est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, donc le discriminant Δ est négatif ou nul.

b) Remarquer :

$$\big|\mathrm{Cov}(X, Y)\big| = \sqrt{V(X)V(Y)} \iff \Delta = 0.$$

29.16 *a)* Justifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

b) 1) Justifier que la loi conditionnelle de Z sachant $(Y = k)$ est la loi binomiale de paramètre (k, p).

2) Remarquer que $Y = n - X$, et en déduire la loi de Y.

Pour déterminer la loi de Z, utiliser la formule des probabilités totales.

c) Justifier que S prend ses valeurs dans $\{0, ..., n\}$, calculer, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $P(S = k)$ en écrivant :

$$P(S = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Z = k - i).$$

Corrigés des exercices

29.1

a) Loi du couple (X,Y) :

- Les tirages s'effectuant sans remise, X prend ses valeurs dans $\{1,...,3\}$ et Y prend ses valeurs dans $\{2,...,4\}$.

- Soient $i \in \{1,...,3\}$ et $j \in \{2,..,4\}$.

Calculons $p_{i,j} = P\big((X=i) \cap (Y=j)\big)$:

Si $i \geqslant j$, alors $p_{i,j} = 0$ car X est nécessairement strictement inférieur à Y.

Si $i < j$, alors $p_{i,j} = \dfrac{2}{4\times 3} = \dfrac{1}{6}$ car il y a 4×3 tirages possibles, chaque tirage est équiprobable, et il y a 2×1 tirages qui réalisent l'événement $\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$.

Ainsi, la loi du couple (X,Y) est donnée par :

Y \ X	1	2	3
2	1/6	0	0
3	1/6	1/6	0
4	1/6	1/6	1/6

b) • *Loi de X :*

On a : $X(\Omega) = \{1,...,3\}$

et : $\forall i \in \{1,...,3\},\quad P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=2}^{4} p_{i,j}$.

Donc : $P(X=1) = p_{1,2}+p_{1,3}+p_{1,4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$P(X=2) = p_{2,3}+p_{1,4} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$P(X=3) = p_{3,4} = \dfrac{1}{6}$.

Ainsi la loi de X est :

x	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

• *Loi de Y :*

On a : $Y(\Omega) = \{2,...,4\}$

et : $\forall j \in \{2,...,4\},\quad P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} p_{i,j}$.

Donc : $P(Y=2) = p_{1,2} = \dfrac{1}{6}$

$P(Y=3) = p_{1,3}+p_{2,3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$P(Y=4) = p_{1,4}+p_{2,4}+p_{3,4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi la loi de Y est :

y	2	3	4
$P(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

• On a :

$E(X) = 1\times\dfrac{1}{2} + 2\times\dfrac{1}{3} + 3\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3}$,

$E(X^2) = 1^2\times\dfrac{1}{2} + 2^2\times\dfrac{1}{3} + 3^2\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{10}{3}$,

et donc $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \dfrac{5}{9}$;

$E(Y) = 2\times\dfrac{1}{6} + 3\times\dfrac{1}{3} + 4\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{10}{3}$,

$E(Y^2) = 2^2\times\dfrac{1}{6} + 3^2\times\dfrac{1}{3} + 4^2\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{35}{3}$,

et donc $V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = \dfrac{5}{9}$.

c) • Les va X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$\begin{cases} P(X=2, Y=2) = 0 \\ P(X=2)P(Y=2) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18} \neq 0. \end{cases}.$$

• Calculons $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

On a :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 2\leqslant j\leqslant 4}} i\,j\,p_{i,j} \\ &= 1\times 2\times\frac{1}{6} + 1\times 3\times\frac{1}{6} + 1\times 4\times\frac{1}{6} \\ &\quad + 2\times 3\times\frac{1}{6} + 2\times 4\times\frac{1}{6} + 3\times 4\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{35}{6}. \end{aligned}$$

Donc : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{35}{6} - \dfrac{5}{3}\times\dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{18}$.

Remarque : $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

d) • Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(Y) - E(X) = \frac{5}{3}.$$

• Par une formule du cours :

$$V(Z) = V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{5}{9}.$$

• *Loi de $Z = Y - X$:*

La va Z prend ses valeurs dans $\{1,...,3\}$.

Et : $P(Z=1) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=3)$
$+ P(X=3, Y=4) = 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$
$P(Z=2) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=4)$
$= 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$
$P(Z=3) = P(X=1, Y=4) = \dfrac{1}{6}.$

Remarque : En utilisant la loi de Z, on retrouve le fait que $E(Z) = \dfrac{5}{3}$ et $V(Z) = \dfrac{5}{9}$, mais ceci nécessite des calculs supplémentaires.

29.2

Remarque : On a bien : $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = 1.$

a) • *Loi du couple* (X, Y) *:*

La va Y prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2
0	0	0	1/6	0	0
1	0	1/4	0	1/4	0
2	1/6	0	0	0	1/6

• *Loi de* Y *:* On déduit du tableau précédent :

$P(Y=0) = P(X=0, Y=0) = \dfrac{1}{6}$

$P(Y=1) = P(X=-1, Y=1) + P(X=1, Y=1)$
$= 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

$P(Y=2) = P(X=-2, Y=2) + P(X=2, Y=2)$
$= 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

Ainsi la loi de Y est :

y	0	1	2
$P(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

b) Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$\begin{cases} P(X=1, Y=0) = 0 \\ P(X=1)P(Y=0) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24} \neq 0. \end{cases}$$

c) Calculons $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$:

$$E(X) = (-2) \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} = 0,$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

$$E(XY) = \sum_{\substack{-2 \leqslant i \leqslant 2 \\ 0 \leqslant j \leqslant 2}} i\, j\, P(X=i, Y=j) = 0 \times 0 \times \frac{1}{6}$$
$$+ (-1) \times 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times 1 \times \frac{1}{4}$$
$$+ (-2) \times 2 \times \frac{1}{6} + 2 \times 2 \times \frac{1}{6} = 0.$$

Donc : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$

Remarque : X et Y ne sont pas indépendantes et pourtant $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

29.3

a) • Calculons d'abord $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i\, j$:

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i\, j = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big) = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

• Prenons $a = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$.

Alors : $\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad p_{i,j} \geqslant 0$

et : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_{i,j} = a \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij = 1.$

Donc $\big\{(i, j, p_{i,j})\,;\,(i,j) \in \{1, ..., n\}^2\big\}$ est la loi d'un couple de variables aléatoires.

b) • *Loi de* X *:*

On a : $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ et, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$:

$$P(X=i) = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = a\, i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{2\, i}{n(n+1)}.$$

• *Loi de* Y *:* par symétrie des rôles de X et de Y :

$$Y(\Omega) = \{1, ..., n\} \text{ et } : \forall j \in \{1, ..., n\},\ P(Y=j) = \frac{2\, j}{n(n+1)}.$$

• Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes car, pour tout $(i,j) \in \{1, ..;, n\}^2$:

$$P(X=i)P(Y=j) = \frac{4\, i\, j}{n^2(n+1)^2} = p_{i,j}.$$

c) Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Ainsi : $E(XY) = E(X)E(Y) = E(X)^2$
(car X et Y ont la même loi).

Or :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} iP(X=i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\, i^2}{n(n+1)}$$
$$= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

Donc : $E(XY) = \dfrac{(2n+1)^2}{9}.$

d) • Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 2E(X) = \frac{2(2n+1)}{3}.$$

• Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et que X et Y ont la même loi, on a :

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 2V(X).$$

On a :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\, i^3}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2},$$

donc :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9}$$
$$= \frac{9(n^2+n) - 2(4n^2+4n+1)}{18}$$

$$= \frac{n^2+n-2}{18} = \frac{(n+2)(n-1)}{18}.$$

On conclut : $V(Z) = \dfrac{(n+2)(n-1)}{9}$.

29.4

a) Le dé étant équilibré, chaque face a la probabilité $\dfrac{1}{6}$ d'être obtenu. Donc X suit la loi uniforme sur $\{1, ..., 6\}$.

b) On réalise ici une succession de 8 épreuves de Bernoulli (tirer une boule) de façons indépendantes et dont la probabilité de succès (obtenir une boule rouge) est $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètre $\left(8, \dfrac{1}{3}\right)$.

c) On réalise ici une succession de 10 épreuves de Bernoulli (mettre une boule dans l'un des 3 sacs) de façons indépendantes et dont la probabilité de succès (mettre la boule dans le premier sac) est $\dfrac{1}{3}$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètre $\left(10, \dfrac{1}{3}\right)$.

d) Les tirages s'effectuant sans remise, X est égale à la place du jeton numéro 1, cette place étant un entier « au hasard » entre 1 et n. Donc X suit la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.

e) On réalise ici une succession de n épreuves de Bernoulli (répondre à une question) de façons indépendantes et dont la probabilité de succès (répondre correctement) est $\dfrac{1}{r}$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{1}{r}\right)$.

29.5

a) La va S prend ses valeurs dans $\{0, ..., n+m\}$, car X (resp. Y) prend ses valeurs dans $\{0, ..., n\}$ (resp. $\{0, ..., m\}$).

Soit $k \in \{0, ..., n+m\}$. Alors :

$$\begin{aligned} P(S=k) &= P\Big(\bigcup_{(i,j)\ ;\ i+j=k} (X=i, Y=j)\Big) \\ &= \sum_{(i,j)\ ;\ i+j=k} P(X=i, Y=j) \\ &\qquad \text{par incompatibilité des événements} \\ &= \sum_{(i,j)\ ;\ i+j=k} P(X=i)P(Y=j). \\ &\qquad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \end{aligned}$$

Or, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$
$$P(Y=j) = \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j},$$

avec la convention $\dbinom{n}{i} = 0$ si $i > n$ et $\dbinom{m}{j} = 0$ si $j > m$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \sum_{(i,j)\ ;\ i+j=k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \\ &= \sum_{(i,j)\ ;\ i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} p^{i+j} (1-p)^{n+m-(i+j)} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{(i,j)\ ;\ i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} \\ &= \binom{n+m}{k}. \end{aligned}$$

Donc : $P(S=k) = \dbinom{k}{n+m} p^k (1-p)^{n+m-k}$.

Ainsi, S suit la loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.

b) Supposons que l'on dispose d'une pièce amenant pile avec la probabilité p. On lance d'abord n fois cette pièce et on note X le nombre de piles obtenus ; puis on lance m fois cette pièce et on note Y le nombre de piles obtenus.

Alors X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) et Y la loi binomiale de paramètre (m, p).

La va S correspond alors au nombre de piles obtenus lors des $n+m$ lancers. Donc S suit la loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$ (on retrouve le résultat précédent).

c) Sachant que $(S=k)$, X prend ses valeurs dans $\{0, ..., k\}$.

Soit $i \in \{0, ..., k\}$. Alors :

$$\begin{aligned} &P_{(S=k)}(X=i) \\ &= \frac{P(X=i, S=k)}{P(S=k)} \\ &= \frac{P(X=i, Y=k-i)}{P(S=k)} \\ &= \frac{P(X=i)P(Y=k-i)}{P(S=k)} \quad \text{par indep. de } X \text{ et } Y \\ &= \frac{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)}}{\binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}} \\ &= \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{k}{n+m}}. \end{aligned}$$

La loi obtenue est appelée loi hypergéométrique de paramètre $\left(n+m, k, \dfrac{n}{n+m}\right)$.

29.6

a) • *Loi de X :*

La va X prend ses valeurs dans $\{1, ..., n\}$.

Chaque urne a la même probabilité d'être choisie, donc :

$$\forall k \in \{1, ...n\}, \quad P(X=k) = \frac{1}{n}.$$

• On a : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$.

b) • *Loi du couple (X,Y) :*

Soit $(k,\ell)\in\{1,...,n\}^2$. On a :

$$p_{k,\ell}=P(X=k,Y=\ell)=P(X=k)P_{(X=k)}(Y=\ell).$$

- Si $\ell>k$, alors $P_{(X=k)}(Y=\ell)=0$, donc : $p_{k,\ell}=0$.

- Si $\ell\leqslant k$, puisque chaque boule de $\mathcal{U}_k$ a la même probabilité d'être tirée, $P_{(X=k)}(Y=\ell)=\dfrac{1}{k}$, donc : $p_{k,\ell}=\dfrac{1}{nk}$.

Ainsi : $\forall(k,\ell)\in\{1,...,n\}^2,\quad p_{k,\ell}=\begin{cases}\dfrac{1}{nk} & \text{si } \ell\leqslant k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

• *Loi de Y :*

La va Y prend ses valeurs dans $\{1,...,n\}$ et on a, pour tout $\ell\in\{1,...,n\}$:

$$P(Y=\ell)=\sum_{k=1}^{n}p_{k,\ell}=\sum_{k=\ell}^{n}\frac{1}{nk}=\frac{1}{n}\sum_{k=\ell}^{n}\frac{1}{k}$$

(on ne sait pas calculer explicitement cette somme).

• On a :

$$\begin{aligned}&E(Y)\\
&=\sum_{\ell=1}^{n}\ell P(Y=\ell)=\sum_{\ell=1}^{n}\Big(\sum_{k=\ell}^{n}\frac{\ell}{nk}\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=1}^{k}\frac{\ell}{nk}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nk}\Big(\sum_{\ell=1}^{k}\ell\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nk}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(k+1)\\
&=\frac{1}{2n}\times\frac{n^2+3n}{2}=\frac{n+3}{4}.\end{aligned}$$

c) • X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$P(X=1,Y=n)=0$$

et $\quad P(X=1)P(Y=n)=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n^3}\neq 0.$

• Calculons $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

on a :

$$\begin{aligned}&E(XY)\\
&=\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}k\ell\, p_{k,\ell}=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=1}^{k}k\ell\frac{1}{nk}\Big)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=1}^{k}\ell\Big)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\Big)\\
&=\frac{1}{2n}\Big(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\Big)\\
&=\frac{(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\frac{(n+1)(n+2)}{6}-\frac{n+1}{2}.\frac{n+3}{4}=\frac{n^2-1}{24}.$$

Ainsi $\operatorname{Cov}(X,Y)>0$, ce qui normal puisque, lorsque X augmente, Y a tendance à augmenter aussi, les deux va évoluent dans le même sens.

29.7

a) Loi de (X,Y) :

- Les tirages s'effectuant sans remise, X prend ses valeurs dans $\{1,...,m-1\}$ et Y prend ses valeurs dans $\{2,...,m\}$.

- Soient $k\in\{1,...,m-1\}$ et $\ell\in\{2,...,m\}$.

Si $k\geqslant\ell$, alors $P(X=k,Y=\ell)=0$.

Si $k<\ell$, l'événement $(X=k,Y=\ell)$ est réalisé lorsque l'on obtient l'une des deux boules blanches au k-ième tirage, puis la dernière boule blanche au ℓ-ième tirage.

Donc : $P(X=k,Y=\ell)=\dfrac{2}{m}\times\dfrac{1}{m-1}$.

Ainsi :

$$P(X=k,Y=\ell)=\begin{cases}\dfrac{2}{m(m-1)} & \text{si}\quad 1\leqslant k<\ell\leqslant m\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

b) • *Loi de X :*

La va X prend ses valeurs dans $\{1,...,m-1\}$ et on a, pour tout $k\in\{1,...,m-1\}$:

$$P(X=k)=\sum_{\ell=2}^{m}P(X=k,Y=\ell)$$

$$=\sum_{\ell=k+1}^{m}\frac{2}{m(m-1)}=\frac{2(m-k)}{m(m-1)}.$$

• *Loi de D :*

La va D prend ses valeurs dans $\{1,...,m-1\}$, car $1\leqslant X<Y\leqslant m$, et on a, pour tout $k\in\{1,...,m-1\}$:

$$P(D=k)=P(Y=X+k)=\sum_{\ell=1}^{m-1}\underbrace{P(X=\ell,Y=\ell+k)}_{=0\quad \text{si}\ell+k>m}$$

$$=\sum_{\ell=1}^{m-k}\frac{2}{m(m-1)}=\frac{2(m-k)}{m(m-1)}.$$

Ainsi, X et D ont la même loi.

• Les va X et D ne sont pas indépendantes, car :

$$P(X=m-1,D=2)=P(X=m-1,Y=m+1)=0,$$

$$P(X=m-1)P(D=2)=\frac{2}{m(m-1)}\times\frac{2(m-2)}{m(m-1)}\neq 0.$$

c) Puisque $D=Y-X$ et X ont même loi, on en déduit :

$$E(D)=E(Y)-E(X)=E(X),$$

donc : $\quad E(Y)=2E(X)$

et : $\quad V(X)=V(Y)+V(X)-2\operatorname{Cov}(X,Y)=V(X),$

donc : $\quad \operatorname{Cov}(X,Y)=\dfrac{V(X)}{2}.$

d) • *Loi de* $Z = m + 1 - Y$:

La va Y prend ses valeurs dans $\{2, ..., m\}$, donc la va Z prend ses valeurs dans $\{1, ..., m-1\}$.

On a, pour tout $k \in \{1, ..., m-1\}$:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(Y = m + 1 - k) \\ &= \sum_{\ell=1}^{m-1} \underbrace{P(X = \ell, Y = m + 1 - k)}_{= 0 \quad \text{si} \ell \geqslant m+1-k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{m-k} \frac{2}{m(m-1)} = \frac{2(m-k)}{m(m-1)} = P(X = k). \end{aligned}$$

Ainsi, X et Z ont la même loi.

• Donc :

$$E(Z) = m + 1 - E(Y) = m + 1 - 2E(X) = E(X).$$

D'où :

$$E(X) = \frac{m+1}{3} \quad \text{et} \quad E(Y) = 2E(X) = \frac{2(m+1)}{3}.$$

29.8

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La va S_n est la somme de n va indépendantes, suivant la loi de Bernoulli de même paramètre p.

D'après le cours, S_n suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

b) • Calculons u_1.
La va $S_1 = X_1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
Donc : $u_1 = P(S_1 = 0) = 1 - p$.

• Calculons u_2.
La va S_2 suit la loi binomiale de paramètre $(2, p)$.
Donc :
$$\begin{aligned} u_2 &= P(S_2 = 0) + P(S_2 = 2) \\ &= \binom{2}{0}(1-p)^2 + \binom{2}{2}p^2 = (1-p)^2 + p^2 \\ &= 1 - 2p + 2p^2. \end{aligned}$$

• Calculons u_3.
La va S_3 suit la loi binomiale de paramètre $(3, p)$.
Donc :
$$\begin{aligned} u_3 &= P(S_3 = 0) + P(S_3 = 2) \\ &= \binom{3}{0}(1-p)^3 + \binom{3}{2}p^2(1-p) \\ &= (1-p)^3 + 3p^2(1-p) \\ &= (1-p)(1 - 2p + 4p^2). \end{aligned}$$

c) • Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « la va S_n est paire ».

