PRÉPAS INTERNATIONALES

Filière Ingénierie Générale

B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 25 août 2021

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (05 POINTS)

Soit P et Q les polynômes tels que $P(z) = z^3 - (5+4i)z^2 + (5+16i)z + 3 - 24i$ et $Q(z) = z^2 - 8z + 24 - 6i$.

1-
   a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une, et une seule, racine imaginaire pure z_0. **0,50pt**
   b) En déduire les deux autres racines de cette équation ; on les notera z_1 et z_2 (z_1 est celle qui a la plus petite partie réelle). **0,75pt**
   c) Trouver les deux solutions de l'équation $Q(z) = 0$; on les notera z_3 et z_4 ($|z_3| < |z_4|$). **0,75pt**

2- Soit A, B, A' et B' les points dont les affixes sont respectivement les complexes z_1, z_2, z_3 et z_4.
   a) Déterminer la similitude transformant le bipoint $(A;B)$ en le bipoint $(A';B')$. **0,75pt**
   b) Donner les caractéristiques de cette similitude. **0,75pt**

3- Soit C et D les points dont les affixes respectives sont z_0 et i.
   a) Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques. **0,75pt**
   b) Quelle est la nature du triangle ACD ? **0,75pt**

EXERCICE 2 (05 POINTS)

Soit a un réel non nul. On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0, \quad U_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad aU_{n+1} = (a+1)U_n - U_{n-1} \end{cases}$$

1- On suppose que $a = 1$. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique. **0,50pt**

On suppose dans la suite que $a \neq 1$.

2- Démontrer que la suite (V_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. **1,00pt**

3-
   a) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ **0,75pt**
   b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, calculer U_n en fonction de n et de a. **0,50pt**
   c) Pour quelle valeur de a la suite (U_n) est elle convergente ? **0,75pt**
   d) Préciser alors la limite de (U_n) en fonction de a. **0,50pt**

B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 25 août 2021

4- On choisit $a = 2$
Trouver le plus petit entier naturel p tel que $\left|U_p - 2\right| < 10^{-3}$. **1,00pt**

PROBLEME (10 POINTS)

1- On considère l'équation différentielle (E) $y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$ où y désigne une fonction de la variable x définie et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.
   a) Déterminer une fonction polynôme du second degré p solution de (E). **0,75pt**
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$. **0,75pt**
   c) Soit p la solution de (E) dans la question a). Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de l'équation différentielle (E'). **0,50pt**
   d) Déterminer la solution h de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $h(0) = 0$ et $h(1) = e + \frac{3}{2}$. **1,00pt**

2- On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x$ et (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
   a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. **0,50pt**
   b) Etudier les branches infinies à la courbe de f. **0,50pt**
   c) Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation. **1,00pt**
   d) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x = 0$. **0,50pt**
   e) Montrer qu'il existe un unique nombre réel non nul α tel que $f(\alpha) = 0$; puis trouver une expression simple de e^α en fonction de α. **1,00pt**
   f) Donner un encadrement de α par deux nombres entiers relatifs consécutifs. **0,50pt**
   g) Construire la courbe de f et la tangente (T) dans le repère orthonormé (O, I, J). **1,00pt**

3- $A(\alpha)$ est l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.
   a) Hachurer cette partie du plan sur le schéma de la question 2-g). **0,50pt**
   b) Calculer en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ puis donner un encadrement de $A(\alpha)$ **1,50pt**

Fin de l'épreuve.