PRÉPAS INTERNATIONALES

Filière Ingénierie Générale

B.P. : 2375 Yaoundé
Nouveaux locaux : Omnisports
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHEMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 27 juillet 2022

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (04 POINTS)

1- Résoudre dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, le système $\begin{cases} xy = 23040 \\ PPCM(x;y) = 960 \end{cases}$. **1,00pt**

2-

a) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $3x \equiv 23\ [7]$. **0,75pt**

b) En déduire les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ qui vérifient l'équation (E) : $3x - 7y = 23$. **0,75pt**

3-

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; démontrer que $PGCD(7n+3, 3n-2) = PGCD(n+7, 23)$. **0,75pt**

d) En déduire l'ensemble des couples d'entiers naturels qui vérifient l'équation (E) et tels que $PGCD(x, y) = 23$. **0,75pt**

EXERCICE 2 (06 POINTS)

Partie A

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application φ du plan dans lui-même qui, à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que $x' = \frac{-5x+12y-24}{13}$ et $y' = \frac{12x+5y+16}{13}$.

1- Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par φ. **0,50pt**

2- Soit M un point n'appartenant pas à (D).

a) Montrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D). **0,50pt**

b) Montrer que le milieu K du segment [MM'] appartient à (D). **0,50pt**

c) En déduire la nature de la transformation φ. **0,50pt**

Partie B

On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n \frac{x}{e^x - x}dx$.

1- Montrer que I_n existe pour tout entier naturel n. **0,50pt**

2- Montrer que la suite (I_n) est croissante. **0,50pt**

3-

a) Montrer que pour tout réel x psitif, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$. **0,50pt**

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n \leq \int_0^n 2\,xe^{-x}dx$. **0,50pt**

c) En effectuant une intégration par parties, exprimer $\int_0^n 2\,xe^{-x}dx$ en fonction de n. **1,00pt**

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n \leq 2$. **0,25pt**

4- La suite (I_n) est-elle convergente ? **0,25pt**

5- Donner une interprétation géométrique de I_n. **0,50pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Nouveaux locaux : Omnisports
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHEMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 27 juillet 2022

PROBLEME (10 POINTS)

Partie A

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ où l'unité est de 2 cm. On note les points A, B et C d'affixes respectives 1, $3+2i$ et $1-2i$. On note g l'application qui à tout point M du plan distinct de A et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$.

1- Déterminer l'affixe du point B' image du point B par g. **0,50pt**
2- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$. **0,50pt**
3- Calculer pour tout nombre complexe $z \neq 1$, le produit $(z'-1)(z-1)$. **0,50pt**
4- En déduire de la question précédente que pour tout point $M \neq A$, on a : $AM \times AM' = 2$ et $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AM'}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. **1,00pt**
5- Démontrer que si M est sur le cercle (C) de centre A et passant par O alors son image M' par g est un cercle (C') dont on précisera les caractéristiques. **1,00pt**
6-
   a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}\right)$. **0,50pt**
   b) Démontrer que si M est un point tel que $M \neq A$ et appartenant à la demi-droite $[AB)$ alors M' est sur une demi-droite que l'on précisera. **1,00pt**

Partie B

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-2x+10}$ et (C_1) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1,00pt**
2- Démontrer que la droite (D_1) d'équation cartésienne $y = \frac{2}{3}(x-1)$ est asymptote de la courbe de f au voisinage de $+\infty$. **0,50pt**
3- Démontrer que la droite (D_2) d'équation cartésienne $y = -\frac{2}{3}(x-1)$ est asymptote de la courbe de f au voisinage de $-\infty$. **0,50pt**
4- Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = -f(x)$ et (C_2) sa courbe représentative dans le même repère orthonormé. (H) est une courbe, réunion des courbes (C_1) et (C_2).
   a) Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **1,00pt**
   b) Montrer que l'équation cartésienne de (H) est : $4x^2 - 9y^2 - 8x + 40 = 0$. **0,50pt**
   c) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera les coordonnées du centre Ω. **0,50pt**
   d) Déterminer les caractéristiques suivantes de cette hyperbole dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
      i. Son excentricité. **0,50pt**
      ii. Ses foyers. **0,50pt**

Fin de l'épreuve.