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = P(A_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements. Donc par la formule des probabilités totales :

$$u_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}).$$

Or, sachant A_n, l'événement A_{n+1} est réalisé si et seulement si X_{n+1} est égal à 0.
Ainsi : $P_{A_n}(A_{n+1}) = P(X_{n+1} = 0) = 1 - p$.

De la même façon : $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P(X_{n+1} = 1) = p$.

On en déduit :

$$u_{n+1} = u_n(1-p) + (1-u_n)p = (1-2p)u_n + p.$$

• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite arithmético-géométrique.

Déterminons α tel que $\alpha = (1-2p)\alpha + p$:

$$\alpha = (1-2p)\alpha + p \iff \alpha(2p) = p \iff \alpha = \frac{1}{2}.$$

La suite de terme général $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ est alors une suite géométrique de raison $(1-2p)$ puisque :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{2} = (1-2p)u_n + p - \frac{1}{2} \\ &= (1-2p)\Big(u_n - \frac{1}{2}\Big) = (1-2p)v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_n &= (1-2p)^{n-1}v_1 = (1-2p)^{n-1}\Big(u_1 - \frac{1}{2}\Big) \\ &= (1-2p)^{n-1}\Big(\frac{1}{2} - p\Big) = \frac{(1-2p)^n}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n + \frac{1}{2} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

• Puisque $0 < p < 1$, on a $-1 < 1 - 2p < 1$,
et donc $(1-2p)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

On conclut : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

29.9

a) On réalise une succession de n épreuves de Bernoulli (tirer une boule), de façon indépendantes et dont la probabilité de succès (obtenir une boule blanche) est p.
Ainsi, la va X_n suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

D'après le cours : $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$.

b) Notons $F_n = \dfrac{X_n}{n}$. On a :

$$E(F_n) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{np}{n} = p,$$
$$V(F_n) = \frac{V(X_n)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la va F_n. On obtient :

$$P\Big(\Big|\frac{X_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Considérons l'application
$$f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto p(1-p).$$

L'application f est dérivable sur $[0\,;1]$ et, pour tout $p \in [0\,;1]$, $f'(p) = 1 - 2p$.

On en déduit que f atteint son maximum pour $p = \frac{1}{2}$ et que ce maximum est égal à $f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4}$.

Ainsi : $\forall p \in [0\,;1], \quad p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

On obtient alors : $P\Big(\Big|\dfrac{X_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$,

d'où :

$$P\Big(\Big|\frac{X_n}{n} - p\Big| < \varepsilon\Big) = 1 - P\Big(\Big|\frac{X_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

c) Il s'agit de déterminer un entier n tel que :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<10^{-2}\right)\geqslant 0.95.$$

Pour cela, il suffit que $1-\dfrac{1}{4n(10^{-2})^2}\geqslant 0.95$.

Or :

$$1-\frac{1}{4n(10^{-2})^2}\geqslant 0.95 \iff n\geqslant \frac{10^4}{4\times 0.05}=50000.$$

On en déduit que pour $n\geqslant 50000$, la fréquence d'obtention de boules blanches diffère de p d'au plus 10^{-2}, avec une probabilité inférieure ou égale à 5%.

29.10

a) Soit $i\in\{1,2,3\}$. On réalise une succession de n épreuves de Bernoulli (mettre une boule dans un sac), de façon indépendantes et dont la probabilité de succès (mettre une boule dans le sac S_i) est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Ainsi, la va N_i suit la loi binomiale de paramètre $\left(n,\dfrac{1}{3}\right)$.

On en déduit, d'après le cours :

$$E(N_1)=E(N_2)=E(N_3)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$$

$$V(N_1)=V(N_2)=V(N_3)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}.$$

b) • La va N_1+N_2 représente le nombre total de boules dans les sacs S_1 et S_2. La probabilité de mettre une boule dans le sac S_1 ou le sac S_2 est égale à $\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, N_1+N_2 suit la loi binomiale de paramètre $\left(n,\dfrac{2}{3}\right)$.

On en déduit : $\quad V(N_1+N_2)=n\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2n}{9}$.

Or : $\quad V(N_1+N_2)=V(N_1)+V(N_2)+2\,\mathrm{Cov}(N_1,N_2)$.

$$\text{Ainsi : }\quad \mathrm{Cov}(N_1,N_2)=\frac{V(N_1+N_2)-V(N_1)-V(N_2)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\Big(-\frac{2n}{9}\Big)=\frac{-n}{9}.$$

Remarque : $\mathrm{Cov}(N_1,N_2)<0$, ce qui était prévisible, puisque, lorsque N_1 augmente, N_2 a tendance à diminuer.

29.11

a) • *Loi de X_1 :*

La va X_1 prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.

Puisque l'urne ne contient qu'une boule blanche et une boule noire, alors : $\quad P(X_1=1)=P(X_1=0)=\dfrac{1}{2}$.

• *Loi de X_2 :*

- La va X_2 prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.

- On a : $P(X_2=0)=P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=0)$
$\qquad+P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=0)$.

Or, si $(X_1=0)$, l'urne contient, avant le deuxième tirage, 1 boule blanche et $1+c$ boules noires, donc :

$$P_{(X_1=0)}(X_2=0)=\frac{1+c}{2+c}.$$

De même, si $(X_1=1)$, l'urne contient, avant le deuxième tirage, $1+c$ boules blanches et 1 boule noire, donc :

$$P_{(X_1=1)}(X_2=0)=\frac{1}{2+c}.$$

D'où : $\;P(X_2=0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+c}{2+c}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2+c}=\dfrac{1}{2}$.

Puis : $\quad P(X_2=1)=1-P(X_2=0)=\dfrac{1}{2}$.

On conclut : $\quad P(X_2=1)=P(X_2=0)=\dfrac{1}{2}$.

b) • Soit $k\in\{0,...,n\}$. Sachant que $(S_n=k)$, on a obtenu, lors des n premiers tirages, k boules blanches et $n-k$ boules noires ; l'urne contient donc, avant le $(n+1)$-ième tirage, $1+ck$ boules blanches et $1+c(n-k)$ boules noires et au total $2+cn$ boules.

On obtient : $\quad P_{(S_n=k)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{1+ck}{2+cn}$.

• Ainsi, puisque S_n prend ses valeurs dans $\{0,...,n\}$, on a :

$$P(X_{n+1}=1)=\sum_{k=0}^{n}P(S_n=k)P_{(S_n=k)}(X_{n+1}=1)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}P(S_n=k)\frac{1+ck}{2+cn}$$
$$=\frac{1}{2+cn}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n}P(S_n=k)}_{=1}+c\underbrace{\sum_{k=0}^{n}kP(S_n=k)}_{=E(S_n)}\Big)$$
$$=\frac{1+cE(S_n)}{2+cn}.$$

c) Notons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\text{« } P(X_n=1)=P(X_n=0)=\frac{1}{2}\text{ » }.$$

Raisonnons par récurrence forte.

⋆ *Initialisation :* d'après *a)*, on a la propriété $\mathcal{P}(1)$.

⋆ *Hérédité :* supposons, pour un n de $\mathbb{N}^*$ fixé, les propriétés $\mathcal{P}(1),\dots,\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Pour tout $k\in\{1,...,n\}$, d'après la propriété $\mathcal{P}(k)$,

$$E(X_k)=0\times P(X_k=0)+1\times P(X_k=1)=\frac{1}{2}.$$

Donc : $\quad E(S_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\frac{n}{2}$.

Ainsi, d'après *b)* :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1+cE(S_n)}{2+cn}=\frac{1+c\frac{n}{2}}{2+cn}=\frac{1}{2}.$$

Enfin, puisque $X_{n+1}(\Omega)=\{0,1\}$,

$$P(X_{n+1}=0)=1-P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}.$$

D'où la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

⋆ *Conclusion :* On conclut que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$X_n(\Omega)=\{0,1\}\;\text{ et }\;P(X_n=1)=P(X_n=0)=\frac{1}{2}.$$

29.12

a) • *Loi de X_k :*

La va X_k prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.

L'événement $(X_k = 1)$ est réalisé lorsque la boîte numéro k contient le jeton numéro k. Or, il y a $n!$ répartitions possibles, chaque répartition est équiprobable, et il y a $1\times(n-1)!$ répartitions réalisant l'événement $(X_k = 1)$.

On en déduit : $P(X_k = 1) = \dfrac{1\times(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Et donc : $P(X_k = 0) = 1 - P(X_k = 1) = \dfrac{n-1}{n}$.

• On a :

$$E(X_k) = 0\times P(X_k = 0) + 1\times P(X_k = 1) = \frac{1}{n},$$

$$E(X_k^2) = 0^2\times P(X_k = 0) + 1^2\times P(X_k = 1) = \frac{1}{n},$$

et donc : $V(X_k) = E(X_k^2) - \big(E(X_k)\big)^2 = \dfrac{n-1}{n^2}$.

b) Calculons $\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = E(X_kX_\ell) - E(X_k)E(X_\ell)$.

Les va X_k et X_ℓ prennent leurs valeurs dans $\{0,1\}$, donc :

$$\begin{aligned}E(X_kX_\ell) &= 0\times 0\times P(X_k = 0, X_\ell = 0)\\ &\quad + 0\times 1\times P(X_k = 0, X_\ell = 1)\\ &\quad + 1\times 0\times P(X_k = 1, X_\ell = 0)\\ &\quad + 1\times 1\times P(X_k = 1, X_\ell = 1)\\ &= P(X_k = 1, X_\ell = 1).\end{aligned}$$

L'événement $(X_k = 1, X_\ell = 1)$ est réalisé lorsque les boîtes numéro k et ℓ contiennent le jeton de même numéro. Or, il y a $n!$ répartitions possibles, chaque répartition est équiprobable, et il y a $1\times 1\times(n-2)!$ répartitions réalisant l'événement $(X_k = 1, X_\ell = 1)$.

On en déduit :

$$P(X_k = 1, X_\ell = 1) = \frac{1\times 1\times(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Ainsi : $\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

c) Par définition des va, on peut écrire :

$$S = X_1 + \cdots + X_n.$$

• Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n\times\frac{1}{n} = 1.$$

• Les va X_k ne sont pas mutuellement indépendantes, donc :

$$V(S) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell).$$

Or, toutes les covariances sont égales (égales à $\dfrac{1}{n^2(n-1)}$), et il y a $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ termes dans la deuxième somme.

Donc : $$V(S) = n\times\frac{n-1}{n^2} + 2\times\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

29.13

a) • *Loi de N :*

La va N prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$.

Chaque jeton de $\mathcal{U}_1$ a la même probabilité d'être tiré. Donc : $\forall k\in\{0,\dots,n\},\ P(N = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

• On a :

$$E(N) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2},$$

$$E(N^2) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n+1} = \frac{1}{n+1}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6},$$

donc : $V(N) = E(N^2) - \big(E(N)\big)^2 = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

b) 1) • *Loi de X_i :*

La va X_i prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.

Soit $k\in\{1,\dots,n\}$. Calculons $P_{(N=k)}(X_i = 1)$. Sachant que $(N = k)$, on tire une poignée de k jetons dans l'urne $\mathcal{U}_2$; il y a donc $\dbinom{n}{k}$ résultats possibles, chaque résultat est équiprobable ; l'événement $(X_i = 1)$ est réalisé si on tire le jeton numéro i : il y a donc $1\times\dbinom{n-1}{k-1}$ résultats réalisant cet événement.

Ainsi :

$$P_{(N=k)}(X_i = 1) = \frac{\dbinom{n-1}{k-1}}{\dbinom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!}\times\frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}.$$

On en déduit, en utilisant le système complet d'événements $\big\{(N = k)\,;\ k\in\{0,\dots,n\}\big\}$:

$$\begin{aligned}P(X_i = 1) &= \sum_{k=0}^{n} P(N = k)P_{(N=k)}(X_i = 1)\\ &= P(N = 0)\underbrace{P_{(N=0)}(X_i = 1)}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} P(N = k)P_{(N=k)}(X_i = 1)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\,\frac{k}{n} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} k\\ &= \frac{1}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Puis : $P(X_i = 0) = 1 - P(X_i = 1) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi :

$$E(X_i) = 0\times P(X_i = 0) + 1\times P(X_i = 1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

$E(X_i^2) = 0^2 \times P(X_i = 0) + 1^2 \times P(X_i = 1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - \big(E(X_i)\big)^2 = \frac{1}{2} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}.$$

2) • Par définition des va : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = N$.

• Donc :

$$V(N) = V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Par raison de symétrie, les va X_i ont même loi, et toutes les variances sont égales et toutes les covariances sont égales.

Donc : $V(N) = nV(X_1) + 2\binom{n}{2}\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ d'où :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{V(N) - nV(X_1)}{2\binom{n}{2}} = \frac{\frac{n(n+2)}{12} - \frac{n}{4}}{n(n-1)} = \frac{1}{12}.$$

Ainsi, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i \neq j$:

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{12}.$$

c) On a alors : $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} iX_i$.

• Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} iE(X_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{4}.$$

• On a :

$$\begin{aligned}V(S) &= \sum_{i=1}^{n} V(iX_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(iX_i, jX_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\,j\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2 \times \frac{1}{12} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij.\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{j=2}^{n} j\Big(\sum_{i=1}^{j-1} i\Big)\\ &= \sum_{j=2}^{n} \frac{j^2(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{j=1}^{n} j^2\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big)\\ &= \frac{n(n-1)(3n+2)(n+1)}{24}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}V(S) &= \frac{1}{4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &\quad + \frac{1}{6} \times \frac{n(n-1)(3n+2)(n+1)}{24}\\ &= \frac{n(n+1)(3n^2+11n+4)}{144}.\end{aligned}$$

29.14

• Notons X le nombre de vaches qui choisissent l'étable numéro 1. Puisque les 100 vaches choisissent une étable de façon indépendante les unes des autres, et que la probabilité de choisir l'étable numéro 1 est égale à $\frac{1}{2}$, on en déduit que X suit la loi binomiale de paramètre $\Big(100, \frac{1}{2}\Big)$.

Ainsi : $E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$, $V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$.

• Notons E l'événement : « chaque vache trouve une place ». Il s'agit donc de déterminer n tel que : $P(E) \geqslant 0.95$ (*).

Si X vaches choisissent l'étable numéro 1, alors $100 - X$ vaches choisissent l'étable numéro 2.
On en déduit :

$$E = (X \leqslant n) \cap (100 - X \leqslant n) = (100 - n \leqslant X \leqslant n).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}P(E) &= P\big(100 - n \leqslant X \leqslant n\big)\\ &= P\big(50 - n \leqslant X - 50 \leqslant n - 50\big)\\ &= P\Big(\big|X - 50\big| \leqslant n - 50\Big) = P\Big(\big|X - E(X)\big| \leqslant n - 50\Big)\\ &= 1 - P\Big(\big|X - E(X)\big| > n - 50\Big).\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\begin{aligned}P\Big(\big|X - E(X)\big| > n - 50\Big) &\leqslant P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant n - 50\Big)\\ &\leqslant \frac{V(X)}{(n-50)^2} = \frac{25}{(n-50)^2}.\end{aligned}$$

On obtient donc : $P(E) \geqslant 1 - \dfrac{25}{(n-50)^2}$.

Il en résulte :

$$\begin{aligned}(*) &\Longleftarrow 1 - \frac{25}{(n-50)^2} \geqslant 0.95\\ &\Longleftrightarrow \frac{25}{(n-50)^2} \leqslant 1 - 0.95 = 0.05\\ &\Longleftrightarrow n \geqslant 50 + \sqrt{\frac{25}{0.05}} \simeq 72.3.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour $n = 73$, chaque vache trouve une place avec une probabilité supérieure à 95%.

29.15

a) • Une variance étant toujours positive ou nulle, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad V(tX + Y) \geqslant 0.$$

• On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}V(tX + Y) &= V(tX) + 2\,\mathrm{Cov}(tX, Y) + V(Y)\\ &= t^2 V(X) + 2\,t\,\mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y).\end{aligned}$$

Ainsi, $P : t \longmapsto t^2 V(X) + 2\,t\mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y)$ est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. Donc le discriminant est négatif ou nul.

On en déduit : $\Delta = 4\,\mathrm{Cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y) \leqslant 0$.

Ainsi : $\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$,

et donc : $\big|\mathrm{Cov}(X, Y)\big| \leqslant \sqrt{V(X)V(Y)}$.

b) De plus : $\left|\mathrm{Cov}(X,Y)\right| = \sqrt{V(X)V(Y)} \iff \Delta = 0$.

Donc le polynôme P admet une unique racine réelle t_0.
On a alors : $P(t_0) = 0 = V(t_0X + Y)$.

Ainsi la va $t_0X + Y$ est de variance nulle, donc c'est une va certaine, égale à un réel a. On en déduit : $t_0X + Y = a$, autrement dit $Y = -t_0X + a$.

On conclut que les va X et Y sont liées par une relation affine.

29.16

a) La va X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

D'après le cours : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

b) 1) La loi conditionnelle de Z sachant $(Y = k)$ est la loi binomiale de paramètre (k, p).

2) • Puisque $Y = n - X$, la va Y suit la loi binomiale de paramètre $(n, 1-p)$.

• Déterminons la loi de Z.
La va Z prend ses valeurs dans $\{0, ..., n\}$.

Soit $i \in \{0, ..., n\}$. Alors, par la formule des probabilités totales :

$$P(Z = i) = \sum_{k=0}^{n} P(Y = k)\underbrace{P_{(Y=k)}(Z = i)}_{=0 \text{ si } k<i}$$

$$= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}.$$

Or, pour tout $k \in \{i, ..., n\}$:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{n!}{(n-k)!i!(k-i)!}$$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{(n-i)!}{(k-i)!\big((n-i)-(k-i)\big)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&P(Z = i)\\
= \;& \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{k-i}(1-p)^{2k-i}p^{n-k+i}\\
\underset{\ell=k-i}{=} \;& \binom{n}{i}\sum_{\ell=0}^{n-i}\binom{n-i}{\ell}(1-p)^{2\ell+i}p^{n-\ell}\\
= \;& \binom{n}{i}(1-p)^i p^i\sum_{\ell=0}^{n-i}\binom{n-i}{\ell}\big((1-p)^2\big)^{\ell}p^{(n-i)-\ell}\\
\underset{\text{Newton}}{=} \;& \binom{n}{i}(1-p)^i p^i\big((1-p)^2 + p\big)^{n-i}\\
= \;& \binom{n}{i}(p-p^2)^i\big(1-(p-p^2)\big)^{n-i}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la va Z suit la loi binomiale de paramètre $\big(n, p(1-p)\big)$.

D'après le cours : $E(Z) = np(1-p)$.

Remarque : On peut retrouver ce résultat par un raisonnement direct (et sans calcul !).

Tout se passe comme si l'élève répond deux fois à chaque question. La va Z compte le nombre de questions mal répondues la première fois, puis correctement répondues la seconde fois. On réalise donc une succession de n épreuves de Bernoulli, dont la probabilité de succès est $(1-p)p$.

