PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Nouveaux locaux : Omnisports
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHEMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 25 août 2022

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. 04 POINTS

1-

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (e) : $11u - 13v = 7$. **0,75pt**

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système(S) : $\begin{cases} x \equiv 3\ mod(11) \\ x \equiv 10\ mod(13) \end{cases}$. **0,75pt**

c) Trouver toutes les valeurs de x du système (S) de l'intervalle $[1800, 2040]$. **0,50pt**

2- Dans l'espace muni du repère orthonormé directe (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). On donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0,0)$, $(-1,-2,1)$ et $(-3, 0, 5)$.

a) Calculer la distance du point A à la droite (BC). **0,50pt**

b) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A, B et C. **0,50pt**

c) Calculer la distance du point O au plan (ABC). **0,50pt**

d) Calculer le volume du tétraèdre OABC. **0,50pt**

EXERCICE 2. 05 POINTS

Le plan orienté est rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé. On désigne par r l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-1)$.

1- Démontrer que r est une rotation dont on précisera l'angle et le centre. **1,00pt**

2- A tout nombre complexe $z \neq 3$, on associe le nombre complexe $Z = \frac{z^2}{\bar{z}-3}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

a) Démontrer que l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que Z soit un nombre réel est la réunion d'une droite et d'une hyperbole $(\mathcal{H})$ dont on déterminera le centre Ω, les foyers, les directrices et l'excentricité. **2,00pt**

b) Tracer $(\mathcal{H})$ dans le repère $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$. **1,00pt**

3- Démontrer que $r(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}')$ est une conique dont on précisera la nature, son centre et son excentricité. **1,00pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Nouveaux locaux : Omnisports
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHEMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 25 août 2022

PROBLEME. 11 POINTS

NB : les deux parties du problème sont indépendantes

Partie A

Soit n un entier naturel et l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$. On donne la fonction u définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $u(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$.

1- Pour tout $x \in [0,1]$, montrer que $u'(x) = \sqrt{1-x}$. **0,50pt**
2- Montrer que $I_0 = \frac{2}{3}$. **0,50pt**
3- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n$. **1,00pt**
4- Montrer que $I_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ et que la suite (I_n) est décroissante et conclure. **1,00pt**
5- Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{4^{n+1}\times n!(n+1)!}{(2n+3)!}$. **1,00pt**

Partie B

Soit θ un nombre réel contenu dans l'intervalle $]0,\pi[$. On donne la fonction f_θ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\theta(x) = \frac{(cos\theta)x^2 - 2x + cos\theta}{x^2 - 2xcos\theta + 1}$$

(C_θ) est la courbe de f_θ dans un repère orthonormé (O, I, J).

1- Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe des expressions : $f_\theta(x) + 1$ et $f_\theta(x) - 1$. **1,00pt**
2- Déduire de la question précédente que la fonction f_θ est bornée. **0,50pt**
3- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée $f'_\theta(x) = \frac{h(\theta)\times(x^2-1)}{(x^2-2xcos\theta+1)^2}$ où h est une fonction trigonométrique à déterminer, puis étudier le signe de cette dérivée. **2,00pt**
4- Calculer les limites de f_θ en $-\infty$ et $+\infty$ et dresser son tableau de variation. **1,00pt**
5- B_θ est le point d'intersection (C_θ) avec l'axe des ordonnées et (T_θ) est la tangente (C_θ) au point B_θ.
   a) Déterminer l'équation de la tangente (T_θ). **0,50pt**
   b) Déterminer les coordonnées d'un autre point d'intersection A_θ de la tangente (T_θ) et la courbe (C_θ) autre que le point B_θ. **1,00pt**
   c) L'ensemble des points A_θ lorsque θ décrit l'intervalle $]0,\pi[$ est sur la courbe d'une fonction polynôme P de dégré 3 que l'on déterminera. **1,00pt**

Fin de l'épreuve.