PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Nouveaux locaux : Omnisports
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, TI, E, F, GCE**
MATHÉMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 9 juin 2022

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (05 POINTS)

On considère la fonction polynôme complexe défini par

$$P(z) = z^3 + (-3+5i)z^2 - (3+14i)z + 19 + 17i$$

1-
   a) Calculer $P(2+i)$. **0,50pt**
   b) Déterminer deux complexes a et b tels que $P(z) = (z-2-i)(z^2+az+b)$. **0,75pt**
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. **0,75pt**

2- On munit le plan complexe du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2+i$, $b = 2-3i$ et $c = -1-3i$.
   a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe. **0,50pt**
   b) Déterminer l'affixe du point D tel que B soit centre de gravité du triangle ACD. **0,75pt**
   c) Déterminer en justifiant la nature exacte du triangle ABC. **0,75pt**
   d) Déterminer l'affixe du point I centre du cercle circonscrit au triangle ABC puis le rayon de ce cercle. **1,00pt**

EXERCICE 2 (05 POINTS)

Soit (U_n) la suite à termes positifs définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{4+3U_n} \end{cases}$.

1- Montrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 4. **0,75pt**

2- Montrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante. **0,75pt**

3- En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite. **0,75pt**

4- Dans cette question, on voudrait déterminer la limite de la suite (U_n) par une autre méthode.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $4 - U_{n+1} = \frac{3(4-U_n)}{4+\sqrt{4+3U_n}}$. **0,75pt**
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|U_n - 4|$. **0,75pt**
   c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $|U_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$. **0,75pt**
   d) Justifier que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite. **0,50pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Nouveaux locaux : Omnisports
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, TI, E, F, GCE**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 9 juin 2022

PROBLEME (10 POINTS)

On donne la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x+x-e^x+3}{1+e^x}$ et (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité sur les axes est de 2 centimètres.

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. **0,75pt**
2- Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{1+e^x}$. **0,75pt**
3- Démontrer que la droite (D1) d'équation $y = x + 3$ est asymptote de (C_f) en $-\infty$. **0,50pt**
4- Démontrer que la droite (D2) d'équation $y = x - 1$ est asymptote de (C_f) en $+\infty$. **0,50pt**
5- Démontrer que le point $A(0,1)$ est centre de symétrie de la courbe de f. **0,50pt**
6- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = (\frac{1-e^x}{1+e^x})^2$, puis dresser le tableau de variation de f. **1,75pt**
7- En déduire de la question 6 que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion à (C_f). **1,00pt**
8- Construire la courbe représentative (C_f). **1,25pt**
9- On donne les fonctions g et h définies par : $g(x) = x + 3 - f(x)$ et $h(x) = f(x) - x + 1$. **A₁** est la partie du plan délimitée par les droites d'équations cartésiennes $x = -2$ et $x = 0$, la droite (D1) et la courbe de f ; puis **A₂** est la partie du plan délimitée par les droites d'équations cartésiennes $x = 0$ et $x = 2$, la droite (D2) et la courbe de f.
   a) Représenter sur le schéma précédent les espaces consacrés à **A₁** et à **A₂**. **0,50pt**
   b) Démontrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et $g(x) = h(-x)$. **1,00pt**
   c) Calculer en centimètre carré, les aires de **A₁** et de **A₂**. Quel est le constat que vous faites ? **1,50pt**

Fin de l'épreuve.