Ainsi, la va Z, qui correspond au nombre de succès, suit la loi binomiale de paramètre $\big(n, (1-p)p\big)$.

c) • La va S représente le nombre de bonnes réponses données lors des deux saisies.

• Déterminons la loi de S.

La va S prend ses valeurs dans $\{0, ..., n\}$, puisque $0 \leqslant X + Z \leqslant n$.

Soit $k \in \{0, ..., n\}$. On a :

$$\begin{aligned}
&P(S = k)\\
= \;& \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Z = k-i)\\
= \;& \sum_{i=0}^{k} P(Y = n-i, Z = k-i)\\
= \;& \sum_{i=0}^{k} P(Y = n-i)P_{(Y=n-i)}(Z = k-i)\\
= \;& \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{n-i}(1-p)^{n-i}p^i\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{(n-i)-(k-i)}\\
= \;& \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^k(1-p)^{2n-i-k}.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre :

$$\forall i \in \{0, ..., k\}, \quad \binom{n}{n-i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(S = k) \;&=\; \binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-2k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(1-p)^{k-i}\\
&\underset{\text{Newton}}{=}\; \binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-2k}\big(1+(1-p)\big)^k\\
&=\; \binom{n}{k}\big(p(2-p)\big)^k\big((1-p)^2\big)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Puisque $1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 = p(2-p)$, on en déduit que S suit la loi binomiale de paramètre $\big(n, p(2-p)\big)$.

Remarque : Là encore, on peut retrouver ce résultat par un raisonnement direct (et sans calcul !).

Tout se passe comme si l'élève répond deux fois à chaque question, et que la question est validée s'il donne au moins une fois la bonne réponse.
On réalise donc une succession de n épreuves de Bernoulli, dont la probabilité d'échec est $(1-p)^2$ et dont la probabilité de succès est donc $1 - (1-p)^2 = p(2-p)$.

Ainsi, la va S, qui correspond au nombre de succès, suit la loi binomiale de paramètre $\big(n, p(2-p)\big)$.

Remarque : Les va X et Z n'étant pas indépendantes (car $P(X = n, Z = n) = 0 \neq P(X = n)P(Z = n)$), on ne peut pas utiliser le résultat de l'exercice 29.11.

En revanche, on a :

$$\begin{aligned}
E(X+Z) &= E(X) + E(Z) = np + np(1-p)\\
&= np(2-p) = E(S).
\end{aligned}$$

Vrai ou Faux ?

29.1 Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires définies sur un même univers fini Ω, alors la loi marginale de Y est donnée par : **V F**

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P_{(X=x)}(Y=y)P(X=x).$$

29.2 Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un même univers fini Ω, alors, pour tout $z \in X(\Omega)+Y(\Omega)$, on a : **V F**

$$P(X+Y=z) = \sum_{x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ x+y=z} P(X=x)P(Y=y).$$

29.3 Deux variables aléatoires X, Y définies sur un même univers fini Ω, sont indépendantes si et seulement si : **V F**

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P\big((X=x) \cap (Y=y)\big) = P(X=x)P(Y=y).$$

29.4 Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers fini Ω, alors, pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$: **V F**

$$P\big((X \in A) \cap (Y \in B)\big) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

29.5 Si X, Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers fini et si $E(XY) = E(X)E(Y)$, alors X et Y sont indépendantes. **V F**

29.6 Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers fini Ω, alors X^2 et Y^2 sont indépendantes. **V F**

29.7 Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers fini Ω, alors : $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$. **V F**

29.8 Si X est une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini Ω, alors, pour tout $\varepsilon > 0$: **V F**

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

29.9 Si n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ suivent la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors leur somme $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ **V F**

29.10 Si deux variables aléatoires X, Y, définies sur le même univers fini Ω, suivent la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$, alors (X,Y) suit la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}^2$. **V F**

Vrai ou Faux, les réponses

29.1 C'est un résultat du cours, obtenu en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$. **V**

29.2 On a l'égalité d'événements **F**

$$(X + Y = z) = \bigcup_{x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega),\, x+y=z} \big((X = x) \cap (Y = y)\big),$$

où la réunion est disjointe, donc

$$P(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega),\, x+y=z} P\big((X = x) \cap (Y = y)\big),$$

mais, en général, X et Y ne sont pas indépendantes, donc on ne peut pas remplacer $P\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$ par $P(X = x)P(Y = y)$.

29.3 C'est une définition du cours. **V**

29.4 C'est un résultat du cours. **V**

29.5 C'est la réciproque qui est vraie. **F**

29.6 C'est un cas particulier d'un résultat du cours : si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions f, g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. **V**

29.7 Puisque X et Y sont indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$, d'où : **V**

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big) - \big(E(X+Y)\big)^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \Big(\big(E(X)\big)^2 + 2E(X)E(Y) + \big(E(Y)\big)^2\Big) \\
&= \Big(E(X^2) - \big(E(X)\big)^2\Big) + 2\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big) + \Big(E(Y^2) - \big(E((Y)\big)^2\Big) \\
&= V(X) + V(Y).
\end{aligned}$$

29.8 C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev. **V**

29.9 Il y a eu oubli de l'hypothèse : $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes. **F**

29.10 Contrexemple avec $n = 2$: **F**

$$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{8},\ P(X = 1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{8}.$$

Le résultat devient vrai si on suppose, de plus, que X et Y sont indépendantes.

Chapitre 30

Informatique

Plan

Les programmes sont rédigés en Python 3.3

Thèmes abordés dans les exercices

- Boucles indexées `for`, boucles conditionnelles `while`
- Calcul de sommes, de suites récurrentes
- Manipulations de listes, de chaînes de caractères
- Justification des algorithmes : terminaison et correction
- Étude de la complexité théorique et pratique de certains algorithmes
- Résolutions numériques de problèmes, simulations
- Import de modules, création de graphiques
- Manipulation de fichiers en lecture, en écriture.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Utilisation de l'indentation
- Syntaxe des principales instructions :
  - conditionnelle `if`
  - boucle indexée `for`
  - boucle conditionnelle `while`
- Utilisation de variables, de fonctions
- Connaissance de quelques structures de données (entiers, flottants, listes, chaînes, n-uplets).

Remarques sur l'informatique

- Ce chapitre a pour but de compléter la formation mathématique des étudiants par des notions d'algorithmique, de programmation et d'ingénierie numérique, souvent en lien avec des notions étudiées dans le cours de mathématiques.
- Les exemples proposés ont été rédigés en Python 3.3, mais se transposent facilement dans d'autres versions. En Python 2.7, on évitera l'utilisation des caractères accentués.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour choisir une boucle indexée (`for`) ou conditionnelle (`while`)

Décider de l'arrêt de la boucle :

- Si on connaît *a priori* le nombre de tours de boucle, choisir une boucle `for`
- Sinon, choisir une boucle `while` et bien réfléchir à la condition de sortie de boucle.

Exemple

Déterminer la somme des éléments de la liste :
`a = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5]`

On utilise une variable `s` qui contient la somme partielle de la liste. On parcourt tous les termes de la liste pour qu'à chaque tour de boucle i, `s` contienne $\sum_{k=0}^{i-1} a_k$.

```
a = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5]
def somme(a):
    """Renvoie la somme des éléments de <a>"""
    s = 0
    for e in a:
        s += e
    return s

print(somme(a))
↪ 36
```

Exemple

Déterminer la plus petite puissance de 2 supérieure à un million.

On utilise une variable `p` qui contient les puissances successives de 2, jusqu'à dépasser 10^6.

```
def pppuissance(n):
    """Renvoie la plus petite puissance de 2
       supérieure à <n>"""
    p = 1
    while p < n:
        p *= 2
    return p

print(pppuissance(1e6))
↪ 1048576
```

Rappel de syntaxe Python

1) `for i in range(len(a)):`
`        print(a[i])`

2) `for e in a:`
`        print(e)`

Pour parcourir une liste $[a_0, \dots, a_{n-1}]$, un n-uplet $a_0, \dots, a_{n-1}$ ou une chaîne "$a_0 \dots a_{n-1}$" :

1) On peut parcourir tous les indices (engendré par `len(a)`).

2) Lorsque `a` est un *itérable*, on peut directement itérer sur ses éléments. C'est le cas des *listes*, des *n-uplets*, des *chaînes*, des *ensembles*, des *dictionnaires*, etc.

Rappel de syntaxe Python

```
s += 1
p *= 2
```

Il s'agit d'*affectations augmentées* des variables. La variable `s` est augmentée (au sens de l'addition) de la valeur 1. La variable `p` est multipliée par la valeur 2.

Dans d'autres langages, et c'est aussi possible en Python, on aurait écrit : `s = s + 1` et `p = p * 2`

D'autres opérations d'affectations augmentées sont possibles (`/=`, `//=`, `%=`, `**=`, `|=`, etc).
Remarquons que `!=` n'est pas une affectation augmentée : c'est l'opérateur de comparaison $\neq$.

Méthode

Pour manipuler des listes (resp. des chaînes), par exemple pour une recherche

Essayer de :

- Reconnaître un problème de parcours de liste (resp. de chaîne), avec traitement successif des éléments
- Mettre en œuvre ce parcours avec une boucle `for` ou `while`.
- On pensera que les éléments sont indexés à partir de 0, et que l'on accède au nombre d'éléments avec la fonction `len`.

Exemple

Déterminer le maximum de la liste :
`a = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5]`

On utilise une variable `m` qui contient le maximum partiel de la liste. On parcourt tous les termes de la liste pour que `m` contienne le maximum de la liste partielle $\{\ell_0, \ldots, \ell_{i-1}\}$.

```
a = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5]
def maximum(a):
    """Renvoie la plus grande valeur de <a>"""
    m = a[0]
    for e in a:
        if e > m:
            m = e
    return m

print(maximum(a))
```

$\hookrightarrow$ 9

Rappel de syntaxe Python

```
a[2:7]
a[:3]
a[2:]
a[:-2]
```

Il s'agit de *tranchage* (ou *slicing*) d'une liste. Cette opération permet d'obtenir une sous-liste définie par les indices de début et de fin (+1). Notant `a` $= [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}]$ la liste a :

`a[2:7]`	est	$[a_2, a_3, \ldots, a_5, a_6]$
`a[:3]`	est	$[a_0, a_1, a_2]$
`a[2:]`	est	$[a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}]$
`a[:-2]`	est	$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-4}, a_{n-3}]$

Remarquons aussi que `a[-2]` désigne l'élément a_{n-3}.

Exemple

Écrire une fonction qui insère à sa place une valeur dans la liste triée :

`a = [1, 1, 3, 4, 4, 7, 8, 8]`.

L'utiliser pour insérer les valeurs 6 puis 9.

On utilise une liste `b`. On parcourt les éléments de la liste `a` qui sont inférieurs à `x`, puis ceux qui restent (et qui sont supérieurs à `x`).

```
def insere_dans_tri (a,x):
    """Renvoie la liste des éléments de la liste
       triée <a> où <x> a été inséré à sa place"""
    b = []
    i = 0
    while i < len (a) and a[i] < x:
        b.append(a[i])
        i += 1
    b.append(x)
    for e in a[i:]:
        b.append(e)
    return b

a = [1, 1, 3, 4, 4, 7, 8, 8]
x1 = 6
x2 = 9
print(insere_dans_tri(a,x1))
↪ [1, 1, 3, 4, 4, 6, 7, 8, 8]
print(insere_dans_tri(a,x2))
↪ [1, 1, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9]
```

Méthode

Pour calculer une somme (resp. un produit)

- Utiliser une variable qui contiendra la somme partielle (resp. le produit partiel)
- S'assurer de la correction du résultat en exhibant l'invariant de boucle
- Si la somme (resp. le produit) est double, utiliser deux boucles imbriquées.

➟ **Exercices 30.1 à 30.3, 30.12, 30.15, 30.19**

Exemple

Écrire une fonction `somme(n)` qui calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

On parcourt les valeurs des indices par une boucle `for`. On utilise une variable `s` qui contient les sommes partielles.

```
def somme(n):
    """Renvoie la somme des cubes des entiers
       entre 1 et <n>"""
    s = 0
    for i in range(1, n+1):
        # s est 1^3 + 2^3 + ··· + (i − 1)^3
        s += i**3
    return s

print (somme(15))
↪ 14400
```

Rappel de syntaxe Python

```
[ k ** 3 for k in range(10) ]
```

L'expression proposée s'évalue en :

`[0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729].`

Il s'agit d'une *liste en compréhension*.

La syntaxe – proche de la syntaxe mathématique – est élégante et permet de proposer un code très lisible.

On peut ainsi proposer une autre solution à l'exemple précédent en utilisant une liste en compréhension :

```
def somme(n):
    return sum([i**3 for i in range(1,n+1)])
```

Mais cette méthode n'illustre pas l'algorithme du calcul.

Méthode

Pour calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

- Utiliser une boucle `for` ou `while`
- S'il s'agit d'une relation de récurrence simple $u_{n+1} = f(u_n)$, une seule variable suffit en général
- Pour une suite récurrente double, utiliser deux variables
- Si toutes les valeurs u_0, u_1, …, u_n sont utilisées, par exemple pour une représentation graphique, utiliser une variable contenant la liste de ces valeurs.

➟ **Exercices 30.20, 30.22, 30.24**

Remarque : La récursivité étudiée en seconde année fournit un autre moyen d'obtenir le calcul de u_n.

Exemple

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

Écrire une fonction `u(n)` qui calcule u_n.

On utilise une variable `a` qui contient les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
import math as m
def u(n):
    """Renvoie la valeur de u_<n>"""
    a = -1
    for i in range(1,n+1):
        # a est u_{i-1}
        a = m.sqrt(a + 2)
    return a

print (u(10))
↪ 1.9999958167178002
```

L'indice `i` varie de 1 à n.
En sortie du dernier tour de boucle (lorsque `i` vaut n), `u` est u_n.
Cela justifie la valeur renvoyée par la fonction.

Exemple

On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

Écrire une fonction `fibonacci(n)` qui calcule f_n.

On utilise deux variables `a` et `b` qui contiennent deux termes successifs de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
def fibonacci(n):
    """Renvoie la valeur du <n>-ième terme
       de la suite de Fibonacci"""
    a, b = 1, 1
    for i in range(1,n):
        # a est f_{i-1} et b est f_i
        a, b = b, a+b
    return b

print (fibonacci (45))
↪ 1836311903
```

En sortie du dernier tour de boucle (lorsque `i` vaut $n-1$), `b` est f_n.

Rappel de syntaxe Python

```
a, b = 1, 2
```

Il s'agit d'une *affectation multiple*. La valeur 1 est affectée à la variable `a` et la valeur 2 est affectée à la variable `b`. Cette syntaxe permet d'effectuer très simplement l'échange de deux affectations :

```
a, b = 1, 2
a, b = b, a
print(a);
↪ 2
print(b);
↪ 1
```

Méthode

Pour tester si un entier est pair ou impair, s'il est divisible par 3, etc.

Utiliser le reste dans la division euclidienne :

- `if a % 2 == 0:` teste si le contenu de `a` est pair
- `if a % 2 == 1:` teste si le contenu de `a` est impair
- `if a % 3 == 0:` teste si le contenu de `a` est divisible par 3.

Exemple

On définit la suite de Syracuse de $a \in \mathbb{N}^*$ par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

On conjecture actuellement que, pour chaque valeur de a, cette suite atteint la valeur 1.

Écrire une fonction `syracuse(a)` qui renvoie la première valeur de n telle que $u_n = 1$, lorsque $u_0 = a$.

```
def syracuse(a):
    """Renvoie le nombre d'étapes pour transformer <a>
       en 1 par l'algorithme de Syracuse"""
    n = 0
    while a != 1:
        if a % 2 == 0:
            a //= 2
        else:
            a *= 3
            a += 1
        n += 1
    return n

print (syracuse(157))
↪ 36
```

Méthode

Pour manipuler les chiffres d'un nombre

- Utiliser le reste dans la division euclidienne pour accéder au chiffre *de poids faible* (celui des unités)
- Utiliser le quotient dans la division euclidienne
- Parcourir les chiffres du nombre par une boucle `while` sans chercher à connaître *a priori* le nombre de chiffres
- Savoir représenter un nombre en base 10, en base 2, en base b.

➟ **Exercices 30.15, 30.17**

Exemple

Écrire une fonction `dec(n)` qui renvoie la liste des chiffres de l'écriture de n en base 10.

On note $n = c_p c_{p-1} \dots c_1 c_0$ l'écriture en base 10 d'un entier naturel n, c'est-à-dire :

$$n = \sum_{k=0}^{p} c_k 10^k.$$

On utilise une variable `a` qui contient la liste partielle des chiffres $[c_0, c_1, \dots, c_{i-1}]$, et la variable `n` qui contient le nombre dont l'écriture en base 10 est $c_p c_{p-1} \dots c_{i+1} c_i$.

En sortie de boucle, `n` est 0 et `a` contient la liste des chiffres, mais « à l'envers », car la méthode `append` ajoute les termes à la fin de la liste.

```
def dec(n):
    """Renvoie la liste des chiffres de <n>"""
    a = []
    while n != 0:
        a.append(n % 10)
        n //= 10
    a.reverse ()
    return a

print(dec(314159))
↪ [3, 1, 4, 1, 5, 9]
```

Méthode

Pour s'assurer de la correction d'un algorithme itératif

Préciser l'invariant de boucle :

- Décrire l'état des variables informatiques à l'aide de grandeurs mathématiques
- S'assurer de l'initialisation correcte de ces variables
- Vérifier la bonne propagation de ces propriétés d'un tour de boucle au suivant
- S'il s'agit d'une boucle `while`, s'assurer de la terminaison de la boucle.

On peut alors expliciter le contenu des variables en sortie de boucle.

➟ **Exercices 30.3, 30.5, 30.9, 30.10, 30.16, 30.19**

Exemple

Exhiber l'invariant de boucle pour l'algorithme de recherche du maximum d'une liste, étudié p. 500

Il y a simplement une boucle `for`. L'invariant en entrée du tour de boucle i (lorsque la variable `e` contient l'élément a_i) est :

$$\texttt{m} \text{ est } \mathrm{Max}\{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$$

- Il faudrait initialiser avec `m` « vide », ou « infini », car en entrée du tour de boucle 0, `m` contient le maximum de l'ensemble vide $\{a_0, \ldots, a_{-1}\}$. Initialiser avec a_0 est cependant correct à partir du tour de boucle 1.
- On suppose qu'en entrée du tour de boucle i, `m` contient $\mathrm{Max}\{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$. Alors pendant la boucle, m est comparé à a_i, et sa valeur devient $\mathrm{Max}\{a_0, \ldots, a_i\}$, ce qui est la propriété en entrée du tour de boucle $i+1$.
- Ainsi, en sortie du dernier tour de boucle, numéro $n-1$, `m` contient $\mathrm{Max}\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ qui est bien le maximum de la liste `a`.

Exemple

Exhiber les invariants de boucles pour l'algorithme d'insertion dans une liste triée, étudié p. 501

Il y a deux boucles successives.

