PRÉPAS INTERNATIONALES

Filière Ingénierie Générale

B.P. : 2375 Yaoundé
Nouveaux locaux : Omnisports
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 9 juin 2022

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (05 POINTS)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm, on considère les points M_n d'affixe $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n.(1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1-
   a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. **0,25pt**
   b) Exprimer z_n en fonction de z_0 et n. **0,25pt**
   c) Ecrire z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. **1,00pt**
   d) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère. **0,75pt**

2- Exprimer la distance OM_n en fonction de n. **0,25pt**

3-
   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\, M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$. **0,50pt**
   On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$.
   b) Déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$. **1,00pt**

4-
   a) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}}\right)$ en fonction de n. **0,50pt**
   b) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont alignés ? **0,50pt**

EXERCICE 2 (04 POINTS)

$(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace. On donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ et $(-1, 2, -3)$. (P) est un plan qui a pour équation cartésienne $2x + y - z + 7 = 0$.

1- Montrer que (ABC) est un plan et trouver une équation cartésienne de ce plan. **0,75pt**

2- Montrer que les plans (ABC) et (P) sont parallèles et calculer la distance entre les 2 plans. **0,75pt**

3- Déterminer l'expression analytique de la réflexion S par rapport au plan (P). **1,00pt**

4- (D) est la droite passant par O et orthogonale au plan (P) et S' est le demi-tour d'axe (D).
   a) Donner un système de représentation paramétrique de la droite (D). **0,25pt**
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (D) et du plan (P). **0,50pt**
   c) Donner la nature et les caractéristiques de la composée d'applications SoS'. **0,75pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Nouveaux locaux : Omnisports
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 9 juin 2022

EXERCICE 3 (03 POINTS)

1- Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels $a < b$ qui vérifient le système : **1,00pt**

$$\begin{cases} a + b = 204 \\ PPCM(a, b) + PGCD(a, b) = 852 \end{cases}$$

2- Hector a une valise qui contient ses documents officiels et une armoire où il garde de l'argent. Pour ouvrir la valise d'Hector, il faut former un nombre de quatre chiffres qui s'écrit sous la forme $N = \boldsymbol{pqrs}$, qui est divisible par 45 et où $r = p - 1$ et $s = q - 1$. Pour ce qui est de l'armoire, deux nombres de quatre chiffres peuvent ouvrir l'armoire : l'un s'écrit en base 11 sous la forme $\boldsymbol{abca}$ et l'autre s'écrit en base 7 sous la forme $\boldsymbol{bbac}$ et ont la même valeur en base 10.

a) Déterminer les nombres qui peuvent ouvrir la valise d'Hector. **1,00pt**

b) Déterminer les deux nombres qui peuvent ouvrir l'armoire d'Hector. **1,00pt**

PROBLEME (08 POINTS)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On donne la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1 + x)$.

1- Etudier les variations de la fonction g et dresser le tableau de variation. **1,00pt**

2- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle telle que : $3{,}9 < a < 4$. **0,50pt**

3- Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. **0,50pt**

4- On donne la fonction G définie sur $[0, +\infty[$ par $G(x) = 3x - (x + 3).\ln(x + 1)$ et on considère le nombre réel $A = \int_0^a g(x)dx$.

a) Montrer que G est une primitive de g. **0,50pt**

b) Donner une interprétation géométrique du nombre réel A. **0,50pt**

c) Démontrer que $A = \frac{a(a-3)}{a+1}$ et donner un encadrement de A. **1,00pt**

5- On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{2x})$ et (C_f) est la courbe représentative de f.

a) Exprimer $f(x)$ en fonction de $u = e^{2x}$, puis calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. **0,50pt**

b) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-2x})$, puis calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. **0,50pt**

c) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, la dérivée $f'(x) = e^{-x} \times g(e^{2x})$. **0,75pt**

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(e^{2x}) = 0$ (Utiliser le fait que g réalise une bijection dans l'intervalle $]1, +\infty[$). **0,50pt**

e) Dresser la tableau de variation de f. **0,75pt**

f) Construire la courbe (C_f). **1,00pt**

Fin de l'épreuve.