PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**
MATHÉMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 25 août 2021

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (05,50 POINTS)

1- On donne deux nombres réels $u = 2+\sqrt{3}$ et $v = 2-\sqrt{3}$.
   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on peut écrire : $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels. **1,00pt**
   b) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1}, chacun en fonction de a_n et b_n. **0,50pt**
   c) Calculer les valeurs des termes a_3 et b_3. **0,50pt**
   d) Etablir les égalités ${a_n}^2 - 3{b_n}^2 = 1$ et $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$. **0,50pt**
   e) En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux et de même pour a_{n+1} et a_n. **0,50pt**

2- OACB est un carré de sens direct et de centre E. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[EA]$. On donne l'application affine f qui vérifie :
$$f(O) = O, f(E) = E \text{ et } f(B) = J$$
   a) Démontrer que l'application f est une application bijective. **0,50pt**
   b) Déterminer et construire le point A' image de A par f. **0,50pt**
   c) Montrer que la droite (OC) est invariante point par point. **0,50pt**
   d) En utilisant le repère orthonormé (O, A, B). Déterminer l'expression analytique de f puis, montrer que f est une affinité orthogonale dont on précisera le rapport et l'axe. **1,00pt**

EXERCICE 2 (05 POINTS)

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. A tout point M du plan (P) de coordonnées $(x;y)$, on associe son affixe $z = x+iy$. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z satisfait la relation $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = \left|z - \frac{1}{2}(1+i)\right|$.

1- Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $x^2+y^2-2x-2y-2xy+1=0$. **1,00pt**

2- Soit $(O,\vec{u},\vec{v})$ le repère image de $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$. On désigne par $(x;y)$ les coordonnées d'un point M dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(X;Y)$ les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
   a) Retrouver la relation suivante $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$. **1,00pt**
   b) Montrer qu'une équation de (Γ) dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ est : $2Y^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0$. **1,00pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**
MATHÉMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 25 août 2021

3-
a) Montrer que (Γ) est une parabole dont on précisera les coordonnées du sommet S dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. **0,50pt**
b) Donner les coordonnées du foyer F et une équation de la directrice (D) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. **0,50pt**
c) Construire (Γ). On donne $\|\vec{u}\| = 5$ cm. **1,00pt**

PROBLEME (09,50 POINTS)

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par : $\begin{cases} g(x) = x - 1 + \frac{1}{x} & si\ x \leq 1 \\ g(x) = 1 - (\ln x)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$ et (C_g) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (O, I, J).

1- Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. **1,00pt**
2- Démontrer que g est continue et dérivable en 1. **0,75pt**
3- Déterminer les asymptotes et étudier les branches infinies de la courbe (C_g). **0,75pt**
4- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **1,00pt**
5- Démontrer que le point d'abscisse $x = e$ est un point d'inflexion de (C_g). **0,50pt**
6- Construire (C_g) ainsi que ses asymptotes. **1,25pt**
7- Soit h la restriction de g sur l'intervalle $K =]1, +\infty[$.
a) Démontrer que h réalise une bijection de K vers un ensemble K' à préciser. **0,75pt**
b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}. **0,50pt**
c) Déterminer l'expression de la bijection réciproque $h^{-1}(x)$. **0,50pt**
d) Construire sur le même schéma que la courbe de g, la courbe de h^{-1}. **0,50pt**
8- A représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_1^e (lnx)^2 dx$. **1,00pt**
b) Calculer l'aire A. **1,00pt**

Fin de l'épreuve.