1) Pour la boucle `while`, `i` correspond à un indice de boucle et on note n la longueur de la liste. L'invariant de boucle en entrée est :

$$\texttt{b} \text{ est } [a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}],\ i < n \text{ et } a_0 < x,\, a_1 < x,\, \ldots,\, a_i < x$$

La sortie de boucle aura bien lieu car i est incrémenté à chaque tour de boucle, donc dépassera n.
La sortie de boucle se fait dans l'une des deux situations suivantes :

- $i = n$, `b` est $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ et $a_0 < x, a_1 < x, \ldots, a_{n-1} < x$. Dans ce cas, tous les éléments de `a` sont inférieurs à x, et sont dans `b`.
- $i < n$, `b` est $[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}]$,
  $a_0 < x,\, a_1 < x,\, \ldots,\, a_{i-1} < x$ et $a_i \geqslant x$.
  Dans ce cas, x s'intercale entre a_{i-1} et a_i.

2) Pour la boucle `for`, on note $[a_0, \ldots, a_{k-1}]$ les éléments inférieurs à x, placés dans `b` au cours de la première boucle.
L'invariant de boucle en entrée est :

$$\texttt{b} \text{ est } [a_0, \ldots, a_{k-1}, x, a_k, \ldots, a_{i-1}]$$

où a_i est l'élément de `a` qui va être traité, et qui est dans la variable `e`.

Méthode

Pour estimer sur des exemples simples la complexité des algorithmes

- Distinguer :
  - la complexité temporelle (le temps d'exécution)
  - la complexité spatiale (la place mémoire nécessaire à l'exécution)
- Pour la complexité temporelle : dénombrer les utilisations d'une opération significative
- Pour la complexité spatiale : estimer la taille des variables utilisées (listes, chaînes, dictionnaires...)
- On peut aussi mesurer expérimentalement le temps d'exécution des programmes.

➟ **Exercices 30.7, 30.8, 30.10, 30.19**

Exemple

Estimer la complexité de l'algorithme calculant le n-ème terme de la suite de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étudiée p. 503.

1) Complexité temporelle :
Choisissons de dénombrer les additions d'entiers. On note $T(n)$ le nombre d'additions pour calculer u_n. Il est fait une addition à chaque tour de boucle, et il y a $n-1$ tours de boucles effectués, donc $T(n) = n - 1 \sim n$. Il s'agit d'une *complexité linéaire*.

2) Complexité spatiale :
Quelle que soit la valeur de n, deux variables `a` et `b` contenant des entiers sont utilisées. Le programme s'exécute donc en espace constant.

Remarque : Il faudrait bien sûr discuter du nombre de bits utilisés pour stocker ces entiers, et du temps d'addition des grands entiers, car les nombres manipulés augmentent considérablement avec n.

Méthode

Pour utiliser les fonctions d'un module particulier

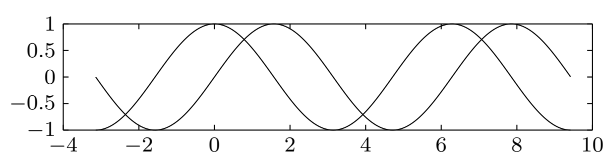
- Charger le module en début de fichier à l'aide de la commande `import`
- Parmi les modules utiles, on peut citer :
  - `math` qui donne accès aux fonctions et aux constantes mathématiques
  - `numpy` et `scipy` qui donnent accès à toutes les fonctions de calcul scientifique et numérique
  - `matplotlib` qui permet tous les tracés graphiques
  - `random` qui fournit un générateur aléatoire, utile par exemple pour simuler une expérience en probabilités
  - `time` qui permet de chronométrer l'exécution des programmes

➟ **Exercices 30.14, 30.18, 30.25, 30.21**

Exemple

Représenter sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions cos et sin

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace (-np.pi, 3*np.pi, 200)
plt.figure()
plt.plot(x,np.cos(x))
plt.plot(x,np.sin(x))
plt.show() # Pour un affichage à l'écran
plt.savefig('cos_et_sin.pdf', format='pdf')
```



Méthode

Pour manipuler un fichier en lecture et en écriture

- Pour accéder à un fichier stocké sur le disque dur, il faut l'ouvrir, le manipuler, et le fermer.
  Une bonne habitude est d'utiliser `with` pour ouvrir le fichier, ce qui garantit une bonne fermeture même en cas de levée d'exception.
- On pensera à préciser le *mode* d'ouverture du fichier :
  - `'r'` (*read*) pour lire les données du fichier
  - `'w'` (*write*) pour écrire des données dans le fichier (et écraser toutes les données existantes dans le fichier)
  - `'a'` (*append*) pour ajouter des données à la fin du fichier
- Il est alors aisé d'itérer sur les lignes du fichier à l'aide d'une boucle `for`.

➟ **Exercices 30.11, 30.25**

Exemple

Un fichier contient une donnée par ligne. Écrire une fonction qui renvoie la plus grande de ces données.

```
def maximum_fichier(fichier):
    """Renvoie la plus grande donnée de <fichier>"""
    with open(fichier,encoding='utf-8',mode='r') as f:
        m = ""
        for ligne in f:
            # m est la plus grande chaîne parmi les
            # lignes de f avant ligne
            if ligne > m: # comparaison de chaînes
                m = ligne
    return m

print(maximum_fichier('bla.txt'))
↪ la plus grande ligne du fichier bla.txt
```

Exemple

Placer dans un fichier `puiss2.txt`, sur des lignes séparées, les mille premières puissances de 2.

```
with open('puiss2.txt',encoding='utf-8',mode='w') as f:
    p = 1
    for k in range(1000):
        # p contient 2^k
        # les k premières lignes du fichier f
        # contiennent les k premières puissances de 2
        f.write(str(p)+'\n')
        p *= 2
↪
```

Il n'y a aucune valeur en sortie, mais une action sur l'environnement (on parle d'*effet de bord*) : dans le répertoire courant, le fichier `puiss2.txt` a été créé et contient les puissances de 2.

Énoncés des exercices

30.1 Approximation du logarithme

On rappelle que, pour $x \in [-1, 1[$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{-x^n}{n}$ converge et a pour somme $\ln(1-x)$.

a) Écrire une fonction `f(n,x)` qui calcule la somme partielle d'ordre n de cette série numérique.

b) Écrire une fonction `approx(x,epsilon)` qui détermine le rang de la première somme partielle qui approxime $\ln(1-x)$ à ε près. Tester cette fonction avec $x = 0,5$ et $\varepsilon = 10^{-8}$.

30.2 Calcul d'un produit

Écrire une fonction `produit(n)` qui calcule $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \sqrt{k}\right)$.

30.3 Calcul de sommes doubles

a) Écrire une fonction `somme1(n)` qui calcule $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{i+j}$.

b) Écrire une fonction `somme2(n)` qui calcule $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{i+j}$.

c) Reprendre les deux fonctions précédentes en utilisant des listes en compréhension.

30.4 Suppression des doublons d'une liste

a) Écrire une fonction `supprime_un_element(x,a)` qui renvoie la liste constituée des éléments de la liste `a` sans les occurrences de `x`.

b) Écrire une fonction `supprime_doublons(a)` qui renvoie la liste constituée des éléments de `a` sans doublon.

30.5 Recherche d'un élément dans une liste

a) Écrire une fonction `recherche1(x,a)` qui renvoie un booléen traduisant la présence ou non de `x` dans la liste `a`. Cette fonction utilisera une boucle indexée.

b) Écrire une fonction `recherche2(x,a)` qui renvoie un booléen traduisant la présence ou non de `x` dans la liste `a`. Cette fonction utilisera une boucle conditionnelle.

c) Tester les fonctions précédentes sur une liste d'entiers aléatoires.

d) Adapter la fonction de la question *b)* et écrire une fonction `recherche3(x,a)` qui renvoie un booléen traduisant la présence ou non de `x` dans la liste `a` dans le cas où la liste est triée par ordre croissant.

30.6 Dénombrer les apparitions d'un élément dans une liste

Écrire une fonction `compte(x,a)` qui renvoie le nombre d'apparitions de `x` dans la liste `a`.

30.7 Concaténation de deux listes

a) Écrire une fonction `concat(a,b)` qui renvoie la concaténation des deux listes `a` et `b`.

b) Évaluer la complexité temporelle de cette fonction en dénombrant les utilisations de la méthode `append`.

30.8 Insertion dans une liste

a) Écrire une fonction `insere(a,k,x)` qui renvoie la liste des éléments de la liste `a`, où `x` a été inséré à la position `k`.

b) Estimer la complexité de la fonction précédente.

30.9 Image miroir d'une liste

Si `a` est la liste $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$, on appelle *miroir* de `a` la liste $[a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0]$.

a) Écrire une fonction `miroir1(a)` qui renvoie la liste miroir de `a`.

b) Écrire une fonction `miroir2(a)` qui modifie la liste `a` sur place pour qu'elle devienne son miroir.

c) Écrire une fonction `est_palindrome(a)` qui teste si une liste est un palindrome, c'est-à-dire qu'elle est son propre miroir.

30.10 Recherche d'un mot dans une chaîne de caractères

a) Définir une fonction `cherche_mot(w,s)` qui teste la présence du mot `w` dans la chaîne `s`.

b) Évaluer la complexité temporelle de la fonction précédente en dénombrant les comparaisons de caractères.

30.11 Richesse lexicale d'un texte

a) Dans un texte, on appelle *mot* une suite de caractères alphabétiques d'au moins 4 lettres, en minuscules, sans ponctuation.
Écrire une fonction `chaine_en_liste(s)` qui prend en argument une chaîne de caractère et qui renvoie la liste de ses mots.

b) On appelle *richesse lexicale* d'un texte le rapport entre le nombre de mots différents et le nombre de mots du texte.
Écrire une fonction `richesse_lexicale(f)` qui prend en argument le nom d'un fichier texte stocké dans le répertoire courant de votre ordinateur, et qui calcule la richesse lexicale de ce texte.

30.12 Moyenne et variance d'une liste de nombres

a) Définir une fonction `moyenne(a)` qui calcule la moyenne des éléments de la liste `a`.

b) Utiliser la fonction précédente pour définir une fonction `variance(a)` qui calcule la variance des éléments de `a`.

30.13 Simuler un lancer de pièce

a) Écrire une fonction `lancer_pièce ()` qui simule un lancer de pièce, c'est-à-dire qui renvoie les chaînes `'Pile'` ou `'Face'` de façon équiprobable.

b) Écrire une fonction `lancer_pièce_truquée (p)` qui simule un lancer de pièce truquée, et renvoie les chaînes `'Pile'` ou `'Face'` avec des probabilités respectives de p et $1-p$.

c) Compter le nombre de `'Pile'` après 1000 lancers pour chacune des deux fonctions et vérifier la cohérence du résultat.

30.14 Simuler un lancer de dé

a) Écrire une fonction `lancer_dé ()` qui simule le lancer d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6, c'est-à-dire qui renvoie un nombre de 1 à 6 de façon équiprobable.

b) On lance plusieurs fois un dé. On obtient successivement des valeurs comprises entre 1 et 6, et on s'intéresse à la fréquence d'apparition de chacune de ces valeurs.
Écrire une fonction `simule_lancers_1_dé(n)` qui simule n lancers d'un dé, et qui renvoie la liste des fréquences de chacune des valeurs obtenues.

c) On lance plusieurs fois deux (resp. trois) dés. On obtient successivement des valeurs comprises entre 2 et 12 (resp. 3 et 18), et on s'intéresse à la fréquence d'apparition de chacune de ces valeurs.
Écrire une fonction `simule_lancers_2_dés(n)` (resp. `simule_lancers_3_dés(n)`) qui simule n lancers de deux (resp. trois) dés.

d) Représenter sur une même figure ces fréquences pour 50000 lancers, et commenter le résultat obtenu.

30.15 Somme des cubes des chiffres d'un nombre

a) Écrire une fonction `somme_cubes_chiffres(n)` qui calcule la somme des cubes des chiffres dans l'écriture en base 10 de n.

b) Écrire une fonction `somme_cubes_chiffres_base(n,b)` qui calcule la somme des cubes des chiffres dans l'écriture en base b de n.

30.16 Calcul du pgcd de deux nombres

a) Écrire une fonction `pgcd(a,b)` qui renvoie le pgcd de deux entiers a et b, en appliquant l'algorithme d'Euclide.

b) Écrire une fonction `bézout(a,b)` qui renvoie un triplet (d, u, v) tel que $au + bv = d$, où $d = a \wedge b$.

30.17 Vérifier la validité d'un numéro de carte de crédit

Les numéros des cartes de crédit ne sont pas quelconques. Le dernier chiffre est ajusté pour que le nombre de Luhn de ce numéro soit un multiple de 10, ce qui permet de repérer une erreur de saisie (échange de deux chiffres, erreur sur un chiffre).

Notant $a_{2p+1}a_{2p}\dots a_3a_2a_1a_0$ l'écriture en base 10 d'un nombre n, éventuellement commencée par un zéro, on conserve les chiffres dont l'indice est pair et on double les chiffres dont l'indice est impair. Lorsque ces doubles dépassent 10, on les remplace par la somme de leurs chiffres. La somme de tous les chiffres obtenus s'appelle le *nombre de Luhn* de n.

a) Écrire une fonction `verifie_Luhn(n)` prenant en argument un entier, et renvoyant le booléen `True` si et seulement si le nombre de Luhn de n est un multiple de 10. Vérifier que le nombre $n = 972487086$ passe le test.

b) Vérifier que les nombres obtenus en échangeant deux chiffres consécutifs de 972487086 ne passent pas le test.

30.18 Opérations sur les polynômes

a) Proposer une première structure de données, utilisant une liste, permettant de représenter informatiquement un polynôme comme $P = 1 + 3\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^5$ ou $Q = 1 + \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^5 + \mathrm{X}^7$.

b) Écrire les fonctions `addition1(p,q)` et `multiplication1(p,q)` qui prennent en argument deux listes représentant des polynômes, et qui renvoient les listes représentant respectivement la somme et le produit de P et Q.

c) Proposer une seconde structure de données, utilisant un dictionnaire, permettant de représenter informatiquement un polynôme.

d) Écrire les fonctions `addition2(p,q)` et `multiplication2(p,q)` qui prennent en argument deux dictionnaires représentant des polynômes, et qui renvoient les dictionnaires représentant respectivement la somme et le produit de P et Q.

30.19 Évaluation d'une fonction polynomiale

On représente informatiquement un polynôme par la liste de ses coefficients. Ainsi $P = 1 + 3\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^5$ est représenté par la liste `p=[1,0,3,1,0,2]`.

Pour chacune des fonctions proposées, on comparera les résultats théoriques de complexité au temps effectif d'évaluation des fonctions, en utilisant la fonction `clock()` du module `time`.

a) On définit la fonction suivante :

```
def evalue1(p,x):
    """Calcule l'image de <x> par la fonction polynomiale
       associée au polynôme représenté par la liste <p>"""

    def puiss(x,n):
        """Calcule <x> puissance <n>"""
        y = 1
        for k in range(n):
            # Invariant à préciser
            y *= x
        return y

    s = 0
    for i in range(len(p)):
        # Invariant à préciser
        s += p[i] * puiss(x,i)
    return s
```

Préciser les invariants de boucles en entrée pour les boucles `k` et `i`.
Estimer le complexité temporelle de cette fonction en dénombrant les additions et les multiplications. Pourquoi cet algorithme est-il très maladroit ?

b) Écrire une fonction `evalue2(p,x)` reprenant la fonction précédente, mais sans le défaut pointé à la question précédente.
Estimer la complexité temporelle de cette nouvelle fonction.

c) On peut remarquer qu'avec les notations usuelles, on a :

$$P(x) = a_0 + x\,(a_1 + x\,(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + x(a_n))\ldots))$$

Exploiter cette écriture, dite de Horner, pour écrire une fonction `evalue_horner(p,x)` qui évalue en x la fonction polynomiale associée à P.
Estimer la complexité temporelle de cette fonction.

d) Proposer enfin une fonction `evalue4(p,x)` qui renvoie le même résultat, en utilisant une liste en compréhension.

30.20 Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

On considère la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$.

On peut montrer que $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.

a) Écrire une fonction `suite(n)` qui renvoie u_n.

b) Représenter graphiquement la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

30.21 Pendule pesant

On considère l'équation du pendule pesant : $\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0$
avec la condition initiale : $\theta(0) = 0$ et $\theta'(0) = 0,5$.

a) Utiliser `scipy.integrate.odeint` pour obtenir une première résolution approchée de cette équation différentielle.

b) En faisant l'hypothèse que les variations sont petites, et en approximant $\sin(\theta(t))$ par $\theta(t)$, résoudre mathématiquement cette équation différentielle.

c) Représenter sur une même figure les deux résolutions.

30.22 Recherche d'une racine par la méthode de Newton

On considère l'équation $\ln x + x = 0$, d'inconnue $x > 0$.

a) Montrer que l'équation possède une unique solution α.

b) Former, par l'algorithme de Newton, une suite récurrente réelle $(x_n)_n$ qui converge vers α.

c) On admet la majoration : $|x_n - \alpha| \leqslant K^{2^n-1}|x_0 - \alpha|^{2^n}$,
où $K = \dfrac{M_2}{2m_1}$, $M_2 = \underset{t\in I}{\mathrm{Max}}\,|f''(t)|$ et $m_1 = \underset{t\in I}{\mathrm{Min}}\,|f'(t)|$, avec I un segment contenant tous les termes de la suite.
Écrire une fonction `approx(epsilon)` qui calcule une valeur approchée à ε près de α.

30.23 Recherche d'une valeur approchée par une méthode de dichotomie

a) Montrer que l'équation $\tan x - x = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

b) Vérifier numériquement : $4,4 < \alpha < 4,5$

c) Écrire une fonction `approx(epsilon)` qui calcule une valeur approchée de α à ε près par la méthode de dichotomie.

30.24 Recherche d'une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ par une méthode d'itération

a) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est l'unique solution dans $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ de : $x = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6}$.

b) On considère la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n^3 + \frac{1}{6}$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge vers $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

c) En déduire une fonction `approx(epsilon)` qui calcule une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ à ε près.

30.25 Approximer un nuage de points par la méthode des moindres carrés

On considère un fichier `temperatures.csv`, dont un extrait est proposé ci-contre [1].

Chaque ligne représente une date (en année), et une température relative à une température de référence.

