PRÉPAS INTERNATIONALES

SERIE **C**
MATHEMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 16 mai 2023

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. 04 POINTS

On considère l'équation (E) : $743x - 47y = 13$.

1- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E). **1,00pt**

2- Soit a un entier relatif et n un entier naturel non nul.

a) Montrer que $a(a^{2n} - 1)$ est un multiple de 6. **0,50pt**

b) En déduire que le nombre $A = \sum_{i=0}^{p} {a_i}^{2i+1}$ est divisible par 6 si et seulement si $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ est un multiple de 6. **0,50pt**

On considère l'équation (E') : $8x + 5y = 100$.

3- Résoudre (E'). **1,00pt**

4- Un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 000 FCFA de monnaie dans un restaurant. Les hommes ont dépensé 8 000 FCFA chacun et les femmes 5 000 FCFA chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ? **1,00pt**

EXERCICE 2. 04 POINTS

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 jetons noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 jetons noirs. On jette un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si le « 6 » apparait, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2. On considère les évènements suivants :

A : « Obtenir le 6 en jetant le dé » et B : « Obtenir un jeton blanc ».

1-

a) Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc. **0,50pt**

b) On a tiré un jeton blanc. Calculer la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1. **0,75pt**

c) On a tiré un jeton noir. Montrer que la probabilité qu'il provienne de U_2 est $\frac{6}{7}$. **0,75pt**

2- On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U_1. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le 1er jeton blanc apparait au k[ième] tirage.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. **1,00pt**

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X. **1,00pt**

PROBLEME. 12 POINTS

NB : les deux parties du problème sont indépendantes

Partie A

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points $A(-1;2;3)$; $B(2;0;-1)$; $C(3;-2;-1)$ et $D(2;2;2)$.

1-
a) Justifier que les points A, B et C forment un repère du plan et que les points A, B, C et D forment un tétraèdre. **0,50pt**
b) Déterminer l'équation cartésienne du plan $(\wp)$ passant par les points A, B et C. **0,50pt**
c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point D et orthogonal au plan $(\wp)$. **0,50pt**

2- On note : f la réflexion de plan $(\wp)$; g le demi-tour d'axe (Δ) et (S) la sphère de centre D passant par A.
a) Déterminer les expressions analytiques de f et g. **1,50pt**
b) Déterminer gof. **0,50pt**
c) Déterminer (S') l'image de (S) par la réflexion f. **0,50pt**

Partie B

On donne la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x + 1 - xe^{x}$. On admettra que f' et f'' sont respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f.

1- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. **0,50pt**

2-
a) Calculer les limites de f' en $-\infty$ et $+\infty$. **0,50pt**
b) Dresser le tableau de variation de f' dérivée de f. **0,50pt**
c) Démontrer que $f'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. **0,50pt**
d) Démontrer que $f(\alpha) = 4\alpha + 1 - \frac{4\alpha}{\alpha+1}$ puis donner un encadrement de $f(\alpha)$. **0,50pt**

3-

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. **0,50pt**

b) Dresser le tableau de variation de f. **0,50pt**

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$. **0,50pt**

4- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $K = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ par $g(x) = \ln\left(4 + \frac{1}{x}\right)$.

a) Vérifier que $g(\beta) = \beta$. **0,50pt**

b) Etudier les variations de g sur l'intervalle K. **0,50pt**

c) Montrer que $g(K) \subset K$ et pour tout $x \in K$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{10}$. **1,00pt**

5- On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n \in K$. **0,50pt**

b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{10}|u_n - \beta|$. **0,50pt**

c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{2\times 10^n}$. **0,50pt**

d) Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite. **0,50pt**

Fin de l'épreuve.