```
1980,-0.204792
1980.08,-0.16875
1980.17,-0.151125
1980.25,-0.147417
1980.33,-0.114542
... [tronqué] ...
2011.75,0.141042
2011.83,0.137708
2011.92,0.12825
2012,0.108042
2012.08,0.122167
```

a) Déterminer la droite de régression linéaire de ces données, c'est-à-dire celle qui s'ajuste au mieux, au sens des moindres carrés, au nuage des points correspondants à ces données.

b) Faire de même, non plus une droite, mais avec un polynôme de degré 10

c) Représenter sur une même figure le nuage de points, la droite et le polynôme obtenus aux questions précédentes.

1. Généré à partir de données de `http://www.woodfortrees.org/data/rss-land/from:1900/offset:-0.15/mean:24`

Du mal à démarrer ?

30.1 *a)* Il s'agit d'un calcul de somme.

b) Il serait très maladroit d'utiliser la fonction précédente (estimer la complexité temporelle d'une telle utilisation). Reprendre l'algorithme de calcul de la question précédente, mais en changeant la terminaison.

30.2 Penser à charger le module `math` pour accéder à la fonction `sqrt`. Le calcul d'un produit est analogue à celui d'une somme.

30.3 *a)* Une somme double se calcule avec deux boucles imbriquées.

b) Une somme double se calcule avec deux boucles imbriquées. Porter attention aux valeurs extrêmes des indices.

c) La fonction `sum` permet d'obtenir la somme des éléments d'une liste. Pour engendrer la liste des éléments à sommer, utiliser une liste en compréhension en combinant deux `for`. On peut même ajouter une condition avec `if`.

30.4 *a)* Parcourir les éléments de la liste `a`, et les accumuler dans une liste `b` lorsqu'ils ne sont pas égaux à `x`.

b) Parcourir les éléments de la liste `a`. Pour chaque élément rencontré, l'accumuler dans une liste `b` et supprimer toutes ses occurrences dans `a`. Connaît-on *a priori* le nombre de tours de boucle ?

30.5 *a)* C'est une boucle `for` qui est attendue. Utiliser une variable booléenne traduisant la présence ou non de `x` dans le début de `a`.

b) C'est une boucle `while` qui est attendue. Pas de booléen ici, mais l'analyse de la sortie de boucle permet de déterminer la présence ou non de `x` dans `a`.

c) Utiliser le module `random`

d) On adapte l'algorithme de *b)* et on modifie la condition de sortie en exploitant le fait que les éléments de `a` sont triés.

30.6 Parcourir la liste, et utiliser une variable contenant le nombre d'apparitions de `x` dans le début de `a`.

30.7 *a)* Utiliser une variable `c` contenant une liste, augmenter cette liste par la méthode `append` lors du parcours de `a` et/ou `b`.

b) Dénombrer les utilisations de `append` à chaque tour de boucle, et sommer.

30.8 *a)* Il s'agit d'un parcours d'une partie de `a`. On peut utiliser le *tranchage* : par exemple, `a[:k]` désigne la liste $[a_0, \ldots, a_{k-1}]$.

b) Dénombrer les utilisations de `append`.

30.9 *a)* Il s'agit de parcourir dans un ordre satisfaisant les éléments de `a`, et de les placer dans une autre liste.

b) Les listes sont des objets mutables, et peuvent être modifiées par des fonctions. Échanger deux à deux les éléments de `a`.

c) Le problème est proche du précédent. On compare deux à deux les éléments de `a`. On peut utiliser une boucle `while` et s'interrompre en cas de différence.

30.10 *a)* Notant p la longueur de `w`, comparer `w` aux sous-mots de `s` de longueur p.

b) Dénombrer les comparaisons à chaque tour de boucle, et sommer.

30.11 *a)* Commencer par « nettoyer » la chaîne en transformant les caractères indésirables à l'aide de la méthode `replace`.
Utiliser la méthode `lower` pour n'avoir que des minuscules, et la méthode `split` pour transformer la chaîne en liste de ses mots.

b) Parcourir les lignes du fichier pour créer la liste des mots du fichier. On pourra utiliser l'exercice 30.4 traitant de la suppression des doublons d'une liste.

30.12 *a)* Commencer par calculer la somme des éléments, puis diviser par le nombre d'éléments.

b) Utiliser la formule :

$$V(a) = E(a^2) - (E(a))^2.$$

30.13 *a)* Charger le module `random`. La fonction `randint(0,1)` renvoie un entier aléatoire 0 ou 1. Sa comparaison à 0 permet de décider si c'est `Pile` ou `Face`.

b) La fonction `random()` renvoie un flottant aléatoire dans $[0, 1[$. Sa comparaison à p permet de décider si c'est `Pile` ou `Face`.

c) Le nombre obtenu doit être proche de 1000 fois la probabilité de tirer `Pile`.

30.14 *a)* Charger le module `random`. La fonction `randint(1,6)` renvoie un entier entre 1 et 6 de façon équiprobable.

b) Utiliser une liste de longueur 6 contenant le nombre de lancers ayant réalisé chacune des six valeurs possibles. Simuler n lancers en utilisant n fois la fonction précédente.

c) Même analyse.

d) Charger `matplotlib.pyplot` et `numpy`. Pour chaque graphique, construire la liste des abscisses et la liste des ordonnées, qui auront même longueur.

30.15 *a)* Il s'agit d'un problème de parcours des chiffres de `n`. Des divisions euclidiennes successives par 10 permettent ce parcours.

b) L'analyse est identique, avec b à la place de 10.

30.16 *a)* Si r est le reste dans la division euclidienne de a par b, alors $a \wedge b = b \wedge r$. L'algorithme d'Euclide consiste à calculer la suite $(r_k)_k$ des restes dans les divisions euclidiennes successives, jusqu'à obtenir 0. Connaît-on *a priori* le nombre de tours de boucle ?

b) Déterminer des suites $(u_k)_k$ et $(v_k)_k$ telles que, pour tout k : $r_k = au_k + bv_k$.

30.17 *a)* Ne pas chercher à déterminer le nombre de chiffres de n, mais parcourir ces chiffres par des divisions euclidiennes successives.

b) Faire quelques tests « à la main ».
Pour engendrer toutes les transpositions proposées, travailler sur la chaîne de caractères des nombres de n, ce qui permet d'accéder à un chiffre par son indice.

30.18 *a)* Un polynôme est caractérisé par son degré et ses coefficients.

b) Revenir à la définition mathématique de ces opérations :

- La somme de deux polynômes se fait coefficients à coefficients.
- Le produit des polynômes $P = a_0 + a_1\mathrm{X} + \dots$ et $Q = b_0 + b_1\mathrm{X} + \dots$ est $PQ = c_0 + c_1\mathrm{X} + \dots$ où :

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

c) Un polynôme est une somme de monômes, et chaque monôme est caractérisé par un degré et un coefficient.

d) Créer un dictionnaire pour le résultat de l'opération, et utiliser la méthode `get(k,0)` qui permet d'accéder à la valeur de clef `k` si elle existe, et de considérer la valeur `0` si elle n'existe pas.
La multiplication de deux polynômes est la somme des produits de tous les monômes deux à deux.

30.19 La fonction `clock()` du module `time` fournit une « heure » en secondes. La différence entre deux appels à la fonction `clock()` permet de chronométrer le temps d'évaluation d'une expression.

a) Deux invariants à préciser, un par boucle.

b) L'utilisation de la fonction `puiss` est-elle raisonnable ?

c) Parcourir les coefficients de P et utiliser une variable qui contient les valeurs des expressions entre parenthèses.

d) La fonction `sum` peut s'appliquer à une liste. La syntaxe ici est très proche de la syntaxe mathématique.

30.20 *a)* C'est un simple calcul de suite récurrente.

b) Il s'agit de représenter la ligne brisée dont les sommets ont pour coordonnées respectives :

$$(u_0, u_1)\,;\,(u_1, u_1)\,;\,(u_1, u_2)\,;\,(u_2, u_2)\,;\,(u_2, u_3)\dots$$

Construire la listes des abscisses et celle des ordonnées de ces points :

`U` $= [u_0, u_1, u_1, u_2, u_2, \dots]$
et `V` $= [u_1, u_1, u_2, u_2, u_3, \dots]$

30.21 *a)* Écrire l'équation différentielle comme une équation vectorielle d'ordre 1 pour pouvoir utiliser `odeint`.

b) Il s'agit dans ce cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

c) Utiliser le module `matplotlib.pyplot`.

30.22 *a)* Appliquer le théorème de la bijection monotone.

b) À partir d'un point $(x_n, f(x_n))$ de la courbe $\mathcal{C}$ de f, on note x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe (Ox). Cela permet de former une relation de récurrence liant x_{n+1} à x_n.

c) La relation proposée permet de donner une condition *suffisante* pour garantir l'inégalité $|x_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$. On applique l'algorithme du calcul des suites récurrentes, en utilisant ce test d'arrêt.

30.23 *a)* Appliquer le théorème de la bijection monotone.

b) Évaluer $\tan x - x$ en $4,4$ et en $4,5$.

c) Lorsque f admet un zéro entre a et b, on note c le milieu de $[a;b]$, et on peut localiser ce zéro entre a et c ou entre c et b en comparant les signes de $f(a)$ et $f(c)$.

30.24 *a)* Linéariser $\sin^3 u$ pour montrer que $\sin\dfrac{\pi}{18}$ est une solution de l'équation. Utiliser la monotonie d'une fonction auxiliaire pour montrer que c'est la seule.

b) Il s'agit d'une suite récurrente, que l'on peut étudier en appliquant l'inégalité des accroissements finis. Cette méthode a l'avantage de fournir une majoration de l'erreur commise lorsque l'on confond un terme de la suite et la limite.

c) Par la question précédente, on peut donner une condition *suffisante* pour garantir l'inégalité $\left|u_n - \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| \leqslant \varepsilon$. On applique l'algorithme du calcul des suites récurrentes, en utilisant ce test d'arrêt.

30.25 Il s'agit dans un premier temps de lire les données qui sont dans le fichier. Pour chaque ligne du fichier, on pourra utiliser la méthode `rstrip()` pour supprimer les caractères de fin de ligne, et la méthode `split(',')` pour couper les lignes aux caractères `','` et obtenir la liste des champs.

a) Utiliser la classe `Polynomial` du module `numpy.polynomial`, et sa méthode `fit` rencontrée à l'exericice 30.18.

b) Même analyse qu'à la question précédente, en changeant simplement le degré.

c) Utiliser le module `matplotlib.pyplot`.

Corrigés des exercices

30.1

a) On parcourt l'intervalle $\{1, \dots, n\}$ et on effectue un simple calcul de somme.

```
def f(n,x):
    """Calcule la somme partielle d'ordre <n>
       du développement en série entière
       de ln(1-<x>)"""
    s, p = 0, 1
    for k in range(1,n+1):
        # p est $x^{k-1}$, s est $-\sum_{i=1}^{k-1} \frac{x^i}{i}$
        p *= x
        s -= p / k
    return s

print (f(10,.5))
↪ -0.6930648561507935
```

Remarque : On a évité de calculer à chaque tour de boucle la puissance de `x`. L'exercice 30.19 étudie les raisons de ce choix.

Remarque : On aurait pu proposer une autre solution, proche de la syntaxe mathématique, en utilisant les listes en compréhension :

```
def f(n,x):
    return sum([- x**k / k
                for k in range(1,n+1)])
```

b) Dans cette question, on effectue le même calcul, mais au lieu d'avoir n tours de boucle, on s'arrête lorsque la distance entre la somme partielle et $\ln(1-x)$ est inférieure à ε. Il s'agit donc d'une boucle `while`.
La fonction `log`, qui désigne le logarithme népérien (ln), peut se trouver dans le module `math`.

```
from math import log

def approx(x,eps):
    """Détermine l'ordre de la somme partielle
       qui approxime ln(1-<x>) à <eps> près"""
    y = (log(1-x))
    s, p, k = 0, 1, 1
    while abs(s-y) > eps:
        # p est $x^{k-1}$, s est $-\sum_{i=1}^{k-1} \frac{x^i}{i}$
        # et $|s - \ln(1-x)| > \varepsilon$
        p *= x
        s -= p / k
        k += 1
    return k-1

print(approx(.5,1e-8))
↪ 22
print(f(22,.5)-log(.5))
↪ 9.965177016901805e-09
```

Par définition de la convergence de la suite des sommes partielles, on sait que la boucle va se terminer. Lors de la sortie de boucle, `s` est $-\sum_{i=1}^{k-1} \frac{x^i}{i}$ et on a $|\mathtt{s} - \ln(1-x)| \leqslant \varepsilon$, tandis que, puisque la sortie de boucle ne s'est pas fait plus tôt, pour toutes les sommes précédentes, cette différence est supérieure à ε. Cela justifie la valeur renvoyée par la fonction.

30.2

Il s'agit simplement de parcourir les éléments `e` de `a` et de les multiplier au produit partiel stocké dans une variable `p`.

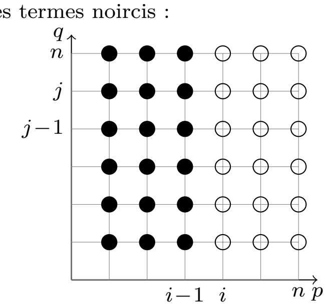
```
from math import sqrt

def produit(n):
    """Renvoie le produit
       des 1+sqrt(k), k de 1 à <n>"""
    p = 1
    for i in range(1, n+1):
        # $p$ est $(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{i-1})$
        p *= (1 + sqrt(i))
    return p

print (produit(15))
↪ 210509527.98501894
```

Remarque :
On peut aussi proposer une solution utilisant les listes en compréhension :

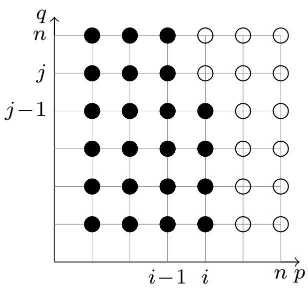
```
def produit(n):
    return prod([1+sqrt(k)
                 for k in range(1,n+1)])
```

30.3

a) On somme sur `j` à `i` fixé. On imbrique donc deux boucles `for`. Exhiber clairement les invariants de boucle nécessite un peu de précision. On parcourt les valeurs de i. On utilise une variable `s` qui contient, en entrée de la boucle i, la somme des termes noircis :

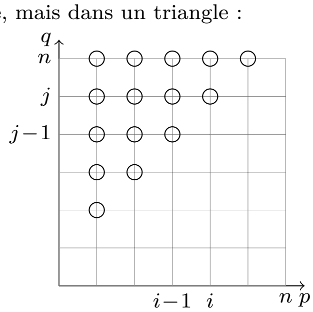


Pour que ce soit un invariant de boucle, il faut, pendant le tour de boucle i, ajouter tous les termes de la colonne i. Pour cela, on va utiliser une boucle j, et on va maintenir en entrée du tour de boucle j : « `s` est la somme des termes noircis » :




```
def somme1(n):
    """Renvoie la somme des 1/(i+j)
       pour 1<=i,j<=<n>"""
    s = 0
    for i in range(1,n+1):
        # s est $\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{n} \frac{1}{p+q}$
        for j in range(1,n+1):
            # s est $\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{n} \frac{1}{p+q} + \sum_{q=1}^{j-1} \frac{1}{i+q}$
            s += 1/(i+j)
    return s

print(somme1(5))
↪ 4.818650793650793
```

b) Les termes que l'on doit sommer ne sont cette fois-ci pas dans un carré, mais dans un triangle :



Seul l'indice de début de la boucle j est modifié.

```
def somme2(n):
    """Renvoie la somme des 1/(i+j)
       pour 1<=i<j<=<n>"""
    s = 0
    for i in range(1,n+1):
        # s est $\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=p+1}^{n} \frac{1}{p+q}$
        for j in range(i+1,n+1):
            # s est $\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=p+1}^{n} \frac{1}{p+q} + \sum_{q=i+1}^{j-1} \frac{1}{i+q}$
            s += 1/(i+j)
    return s

print(somme2(5))
↪ 1.8384920634920634
```

c) En utilisant les listes en compréhension, on obtient :

```
def somme1(n):
    return sum([1/(i+j) for i in range(1,n+1)
                for j in range(1,n+1)])

def somme2(n):
    return sum([1/(i+j) for i in range(1,n+1)
                for j in range(1,n+1) if i<j])
```

30.4

a) On parcourt les éléments de `a`. Chaque élément rencontré qui n'est pas égal à `x` est ajouté à la liste `b` par la méthode `append`.

```
def supprime_un_element (x,a):
    """Renvoie la liste des éléments de <a>
       sans les apparitions de <x>"""
    b = []
    for e in a:
        # e est $a_i$
        # b est $[a_0,\ldots,a_{i-1}]$ privé
        # des éléments égaux à $x$
        if e != x:
            b.append (e)
    return b

print(supprime_un_element (3,[1,3,2,4,3,5]))
↪ [1, 2, 4, 5]
```

b) La démarche est analogue à la précédente, sauf qu'à chaque fois que l'on ajoute un élément `e` de `a` dans `b`, on purge ensuite `a` de tous ses éléments égaux à `e`.

```
def supprime_doublons (a):
    """Renvoie la liste constituée des
       éléments de <a> sans doublon"""
    b = []
    while a != []:
        # a n'est pas vide
        # b est $[a_0,a_1,\ldots,a_{i-1}]$ sans doublon et
        # a est $[a_i,\ldots,a_{n-1}]$ privé de $a_0,\ldots,a_{i-1}$
        b.append (a[0])
        a = supprime_un_element (a[0],a)
    return b

liste = list('classepreparatoire')
print(supprime_doublons (liste))
↪ ['c','l','a','s','e','p','r','t','o','i']
```

À chaque tour de boucle, la liste `a` est diminuée d'au moins un élément (a_0), donc la boucle se termine. À la sortie de boucle, `a` est vide, et `b` contient les éléments de a sans doublon.

Remarque : On peut proposer une fonction plus simple, utilisant le fait qu'un *ensemble* n'a pas de répétition :

```
def supprime_doublons (a):
    return (list (set (a)))
```

Cette fonction n'illustre cependant pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

30.5

a) On parcourt la liste `a` en entier. Chaque élément `e` est comparé à `x`. On utilise un booléen `b` qui permet de savoir si `x` a été rencontré aux tours de boucle précédents, c'est-à-dire un booléen qui traduit la présence de `x` dans la partie parcourue du tableau.

```
def recherche1 (x,a):
    """Teste la présence de <x>
       dans la liste <a>."""
    b = False
    for e in a:
        # b vaut True ssi $x \in \{a_0,\dots,a_{i-1}\}$
        # e désigne $a_i$
        if x == e:
            b = True
    return b
```

En sortie de boucle, `b` vaut donc `True` si et seulement si $x \in \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$, ce qui justifie le résultat renvoyé par la fonction.

b) Le principe est analogue ici, mais la sortie de boucle se fait comme dans la question précédente après un parcours complet de la liste si `x` n'est pas trouvé, ou alors plus tôt si `x` est trouvé. On ne peut dans ce cas pas savoir *a priori* le nombre de tours de boucle : on utilise une boucle `while`.

```
def recherche2 (x,a):
    """Teste la présence de <x>
       dans la liste <a>."""
    i = 0
    while i < len(a) and x != a[i]:
        # On a $i \leqslant n-1$ et $x \notin \{a_0,\dots,a_i\}$
        i += 1
    return i<len(a)
```

Si `x` n'est pas trouvé, `i` est incrémenté à chaque tour de boucle, donc dépasse n, et la sortie de boucle a bien lieu. En sortie de boucle :

- soit $i = n$ et $x \notin \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ c'est-à-dire $x \notin$ `a` ;
- soit $i < n$ et $\begin{cases} x \notin \{a_0, \dots, a_{i-1}\} \\ x = a_i \end{cases}$ c'est-à-dire $x \in$ `a`.

Le booléen $i \leqslant n-1$ traduit donc la présence de x dans `a`.

c) Pas de difficulté ici : on ajoute, par la méthode `append`, un entier aléatoire à la fin d'une liste.

```
# On construit une liste d'entiers aléatoires
from random import randint
a = []
for i in range(20):
    # a est une liste de $i-1$ entiers
    # aléatoires entre 1 et 100
    a.append(randint(1,100))
print(a)
↪ [37, 84, 57, 69, 58, 88, 23, 49, 59, 46...
print (recherche1 (24,a))
↪ True
print (recherche2 (24,a))
↪ True
```

d) Si on sait que la liste est triée, on peut reprendre la fonction de *b)* et sortir de la boucle si a_i dépasse `x`, car il n'y a plus d'espoir de trouver `x` dans la suite de la liste.

```
def recherche3 (x,a):
    """Teste la présence de <x> dans la
       liste <a> triée par ordre croissant."""
    i = 0
    while i < len(a) and a[i] < x:
        # On a $i \leqslant n-1$ et $a_0 < x, \dots, a_i < x$
        i += 1
    return i<len(a) and x==a[i]

a = [1,2,3,5,6,7,8,9]
print (recherche3 (5,a) )
↪ True
print (recherche3 (4,a) )
# ↪ False
```

Pour la même raison que précédemment, la boucle se termine bien. Cette fois-ci, en sortie de boucle :

- soit $i = n$ et $a_0 < x, \dots, a_{n-1} < x$, c'est-à-dire $x \notin$ `a` ;
- soit $i < n$ et $a_0 < x, \dots, a_{i-1} < x$ et $x \leqslant a_i$.

Dans ce dernier cas, $x \in$ `a` lorsque $x = a_i$, ce qui justifie la valeur renvoyée par la fonction.

Remarque :
On peut directement rechercher un élément en utilisant `in` :

```
def recherche (x,a):
    return x in a
```

mais cette fonction n'illustre pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

Remarque :
Lorsque la liste est triée, la recherche dichotomique se justifie aussi. Voir à ce sujet l'exercice 30.23.

30.6

On parcourt tous les éléments `e` de `a`, et on tient le compte des éléments rencontrés égaux à `x` dans une variable `nb`.

```
def compte (x,a):
    """Renvoie le nombre d'apparitions de <x>
    dans la liste <a>"""
    nb = 0
    for e in a:
        # nb est le nombre d'apparitions de $x$
        # dans $[a_0, a_1, \dots, a_{i-1}]$ et e est $a_i$.
        if x == e:
            nb += 1
    return nb

print(compte (3,[1,3,3,4,2,3,4,5,3,4]))
↪ 4
```

Remarque :
On peut directement dénombrer les apparitions d'un élément en utilisant la méthode `count` :

```
def compte (x,a):
    return a.count (x)
```

mais cette fonction n'illustre pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

30.7

a) On utilise une variable `c` contenant la liste des éléments de `a`. On parcourt alors tous les éléments de `b` qui sont ajoutés à la fin de `c` par la méthode `append`.

```
def concat1 (a,b):
    """Renvoie la concaténation
       de <a> et <b>"""
    c = a[:]
    for e in b:
        # c est [a_0,...,a_{n-1},b_0,b_1,...,b_{i-1}]
        # e est b_i
        c.append (e)
    return c

print (concat1 ([1,2,3],[4,5,6]))
↪ [1,2,3,4,5,6]
```

b) On évalue le nombre d'utilisations de `append`. Cette méthode est utilisée une fois par tour de boucle. En notant n la longueur de a et p celle de b, le nombre d'utilisations de append est $\sum_{i=0}^{p-1} 1 = p$.

Remarque : On peut concaténer deux listes en utilisant `+` :

```
def concat (a,b):
    return a + b
```

mais cette fonction n'illustre pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

30.8

a) Il s'agit de concaténer deux parties de la liste `a`, en ajoutant `x` entre ces deux parties. Obtenir ces deux parties se fait facilement par *tranchage*. La concaténation se fait en utilisant `+`, ou se redéfinit rapidement :

```
def insere (a,k,x):
    """Renvoie la liste des éléments de <a>
       où <x> est inséré à la position <k>"""
    b = a[:k]
    b.append (x)
    for e in a[k:]:
        # b est [a_0,a_1,...,a_{k-1},x,a_k,...,a_{i-1}]
        # e est a_i
        b.append(e)
    return b

a = [3,1,4,1,5,9]
print(insere (a,2,18))
↪ [3, 1, 18, 4, 1, 5, 9]
```

b) On néglige les deux opérations de *tranchage* et on note $T(n,k)$ le nombre d'utilisations de `append` lors de l'évaluation de `insere(a,k,x)`, où n est la longueur de a. Il y a une utilisation pour ajouter `x`, et une par tour de boucle avec $n-k$ tours de boucle, donc $T(n,k) = n-k+1$.

Remarque : On peut insérer un élément en position `k` en utilisant la méthode `insert` :

```
def insere (a,k,x):
    a.insert(k,x)
```

mais cette méthode n'illustre pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

Attention : Cette méthode modifie par effet de bord la liste `a`.

30.9

a) On parcourt les éléments de la liste « à l'envers », c'est-à-dire de a_{n-1} à a_0. On évite dans cet exercice d'utiliser la méthode `reverse` ou la fonction `reversed`, puisqu'il s'agit de comprendre l'algorithme de l'image miroir. On fait donc varier un indice `i` de 0 à $n-1$ et on utilise `n-1-i` (en fait `-i` en exploitant les indices négatifs).

```
def miroir1 (a):
    """Renvoie le miroir de la liste <a>"""
    b = []
    for i in range (len(a)):
        # b est [a_{n-1},a_{n-2},...,a_{n-1-(i-1)}]
        b.append (a[-i-1])
    return b

print (miroir1 ([3, 1, 4, 1, 5, 9]))
↪ [9, 5, 1, 4, 1, 3]
```

Remarque :
On peut directement obtenir le miroir d'une liste en utilisant la fonction `reversed` :

```
def miroir1 (a):
    return list(reversed(a))
```

mais cette fonction n'illustre pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

b) Il faut bien comprendre que dans cette question, la fonction ne renvoie aucune valeur mais agit *sur place* pour modifier la liste `a` et la transformer en son miroir. On exploite l'affectation multiple pour l'échange de deux valeurs.

```
def miroir2 (a):
    """Remplace la liste <a> par son miroir"""
    for i in range (len(a) // 2):
        # a est [a_{n-1},a_{n-2},...,a_{n-1-(i-1)},a_i,...
        #               ...,a_{n-1-i},a_{i-1},...,a_1,a_0]
        a[i],a[-1-i] = a[-1-i],a[i] # échange

a = [3, 1, 4, 1, 5, 9]
print(miroir2 (a))
↪ None
print (a)
↪ [9, 5, 1, 4, 1, 3]
```

L'évaluation de la fonction n'a renvoyé aucune valeur (en fait, la valeur `None`), mais a agi par *effet de bord* : après l'évaluation de la fonction, la liste `a` n'est plus la même.

Remarque :
On peut directement remplacer une liste par son miroir en utilisant la méthode `reverse` :

```
def miroir2 (a):
    a.reverse()
```

mais cette fonction n'illustre pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

c)
```
def estPalindrome (a):
    """Teste si <a> est un palindrome"""
    i = 0
    while i < (len(a)//2) and a[i] == a[-1-i]:
        # a_0 = a_{n-1}, a_1 = a_{n-2}, ..., a_i = a_{n-1-i}
        # et i < ⌊n/2⌋
        i += 1
    return i == len(a) // 2
```
À chaque tour de boucle, `i` est incrémenté donc dépassera la valeur $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$: la boucle se termine.

Lors de la sortie de boucle :

soit $\begin{cases} i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ a_0 = a_{n-1}, a_1 = a_{n-2}, \dots, a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} = a_{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}, \end{cases}$

soit $\begin{cases} i < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ a_0 = a_{n-1}, a_1 = a_{n-2}, \dots, a_{i-1} = a_{n-1-(i-1)} \\ \text{mais } a_i \neq a_{n-1-i}. \end{cases}$

Dans le premier cas, `a` est un palindrome, et dans le second cas, ce n'est pas un palindrome. Cela justifie le booléen renvoyé par la fonction.

```
print(estPalindrome([1,2,3,4,3,2,1]))
↪ True
print(estPalindrome([1,2,3,4,4,3,2,1]))
↪ True
print(estPalindrome([1,2,3,4,4,2,1]))
↪ False
```

30.10

a) Méthode 1.

Notons "$w_0 w_1 \dots w_{p-1}$" le mot `w`, et "$s_0 s_1 \dots s_{n-1}$" la chaîne `s`. On parcourt tous les sous-mots de `s` de longueur p, et on les compare à `w`.
```
def cherche_mot (w,s):
    """Teste la présence de <w> dans <s>"""
    b = False
    for i in range (len(s)-len(w)):
        # b vaut True ssi w est parmi les
        # sous-chaînes de s commençant par
        # s_0, ..., s_{i-1}
        b2 = True
        for j in range (len(w)):
            # b2 vaut True ssi
            # w_0 = s_i, w_1 = s_{i+1}, ..., w_{j-1} = s_{i+j-1}
            b2 &= w[j] == s[i+j]
        b |= b2
    return b

print (cherche_mot ("Il fait","Il fait beau"))
↪ True
print (cherche_mot ("fait","Il fait beau"))
↪ True
print (cherche_mot ("Il faut","Il fait beau"))
↪ False
```
Remarque. On a utilisé ici les *affectations augmentées* de booléens `&=` et `|=` associées à la conjonction et la disjonction. On aurait aussi pu écrire :
`b2 = b2 and (w[j] == s[i+j])` et `b = b or b2`.

Méthode 2.

On améliore l'algorithme précédent en utilisant des boucles conditionnelles (`while`). En effet, lorsque le mot est découvert, il n'est pas utile de poursuivre. Et lorsque l'on compare le mot `w` à un sous-mot de `s`, la première différence entre deux caractères suffit.

```
def cherche_mot (w,s):
    """Teste la présence de <w> dans <s>"""
    def aux (i):
        # Teste si w est le mot s_i s_{i+1} ... s_{i+p-1}
        j = 0
        while j < len(w) and w[j] == s[i+j]:
            # On a j < p
            # et m_0 = s_i, m_1 = s_{i+1}, ..., m_j = s_{i+j}
            j += 1
        return j == len(w)
    i = 0
    while i < len(s)-len(w) and not aux(i):
        # On a i < n - p et
        # m ≠ s_0 ... s_{p-1} ,
        # m ≠ s_1 ... s_{1+p-1} ,
        # ...
        # m ≠ s_i ... s_{i+p-1}
        i += 1
    return i < len(s)-len(w)
```
Les deux boucles `while` se terminent car l'indice est incrémenté, et dépassera inévitablement la valeur p (resp $n - p$).

En sortie de la boucle d'indice `j` (fonction `aux(i)`),

soit $\begin{cases} j = p \\ m_0 = s_i, \dots, m_{p-1} = s_{i+p-1}, \end{cases}$

soit $\begin{cases} j < p \\ m_0 = s_i, m_1 = s_{i+1}, \dots, m_{j-1} = s_{i+j-1} \\ m_j \neq s_{i+j}. \end{cases}$

Dans le premier cas, m est $s_i s_{i+1} \dots s_{i+p-1}$.
Dans le second cas, m n'est pas $s_i s_{i+1} \dots s_{i+p-1}$, ce qui justifie le booléen renvoyé par la fonction `aux`.

En sortie de la boucle d'indice `i`,
soit $i = n - p$ et m n'est aucun des sous-mots de longueur p de s,
soit $i < n - p$ et $m \neq s_0 \dots s_{p-1}, \dots, m \neq s_{i-1} \dots s_{i-1+p-1}$ mais $m = s_i \dots s_{i+p-1}$, et m est dans s.

Remarque : On peut remplacer dans cette dernière fonction l'utilisation de `aux(i)` par `m == s[i:i+len(m)]`, mais on n'explicite alors pas l'algorithme utilisé.

b) La complexité pour la seconde méthode est inférieure à celle de le première méthode. On dénombre les comparaisons de caractères pour la première méthode. On note toujours n la longueur de s et p la longueur de w. Il y a une comparaison par tour de boucle j. Le nombre de comparaisons est donc :
$$\sum_{i=0}^{n-p-1} \sum_{j=0}^{p-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-p-1} p = (n-p)p.$$
Remarque :
On peut directement tester la présence d'un mot dans une chaîne en utilisant `in` :
```
def cherche_mot (w,s):
    return w in s
```
mais cette fonction n'illustre pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

30.11

a) Les chaînes possèdent beaucoup de méthodes efficaces de traitement. On regroupe tous les caractères indésirables dans une chaîne auxiliaire que l'on parcourt. Pour chaque caractère indésirable `c`, on utilise la méthode `replace` pour le remplacer par un espace.
La méthode `lower` et la méthode `split` permettent ensuite de de supprimer les majuscules, et de créer la liste des groupes de caractères séparés par des espaces (les *mots* au sens usuel). On sélectionne alors parmi ces groupes de caractères ceux de longueur supérieure ou égale à 4 pour ne garder que les *mots* (au sens de l'énoncé). On utilise pour cela une liste en compréhension, mais on aurait pu parcourir la liste `a` à l'aide d'une boucle `for`.

```
def chaine_en_liste (s):
    """Convertit la chaîne <s> en
       la liste de ses mots en minuscule,
       sans les mots de moins de 4 lettres"""
    for c in '!\"\'%&\()*+,-./;:<=>?@
                                []^_{}|~1234567890':
        s = s.replace(c,' ')
    s = s.lower()
    a = s.split()
    return [w for w in a if len(w)>3]

print (chaine_en_liste(
    "C'est un exemple de petite chaîne !"))
↪ ['exemple', 'petite', 'chaîne']
```

b) On ouvre le fichier en lecture, on parcourt les lignes et on accumule la liste des mots de chaque ligne dans une liste `a`. On dénombre les mots différents en créant la liste des éléments de `a` sans répétition, comme dans l'exercice 30.4.

```
def richesse_lexicale (fichier):
    """Renvoie la richesse lexicale d'un texte
       contenu dans le fichier <fichier>"""
    def supprime_doublons (c):
        return (list (set (c) ))
    with open(fichier,mode='r') as f:
        a = []
        for ligne in f:
            # a est la liste des mots des pre-
            # mières lignes du fichier
            a = a + chaine_en_liste(ligne)
        b = supprime_doublons (a)
    return len(b)/len(a)

print(richesse_lexicale('droitsdelhomme.txt'))
↪ 0.6491228070175439
```

Art. 1er. -
Les hommes naissent et demeurent libres et égaux en droits. Les distinctions sociales ne peuvent être fondées que sur l'utilité commune.
...
Art. 17. -
La propriété étant un droit inviolable et sacré, nul ne peut en être privé, si ce n'est lorsque la nécessité publique, légalement constatée, l'exige évidemment, et sous la condition d'une juste et préalable indemnité.

30.12

a) Calculer la somme des éléments de `a` se fait par un parcours des éléments `e` de `a` que l'on ajoute à une variable `s`. La moyenne en découle en divisant par le nombre d'éléments.

```
def moyenne (a):
    """Renvoie la moyenne des éléments
       de la liste <a> supposée non vide"""
    s = 0
    for e in a:
        # s est a0 + a1 + ... + a(i-1) et e est ai
        s += e
    return s / len (a)

print(moyenne ([3,1,4,1,5,9]))
↪ 3.8333333333333335
```

Remarque :
On peut calculer simplement la somme et la moyenne, en utilisant `sum` :

```
def moyenne (a):
    return sum(a) / len (a)
```

mais cette fonction n'illustre pas l'algorithme utilisé et ne permet pas d'estimer sa complexité.

b) Pour appliquer la formule $V(a) = E(a^2) - (E(a))^2$, on a besoin de construire la liste des carrés des éléments de `a`. Les listes en compréhension permettent de le faire de façon efficace. Il ne reste plus qu'à utiliser la fonction précédente pour obtenir la variance.

```
def variance (a):
    """Renvoie la variance des éléments
       de la liste <a> supposée non vide"""
    b = [x**2 for x in a]
    return moyenne (b) - (moyenne (a)) ** 2

print(variance ([3,1,4,1,5,9]))
↪ 7.472222222222221
```

30.13

a) L'utilisation de `randint` du module `random` est immédiate.

```
import random

def lancer_pièce ():
    """Renvoie 'Pile' ou 'Face'
       de façon équiprobable"""
    a = random.randint(0,1)
    if a == 0:
        return 'Pile'
    else:
        return 'Face'

print(lancer_pièce ())
↪ Face (ou Pile !)
```

b) La fonction `random()` du module `random` fournit un réel aléatoire dans $[0;1[$. On peut donc écrire :

```
def lancer_pièce_truquée (p):
    """Renvoie 'Pile' ou 'Face' avec des
       probabilités respectives
       de <p> et 1-<p>"""
    a = random.random()
    if a < p:
        return 'Pile'
    else:
        return 'Face'

print(lancer_pièce_truquée (0.8))
```
```
↪ Pile (ou Face !)
```

c) On utilise les *listes en compréhension* pour engendrer les listes de tirages, puis pour compter dans ces listes le nombre de 'Pile''.

```
test = [lancer_pièce () for i in range(1000)]
print(sum([e == 'Pile' for e in test]))
```
```
↪ 487
```
```
test_truqué = [lancer_pièce_truquée (.8)
               for i in range(1000)]
print(sum([e == 'Pile' for e in test_truqué]))
```
```
↪ 793
```

Les valeurs obtenues sont proches des 50% (resp. 80%) attendus.

30.14

a) On utilise directement `randint`.

```
import random

def lancer_dé ():
    """Renvoie un nombre entre 1 et 6,
       de façon équiprobable"""
    return random.randint(1,6)
```

b) Les valeurs obtenues à chaque lancer sont entre 1 et 6. On retranche 1 pour obtenir un indice de la liste `a` initialisée à $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

```
def simule_lancers_1_dé (n):
    """Simule <n> lancers d'un dé,
       renvoie la liste des nombres de tirages
       obtenus pour chaque face"""
    a = [0]*6
    for i in range(n):
        a[lancer_dé ()-1] += 1
    return [x/n for x in a]

liste1 = simule_lancers_1_dé (50000)
print (liste1)
```
```
↪ [0.16678, 0.1659, 0.16596, 0.1685, 0.16784,
   0.16502]
```

c) Même analyse pour les deux fonctions suivantes.

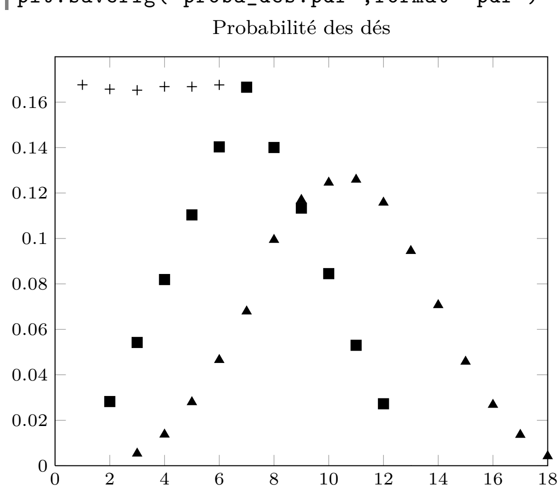
```
def simule_lancers_2_dés (n):
    """Simule <n> lancers de deux dés,
       renvoie la liste des nombres
       de totaux obtenus"""
    a = [0]*11
    for i in range(n):
        a[lancer_dé()+lancer_dé()-2] += 1
    return [x/n for x in a]
```

```
liste2 = simule_lancers_2_dés (50000)
print (liste2)
```
```
↪ [0.02706, 0.05414, 0.08192, 0.11138,
   0.14094, 0.16732, 0.14044, 0.10952,
   0.08442, 0.05628, 0.02658]
```

```
def simule_lancers_3_dés (n):
    """Simule <n> lancers de trois dés,
       renvoie la liste des nombres
       de totaux obtenus"""
    a = [0]*16
    for i in range(n):
        a[lancer_dé()+lancer_dé()
                  +lancer_dé()-3] += 1
    return [x/n for x in a]

liste3 = simule_lancers_3_dés (50000)
print (liste3)
```
```
↪ [0.0046, 0.0145, 0.02848, 0.0466, 0.06754,
   0.0987, 0.11726, 0.12508, 0.12496, 0.113,
   0.0979, 0.0686, 0.04642, 0.02822, 0.0136,
   0.00454 ]
```

d) Les listes construites sont les ordonnées des points que l'on veut représenter. Comme les trois listes ne sont pas de la même longueur, on construit les trois listes d'abscisses correspondantes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x1 = np.arange(1,7)
p1 = plt.plot(x1,liste1,'+')
x2 = np.arange(2,13)
p2 = plt.plot(x2,liste2,'s')
x3 = np.arange(3,19)
p3 = plt.plot(x3,liste3,'^')
plt.title("Probabilité des dés")
# plt.show ()
plt.savefig('proba_dés.pdf',format='pdf')
```



- + Avec 1 dé, on retrouve une distribution uniforme.
- ■ Avec 2 dés, la distribution est triangulaire.
- ▲ Avec 3 dés, la distribution se rapproche de la distribution normale.

30.15

a) On note $a_pa_{p-1}\dots a_1a_0$ l'écriture en base 10 de `n`. On parcourt les chiffres a_0, a_1, …, a_p qui sont les restes dans les divisions euclidiennes successives de `n` par 10.

```
def somme_cubes_chiffres(n):
    """Renvoie la somme des cubes des chiffres
       dans l'écriture en base 10 de <n>"""
    s = 0
    while n != 0:
        # n est a_p a_{p-1}...a_{i+1} a_i
        # s est a_{i-1}^3 + ... + a_1^3 + a_0^3
        s += (n % 10)**3
        n //= 10
    return s

print(somme_cubes_chiffres (157))
↪ 469
```

À chaque tour de boucle, le nombre `n` est divisé par 10 (en fait, remplacé par son quotient dans la division euclidienne par 10) donc atteindra la valeur 0 : la boucle se termine. En sortie de boucle, `n` est 0, et `s` est $a_p^3+\cdots+a_0^3$, ce qui justifie la valeur renvoyée par la fonction.

Remarque : On peut proposer une solution moins algorithmique, utilisant les listes en compréhension, en récupérant la liste des chiffres *via* l'écriture du nombre sous forme d'une chaîne :

```
def somme_cubes_chiffres(n):
    a = str(n)
    return sum([int(c)**3 for c in a])
```

b) L'algorithme est ici strictement identique, avec les chiffres de `n` en base b. On note $a_pa_{p-1}\dots a_1a_0$ l'écriture en base b de `n`.

```
def somme_cubes_chiffres_base(n,b):
    """Renvoie la somme des cubes des chiffres
       dans l'écriture en base <b> de <n>"""
    s = 0
    while n != 0:
        # n est a_p a_{p-1}...a_{i+1} a_i et
        # s est a_{i-1}^3 + ... + a_1^3 + a_0^3
        s += (n % b)**3
        n //= b
    return s

print(somme_cubes_chiffres_base (157,8))
↪ 160
```

La boucle se termine pour la même raison que précédemment, et en sortie de boucle, `n` est 0 et `s` est $a_p^3+\cdots+a_0^3$, ce qui justifie la valeur renvoyée.

Remarque : La fonction `oct` permet une conversion en base 8 :

```
print(oct(157))
↪ 0o235
```

On vérifie ainsi le résultat de la question précédente : le nombre 157 est 235 en base 8, c'est-à-dire que ses chiffres sont 2, 3 et 5. La somme des cubes de ses chiffres est alors : $2^3+3^3+5^3=160$.

Comme `oct`, la fonction `bin` permet de convertir en binaire (base 2) et la fonction `hex` permet de convertir en hexadécimal (base 16).

```
print (bin(157))
↪ 0b10011101
print (hex(157))
↪ 0x9d
```

30.16

a) On suppose $a>b>0$. Sinon, les premiers tours de boucles permettent de s'y ramener.
Notons $r_0=a$, $r_1=b$, $r_2=a \mod b$ et :

$$r_{k+2}=r_k \mod r_{k+1} \text{ pour tout } k.$$

On construit ainsi une séquence strictement décroissante, et positive, d'entiers. Elle atteind donc à la valeur 0 pour un rang noté $n+1$. On a :

$$a\wedge b=\cdots=r_k\wedge r_{k+1}=\cdots=r_n\wedge r_{n+1}=r_n$$

On calcule donc les termes de la séquence $(r_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ par divisions euclidiennes successives. Comme on ne connaît pas *a priori* le nombre de tours de boucle, on utilise une boucle `while`.
On utilise la syntaxe d'*affectations multiples* pour limiter le nombre de variables et d'échanges de valeurs.

```
def pgcd (a,b):
    """Renvoie le pcgd de <a> et <b>"""
    r, s = a, b
    while s != 0:
        # r est r_k , s est r_{k+1} et r_{k+1} ≠ 0
        r, s = s, r % s
    return r

print (pgcd (45,35))
↪ 5
```

L'analyse précédente justifie la terminaison de la boucle. En sortie de la boucle, `r` est r_n, `s` est r_{n+1} et $r_{n+1}=0$. La valeur du pgcd cherché est donc dans la variable `r`, ce qui justifie la valeur renvoyée par la fonction.

b) On garde les notations précédentes, et on note q_{k+2} le quotient dans la division euclidienne de r_k par r_{k+1}, c'est-à-dire :

$$r_k=r_{k+1}q_{k+2}+r_{k+2}.$$

On définit les suites $(u_k)_k$ et $(v_k)_k$ telles que, pour tout k, $r_k=au_k+bv_k$.
Ces suites satisfont : $u_0=1$, $v_0=0$ et $u_1=0$, $v_1=1$ et les relations de récurrence obtenues à partir de l'égalité $r_{k+2}=r_k-r_{k+1}q_{k+2}$:

$$u_{k+2}=u_k-u_{k+1}q_{k+2}$$
$$v_{k+2}=v_k-v_{k+1}q_{k+2}$$

On va calculer les termes successifs de ces deux suites, pour déterminer u_n et v_n qui sont les deux valeurs cherchées.
Ici encore, on utilise les *affectations multiples* pour ne pas alourdir le code.

```
def bézout (a,b):
    """Renvoie le pcgd d de <a> et <b>,
       ainsi que deux entiers u,v tels que
       d = au + bv"""
    r, s = a, b
    u0, u1, v0, v1 = 1, 0, 0, 1
    while s != 0:
        # r est r_k , s est r_{k+1} et r_{k+1} ≠ 0
        # u0 est u_k , u1 est u_{k+1} ,
        # v0 est v_k , v1 est v_{k+1}
        r, s ,u0, u1, v0, v1 = (s, r % s,
                       u1, u0 - u1 * (r // s),
                       v1, v0 - v1 * (r // s))
    return (r, u0, v0)

print (bézout (45,35))
↪ (5, -3, 4)
```

La boucle se termine bien, pour la même raison qu'à la question précédente. En sortie de boucle, `r` est r_n, `s` est r_{n+1} et $r_{n+1} = 0$, et `u0` est u_n, `u1` est u_{n+1}, `v0` est v_n, `v1` est v_{n+1}. Cela justifie la valeur renvoyée par la fonction.

On peut remarquer qu'on a bien $5 = -3 \times 45 + 4 \times 35$.

30.17

a) On parcourt les chiffres de `n`, deux par deux, en utilisant des divisions euclidiennes successives, deux par deux. Ce parcours ce fait avec une boucle `while`, pour ne pas avoir à déterminer *a priori* le nombre de chiffres. À chaque chiffre rencontré, noté `k`, on applique simplement la transformation proposée, et on ajoute le résultat dans une variable `luhn` qui contiendra, lorsque tous les chiffres de `n` auront été traités, le nombre de Luhn de `n`. La fonction renvoie un booléen en comparant simplement à 0 le reste dans la division euclidienne par 10 du nombre de Luhn.

```
def vérifie_Luhn (n):
    """Teste si l'entier <n> vérifie
       le contrôle de Luhn"""
    luhn = 0
    while n != 0:
        # n est a_{2p+1}a_{2p}...a_{2i+1}a_{2i} ≠ 0,  i ⩽ p
        # luhn est le nombre de Luhn
        # de a_{2i-1}...a_1a_0.
        k = n % 10
        n //= 10
        luhn += k
        k = 2 * (n % 10)
        n //= 10
        if k < 10:
            luhn += k
        else:
            luhn += (k % 10) + (k // 10)
    return (luhn % 10 == 0)

n = 972487086
print (vérifie_Luhn (n))
↪ True
```

À chaque tour de boucle, le nombre de chiffres de `n` est diminué de 2. La boucle se termine donc, et lors de la sortie de boucle : `n` est 0, $i = p + 1$ et `luhn` est le nombre de Luhn du paramètre n.

b) On peut bien sûr faire quelques essais « à la main ». On peut aussi obtenir de façon systématique toutes les transpositions de deux chiffres successifs en écrivant une boucle permettant d'échanger les caractères d'indices i et $i+1$ dans la chaîne représentant `n`.

```
s = str(n)
for i in range(len(s)-1):
    permut = s[:i] + s[i+1] + s[i] + s[i+2:]
    print('Test sur {} : {}'.format(permut,
            vérifie_Luhn(int(permut))) )
↪ Test sur 792487086 : False
↪ Test sur 927487086 : False
↪ Test sur 974287086 : False
↪ Test sur 972847086 : False
↪ Test sur 972478086 : False
↪ Test sur 972480786 : False
↪ Test sur 972487806 : False
↪ Test sur 972487068 : False
```

30.18

a) On peut représenter le polynôme par la liste de ses coefficients. Son degré est alors majoré par la longueur de la liste (moins 1). Ainsi $P = a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 + \cdots + a_n\mathrm{X}^n$ sera représenté informatiquement par la liste $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Pour $P = 1 + 3\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^5$ et $Q = 1 + \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^5 + \mathrm{X}^7$, on définit donc :

```
p = [1, 0, 3, 1, 0, 2]
q = [1, 0, 0, 0, 1, -2, 0, 1]
```

b) Additionner deux polynômes se fait coefficient à coefficient. Il s'agit donc simplement d'ajouter les termes des deux listes `p` et `q`. On commence par compléter la plus courte des deux listes par des zéros pour que la somme se fasse bien. On utilise ensuite une *liste en compréhension* pour obtenir la liste des sommes des coefficients, mais on aurait aussi pu utiliser une boucle `for`.

```
def addition1(p,q):
    """Renvoie la somme des deux polynômes
       <p> et <q> représentés par la liste
       de leurs coefficients"""
    # On commence par compléter p ou q par
    # des zéros pour qu'ils aient
    # la même longueur
    if len(p) < len(q):
        p += [0]*(len(q)-len(p))
    else:
        q += [0]*(len(p)-len(q))
    return [ p[i]+q[i] for i in range(len(p))]

print (addition1 (p,q))
↪ [2, 0, 3, 1, 1, 0, 0, 1]
```

On applique la formule donnant les coefficients du polynôme produit pour construire, à l'aide d'une *liste en compréhension*, la liste des coefficients du produit.

```
def multiplication1(p,q):
    """Renvoie le produit des deux polynômes
       <p> et <q> représentés par la liste
       de leurs coefficients"""
    return [
       sum([ p[i] * q[k-i] for i in range(k+1)
              if i < len(p) and k-i < len(q)])
              for k in range(len(p)+len(q)-1)]

print (multiplication1 (p,q))
↪ [1, 0, 3, 1, 1, 0, 3, -4, -2, 5, -3, 0, 2,
                                          0, 0]
```

c) On peut représenter le polynôme par un dictionnaire dont les clefs sont les degrés des monômes et les valeurs les coefficients des monômes. La clef est présente lorsque le coefficient est non nul. Cette représentation est particulièrement adaptée pour les polynômes ayant un degré élevé et beaucoup de coefficients nuls (on parle de *polynômes creux*).
Pour $P = 1 + 3X^2 + X^3 + 2X^5$ et $Q = 1 + X^4 - 2X^5 + X^7$, on définit donc :

```
p = {0: 1, 2: 3, 5: 2, 3: 1}
q = {0: 1, 4: 1, 5: -2, 7: 1}
```

d) On s'intéresse à tous les degrés des monômes de P et Q, qui correspondront à des monômes de $P+Q$ (ou des termes nuls que l'on fera disparaître ensuite). Pour cela, on engendre la liste des clefs apparaissant dans `p` ou dans `q`.
La méthode `get(k,0)` des dictionnaires permet de récupérer la valeur associée à la clef `k`, et de donner la valeur `0` par défaut si la clef n'est pas présente dans le dictionnaire. On somme donc, pour chaque clef, les valeurs de `p.get(k,0)` et `q.get(k,0)`.
Le dictionnaire obtenu, en faisant attention de ne pas conserver les valeurs nulles, représente $P+Q$.

```
def addition2(p,q):
    """Renvoie la somme des deux polynômes
       <p> et <q> représentés par des
       dictionnaires"""
    s = {}
    # On génère la liste des clefs
    # de p et de q sans doublons
    clefs = list( set(list(p.keys())
                       + list(q.keys())) )
    for k in clefs:
        a = p.get(k,0) + q.get(k,0)
        if a != 0:
            s[k] = a
    return s

print (addition2(p,q))
↪ {0: 2, 2: 3, 3: 1, 4: 1, 7: 1}
```

Chaque monôme de P et de Q apporte une contribution au produit $P \times Q$. On évalue donc toutes ces contributions à l'aide de deux boucles imbriquées.
On élimine enfin les entrées correspondant à des monômes nuls.

```
def multiplication2(p,q):
    """Renvoie le produit des deux polynômes
       <p> et <q> représentés par des
       dictionnaires"""
    s = {}
    for kp in p.keys():
        for kq in q.keys():
            s[kp+kq] = s.get(kp+kq,0)
                                 + p[kp] * q[kq]
    # Il faut maintenant supprimer les entrées
    # ayant une valeur nulle
    # On génère la liste des clefs
    # correspondant à une valeur nulle~:
    clefs = [k for k in s.keys() if s[k]==0]
    for k in clefs:
        del(s[k])
    return s

print (multiplication2(p,q))
↪ {0: 1, 2: 3, 3: 1, 4: 1, 6: 3, 7: -4,
    8: -2, 9: 5, 10: -3, 12: 2}
```

Remarque importante. La classe `Polynomial` du module `numpy.polynomial` permet aussi de manipuler les polynômes.

```
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial as P
p = P([1, 0, 3, 1, 0, 2])
q = P([1, 0, 0, 0, 1, -2, 0, 1])
```

On y trouve les opérations usuelles sur les polynômes :

```
print (p+q)          # somme
↪ poly([ 2. 0. 3.  1.  1.  0.  0.  1.])
print (p*q)          # produit
↪ poly([ 1. 0. 3.  1.  1.  0.  3. -4. -2.
                                5. -3.  0.  2.])
print (p // q)       # quotient
↪ poly([-1.25 0.   0.5 ])
print (p % q)        # reste
↪ poly([ 2.25 0.   3.25  1.25 -0.5 ])
print (p(-2))        # évaluation
↪ -59.0
print (p.roots())    # racines
↪ [-1.10658100+0.j 0.01867382-0.57826067j
0.01867382+0.57826067j 0.53461668-1.03152269j
                       0.53461668+1.03152269j]
print (p.integ())    # primitive
↪ poly([ 0. 1. 0. 1. 0.25 0. 0.33333333 ])
print (p.deriv())    # dérivée
↪ poly([ 0.  6.   3.   0.  10.])
print (P.fit([1,2,3,4],[2,6,3,1],2))
↪ poly([ 4.875 -0.9 -3.375])
```

Cette dernière méthode permet de déterminer le polynôme de degré 2 qui approxime selon la méthode des moindres carrés les points $(1, 2), (2, 6), (3, 3), (4, 1)$.

30.19

a) 1) On reprend la fonction proposée :

```
def evalue1(p,x):
    """Calcule l'image de <x> par la fonction
       polynomiale associée au polynôme
       représenté par la liste <p>"""
    def puiss(x,n):
        """Calcule <x> puissance <n>"""
        y = 1
        for k in range(n):
            # y est x^k
            y *= x
        return y
    s = 0
    for i in range(len(p)):
        # s est a_0 + a_1 x + ... + a_{i-1} x^{i-1}
        s += p[i] * puiss(x,i)
    return s

print(evalue1([1, 0, 3, 1, 2],-2))
↪ 37
```

Les invariants de boucles sont :

- En entrée du tour de boucle k :
  `y` est x^k.
- En entrée du tour de boucle i :
  `s` est $a_0 + a_1x + \cdots + a_{i-1}x^{i-1}$.

2) Pour la fonction `puiss`, on fait 1 multiplication par tour de boucle, donc n multiplications lors de l'évaluation de `puiss(x,n)`. Pour la fonction `evalue1`, on fait une addition, une multiplication et une évaluation de `puiss(x,i)` au tour de boucle i. Il y a donc n additions et $\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ multiplications. La complexité temporelle est quadratique.
La maladresse est de calculer la puissance de x à chaque tour de boucle, ce qui a un coût de l'ordre de i, alors qu'une simple multiplication par x de la puissance précédente donne le résultat.

3) Pour mesurer la complexité, on applique la fonction à quatre listes aléatoires dont la longueur croît de façon régulière :

```
import random
import time
test = {2**k:[] for k in range(6)}
↪ {32:[], 1:[], 2:[], 4:[], 8:[], 16:[]}
for j in [2**k for k in range(6)]:
    for i in range(j*1000):
        test[j].append(
                        random.randint(-100,100))
for j in [2**k for k in range(6)]:
    t = time.clock()
    evalue1(test[j],74)
    print("chrono evalue1 {}000 : {} s."
        .format(str(j),str(time.clock()-t)))
↪ chrono evalue1 1000 : 0.141171 s.
↪ chrono evalue1 2000 : 0.813824 s.
↪ chrono evalue1 4000 : 4.912752 s.
↪ chrono evalue1 8000 : 33.652117 s.
↪ chrono evalue1 16000 : 244.852347 s.
↪ chrono evalue1 32000 : 1888.80936 s.
```

Le premier constat est que, pour des listes de longueur encore « raisonnable », le calcul est inutilisable en pratique.
Le second constat est que, lorsque la longueur de la liste est multipliée par 2, le temps de calcul est multiplié par un facteur important, de l'ordre de 6 (alors que l'étude théorique précédente nous laissait présager un facteur 4). Lors de l'analyse théorique, nous n'avons dénombré que les additions et les multiplications – sans tenir compte des différences entre ces deux opérations –, et nous n'avons pas évalué le coût des accès aux éléments des listes, ni celui des gestions d'indices de boucles.

b) 1) On améliore la fonction proposée en n'utilisant pas de fonction `puiss`, mais en calculant les puissances de x au fur et à mesure du déroulement de la boucle.

```
def evalue2(p,x):
    """Calcule l'image de <x> par la fonction
       polynomiale associée au polynôme
       représenté par la liste <p>"""
    p = 1
    s = 0
    for i in range(len(p)):
        # s est a_0 + a_1 x + ... + a_{i-1} x^{i-1}
        # p est x^i
        s += p[i] * p
        p *= x
    return somme

print(evalue2([1, 0, 3, 1, 2], -2))
↪ 37
```

2) On fait 2 additions et 1 multiplication par tour de boucle, donc un total de $3n$ opérations où $n-1$ est le degré du polynôme. Il apparaît donc que cette stratégie est bien meilleure que la précédente.

3) En reproduisant les tests du premier exemple, on obtient :

```
↪ chrono evalue2 1000 : 0.001017 s.
↪ chrono evalue2 2000 : 0.002985 s.
↪ chrono evalue2 4000 : 0.009327 s.
↪ chrono evalue2 8000 : 0.035763 s.
↪ chrono evalue2 16000 : 0.128626 s.
↪ chrono evalue2 32000 : 0.509421 s.
```

On constate que lorsque la longueur est multipliée par 2, le temps de calcul est mutliplié par un facteur de l'ordre de 3, relativement proche du facteur 2 attendu. Et surtout, par exemple pour un polynôme de degré 8000, le temps de calcul par cette seconde méthode est divisé par 1000. Pour un polynôme de degré 32000, le temps de calcul passe d'une demi-heure à une demi-seconde.

c) 1) Vu l'écriture de la somme à calculer, on parcourt les coefficients du polynôme à l'envers, et on utilise une variable `s` qui contient les valeurs des différentes parenthèses.

```
def evalue_horner(p,x):
    """Calcule l'image de <x> par la fonction
       polynomiale associée au polynôme
       représenté par la liste <p>
       en appliquant la méthode de Horner"""
    s = 0
    for i in range(len(p)-1,-1,-1):
        # i parcourt [n-1,n-2,...,2,1,0], s est
        # a_{i+1} + a_{i+2}x + a_{i+3}x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1-(i+1)}
        s *= x
        s += p[i]
    return s

print(evalue_horner([1, 0, 3, 1, 2],-2))
↪ 37
```

2) Par cette méthode, on fait 1 addition et 1 multiplication par tour de boucle, donc un total de $2n$ opérations où $n-1$ est le degré du polynôme. La complexité reste linéaire, mais le gain par rapport à la méthode précédente est d'un facteur 2/3.

3) En reproduisant les tests du premier exemple, on obtient :

```
↪ chrono evalue_horner 1000 : 0.00068 s.
↪ chrono evalue_horner 2000 : 0.00184 s.
↪ chrono evalue_horner 4000 : 0.005852 s.
↪ chrono evalue_horner 8000 : 0.020734 s.
↪ chrono evalue_horner 16000 : 0.078626 s.
↪ chrono evalue_horner 32000 : 0.303336 s.
```

ce qui confirme le gain d'un facteur de l'ordre de 2/3.

d) Les listes en compréhension peuvent séduire par leur élégance :

```
def evalue4(p,x):
    return sum([ p[i] * x**i for i in
                              range(len(p)) ])

print(evalue4([1, 0, 3, 1, 2], -2))
↪ 37
```

Le code est d'ailleurs optimisé automatiquement par l'interpréteur avant d'être exécuté, ce qui rend difficile l'évaluation de la complexité de ce calcul. On peut cependant penser qu'il s'agit simplement de l'algorithme étudié en *a)*, présenté sous une forme différente.
En reproduisant les tests du premier exemple, on obtient :

```
↪ chrono evalue4 1000 : 0.006804 s.
↪ chrono evalue4 2000 : 0.037999 s.
↪ chrono evalue4 4000 : 0.241031 s.
↪ chrono evalue4 8000 : 1.348332 s.
↪ chrono evalue4 16000 : 8.102753 s.
↪ chrono evalue4 32000 : 48.823834 s.
```

Malgré l'optimisation de l'interpréteur (visible en comparant au premier algorithme implémenté en *a)*), il s'agit encore d'un calcul à complexité quadratique, qui doit être abandonné au profit des calculs à complexité linéaire.

30.20

a) C'est un simple calcul de suite récurrente. La variable `u` contient les valeurs successives des termes de la suite.

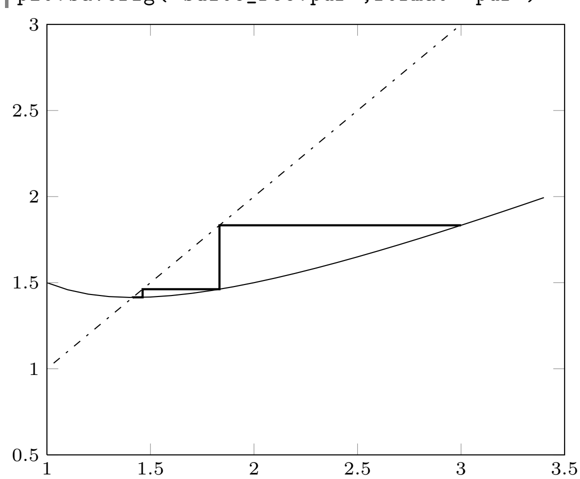
```
def suite(n):
    """Calcule le <n>-ème terme de la suite"""
    u = 3
    for i in range(n+1):
        # u est u_{i-1}
        u = (u + 2/u) / 2
    return u

print(suite(10))
↪ 1.414213562373095
```

b) On commence par construire la liste des abscisses et ordonnées des points que l'on veut représenter.

```
u = 3
U, V = [], []
for i in range(11):
    # u est u_{i-1}
    U.append(u)
    u = (u + 2/u) / 2
    U.append(u)
    V.append(u)
    V.append(u)
```

Il suffit ensuite de passer au tracé.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.arange(.5,3.5,0.1)
plt.plot(x, (x+2/x)/2, 'b')
plt.plot(x, x, '-.')
plt.axis([1,3.5,.5,3])
plt.plot(U,V,linewidth=2)
# plt.show()
plt.savefig('suite_rec.pdf',format='pdf')
```



30.21

a) L'équation différentielle est d'ordre 2 (et non linéaire). On la transforme en une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\theta'\\ -\sin\theta\end{pmatrix},$$

qui est de la forme $Y' = f(Y,t)$ avec :

$$Y(t) = \begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\end{pmatrix} \text{ et } f\left(\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}, t\right) = \begin{pmatrix}y_2\\ -\sin(y_1)\end{pmatrix}.$$

On charge les modules utiles à cet exercice.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

On définit la fonction f en faisant attention aux décalages d'indices.

```
def f(Y,t):
    return [Y[1],-np.sin(Y[0])]
```

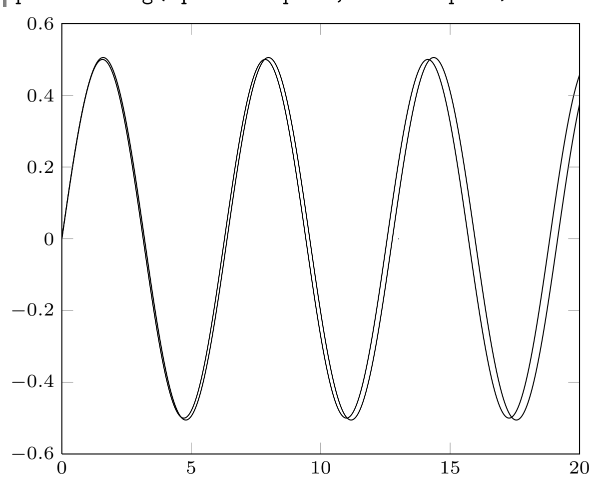
On utilise la fonction `odeint` pour obtenir une solution approchée du problème.

```
Y0 = [0, .5]
t = np.linspace(0,20,500)
soln = odeint(f, Y0, t)
```

b) Dans le cadre des petites variations, l'équation s'écrit $\theta'' + \theta = 0$, donc θ est combinaison linéaire de sin et cos. Vu la condition initiale, on obtient $\theta(t) = \dfrac{1}{2}\sin(t)$.

c) Il ne reste qu'à représenter les deux courbes obtenues.

```
plt.figure()
plt.plot(t,soln[:,0],color='r')
plt.plot(t,.5*np.sin(t),color='b')
# plt.show ()
plt.savefig('pendule.pdf',format='pdf')
```



On peut remarquer que les deux solutions sont proches, mais qu'un léger déphasage apparaît lorsque l'on s'éloigne de la condition initiale.

30.22

a) L'application $x \mapsto \ln x + x$ est continue, strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, de limites $-\infty$ et $+\infty$ en 0 et $+\infty$ respectivement, donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$. Ainsi 0 admet par f un unique antécédent, noté α.

b) La méthode de Newton consiste à former la suite définie par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n(1-\ln x_n)}{1+x_n}.$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ ne s'annulant pas, cette suite converge vers α dès que $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

c) On a $f(1) > 0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ donc α et les termes de la suite restent dans l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

On a $|f'(x)| = \left|1 + \dfrac{1}{x}\right| \geqslant 2$ et $|f''(x)| = \left|-\dfrac{1}{x^2}\right| \leqslant 4$ sur I.

Prenons $x_0 = \dfrac{1}{2}$, on a $x_0 \in I$ et $\alpha \in I$ donc $|x_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

La majoration indiquée dans l'énoncé donne alors :

$$|x_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

Un test d'arrêt *suffisant* est donc : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n} \leqslant \varepsilon$.

```
from numpy import log

def f(x):
    return log(x) + x

def approx(epsilon):
    """Détermine une valeur approchée de alpha
      à <epsilon> près"""
    x = .5
    n = 0
    while (1 / 2) ** (2 ** n) > epsilon:
        # x est x_n et (1/2)^(2^n) > ε
        x = x * (1- log (x)) / (1 + x)
        n += 1
    return x

print (approx(1e-8))
↪ 0.56714329040978384
```

À chaque tour de boucle, n est incrémenté, et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ donc cette quantité devient inférieure à ε : la boucle s'arrête. En sortie de boucle, `x` est x_n et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n} \leqslant \varepsilon$, ce qui justifie la valeur renvoyée.

30.23

a) L'application $f\ :\ x \mapsto \tan x - x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes de l'intervalle. Elle réalise donc une bijection de $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence et l'unicité de α.
Si l'on veut justifier plus précisément la croissance stricte, il suffit de calculer $f'(x) = \tan^2 x$ qui est positive, et ne s'annule qu'en des points isolés.

b) On charge les modules utiles, et on définit la fonction.

```
from numpy import tan

def f(x):
    return tan(x) - x
```

```
print (f(4.4))
↪ -1.30367621935
print (f(4.5))
↪ 0.137332054551
```

f change donc de signe entre $4,4$ et $4,5$, donc α est entre ces deux valeurs.

c) On applique l'algorithme de dichotomie

```
def approx(a,b,epsilon):
    """Renvoie une valeur approchée
       à <epsilon> près de la racine de f
       située entre <a> et <b> """
    while (b-a) > epsilon:
        c = (a+b)/2
        if f(a) * f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return a

print (approx(4.4, 4.5, 1e-4))
↪ 4.493359375000001
```

30.24

a) On linéarise : $\quad \sin^3(u) = -\frac{1}{4}\sin 3u + \frac{3}{4}\sin u.$
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\sin^3\frac{\pi}{18} + \frac{1}{6} &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{18}\right) + \frac{1}{6}\\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \sin\frac{\pi}{18} + \frac{1}{6}\\
&= \sin\frac{\pi}{18}
\end{aligned}$$

Donc $\sin\frac{\pi}{18}$ est une solution de l'équation proposée.
Pour $u \in [0;\pi]$, on a $0 \leqslant \sin u \leqslant u$, donc :

$$0 \leqslant \sin\frac{\pi}{18} \leqslant \frac{\pi}{18} \leqslant \frac{6}{18} = \frac{1}{3},$$

et donc $\sin\frac{\pi}{18}$ est dans l'intervalle proposé $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Définissons :

$$g(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6} - x.$$

Par le calcul précédent, $\sin\frac{\pi}{18}$ est un zéro de g.
On calcule $g'(x) = 4x^2 - 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ donc g est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ donc sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.
La restriction de g à cet intervalle est donc injective, et g admet sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ au plus une racine.

On a donc montré que $\sin\frac{\pi}{18}$ est l'unique racine de g sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

b) Notons $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6}$.
Cette fonction est croissante sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$,
et $0 < \frac{1}{6} = f(0) < f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81} + \frac{1}{6} = \frac{35}{162} < \frac{1}{3}$,
donc l'intervalle $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ est stable par f.
Par récurrence, on peut donc affirmer que la suite proposée dans l'énoncé reste dans l'intervalle $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.
Pour tout $t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$, $|f'(t)| = 4t^2 \leqslant \frac{4}{9}$ donc en appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre $\sin\frac{\pi}{18}$ et u_n, on peut affirmer que $\left|f(u_n) - f\left(\sin\frac{\pi}{18}\right)\right| \leqslant \frac{4}{9}\left|u_n - \sin\frac{\pi}{18}\right|$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \sin\frac{\pi}{18}\right| \leqslant \frac{4}{9}\left|u_n - \sin\frac{\pi}{18}\right|$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - \sin\frac{\pi}{18}\right| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n \underbrace{\left|u_0 - \sin\frac{\pi}{18}\right|}_{\leqslant \frac{1}{3}}$$

Comme $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$, la suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ converge vers 0 et $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \sin\frac{\pi}{18}$.
L'inégalité précédente fournit une majoration de l'erreur commise en confondant u_n et $\sin\frac{\pi}{18}$.

c) Vu l'inégalité précédente, il est *suffisant* d'avoir $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant \varepsilon$ pour être sûr d'avoir $\left|u_n - \sin\frac{\pi}{18}\right|$.
On applique donc l'algorithme de calcul des suites récurrentes, avec une boucle `while`.

```
def approx(epsilon):
    """Renvoie une valeur approchée de
       sin pi/18 à <epsilon> près"""
    u = 0
    majorant = 1/3
    while majorant > epsilon:
        # u est u_n, majorant est 1/3 (4/9)^n
        # et majorant> ε
        u = 4/3 * (u ** 3) + 1 / 6
        majorant *= 4/9
    return u

print(approx(1e-6))
```

```
↪ 0.17364817766693022
```

À chaque tour de boucle, `majorant` est multiplié par $\frac{4}{9}$, donc il tend vers 0. Il deviendra donc inférieur à ε : la boucle s'arrête.
En sortie de boucle, `u` est u_n, `majorant` est $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$ et `majorant` $\leqslant \varepsilon$, ce qui justifie le résultat renvoyé.

30.25

On charge d'abord les modules utiles dans cet exercice :

```
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial as P
import matplotlib.pyplot as plt
```

On commence par lire les données dans le fichier, et les stocker dans deux listes :

```
annees = []
temperatures = []
with open('temperatures.csv',mode='r') as f:
    for line in f:
        ligne=line.rstrip().split(',')
        annees.append(float(ligne[0]))
        temperatures.append(float(ligne[1]))
```

a) On utilise la méthode `fit`.

```
droite = P.fit(annees,temperatures,1)
print(droite)
```

```
↪ poly([-0.01196445 0.31314356])
```

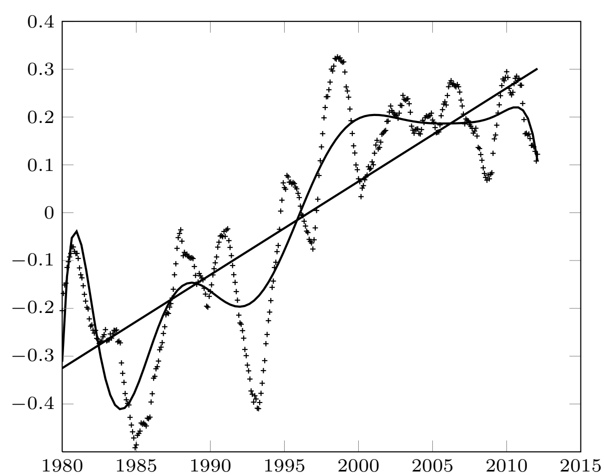
b) On utilise la méthode `fit`.

```
polynome = P.fit(annees,temperatures,10)
print(polynome)
```

```
↪ poly([ -1.32619258e-03 1.21075224e+00
 -2.1925942e-01 -8.3380133e+00 5.4517208e+00
 2.7491824e+01 -2.5797808e+01 -3.5962191e+01
 3.9466578e+01 1.5807789e+01 -1.9001383e+01])
```

c) Le tracé se fait avec `plot` qui s'applique à la liste des abscisses et la liste des ordonnées de points que l'on veut représenter.

```
p1 = plt.plot(annees,temperatures,'+')
droite.domain = np.array([annees[0],
                        annees[len(annees)-1]])
polynome.domain = np.array([annees[0],
                        annees[len(annees)-1]])
x, y = droite.linspace()
p2 = plt.plot(x,y, lw=2)
x, y = polynome.linspace()
p3 = plt.plot(x,y, lw=2)
# plt.show()
plt.savefig('temp.pdf',format='pdf')
```



Index

T

U

V

W

Z