PRÉPAS INTERNATIONALES

Filière Ingénierie Générale

B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 22 juillet 2021

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (05 POINTS)

On considère l'équation $(E) : z \in \mathbb{C},\ z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = 0$

1-
   a) Vérifier que $(3i)$ est une solution de (E). **0,50pt**
   b) Résoudre l'équation (E). **1,00pt**

2- Dans le plan muni du repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C et G d'affixes respectives 2 ; -2 ; 1 et $-2+3i$.
   a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$. **1,00pt**
   b) Démontrer que $\frac{z_B - z_G}{z_A - z_G} = \frac{z_C - z_G}{z_B - z_G} = 1 + i$. **1,00pt**
   c) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. **0,75pt**
   d) Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude. **0,75pt**

EXERCICE 2 (06 POINTS)

1- Soient a, b et c trois nombres réels non nuls. On donne P polynôme de degré 3 qui est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.
   a) Développer et réduire en fonction de $a, b\ et\ c$ l'expression de $P(x)$. **0,50pt**
   b) On admet que $a, b\ et\ c$ vérifient le système :

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=-10 \end{cases}$$

      i. Sans calculer les valeurs des nombres $a, b\ et\ c$, calculer les valeurs des sommes : $A = a^2+b^2+c^2$ et $B = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. **1,00pt**
      ii. Retrouver l'expression développée et réduite de $P(x)$. **0,50pt**
      iii. Déterminer toutes les racines du polynôme P, si $P(-1) = 0$. **1,00pt**

2- Le but de cette question est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x}\right) dx$$

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 22 juillet 2021

Soit J et K les intégrales définies par : $J = \int_0^1 (2+x)e^{-x}dx$ et $K = \int_0^1 x^2.\frac{e^{-x}}{2-x}dx$.

a) Soit G la fonction définie sur $[0,1]$ par $(x) = (ax+b)e^{-x}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

   i. Déterminer a et b pour que $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = (2+x)e^{-x}$. **0,75pt**

   ii. En déduire la valeur de J. **0,75pt**

On admet cet encadrement de K : $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$.

b) Démontrer que $J + K = 4I$. **0,75pt**

c) Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I. **0,75pt**

PROBLEME (09 POINTS)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$ et (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) où $OI = OJ = 1$ cm.

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis donner une interprétation géométrique à chaque résultat obtenu. **1,00pt**

2- Calculer la dérivée de f, étudier son signe et dresser le tableau de variation. **1,50pt**

3- Calculer la dérivée seconde de f, puis en déduire les coordonnées du point d'inflexion à la courbe de f. **1,00pt**

4- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on précisera. **0,50pt**

5- Soit g la fonction réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative.

   a) Dresser le tableau de variation de la fonction g. **0,50pt**

   b) Montrer que pour tout $x \in K$, $g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2-x}\right)$. **0,50pt**

   c) Quelles sont les asymptotes de la courbe de g ? **0,50pt**

6- Construire les courbes de f et de g dans le même repère orthonormé. **1,50pt**

7- On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2 - f(x)$ et $\boldsymbol{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $y = 2$, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ $(\lambda > 0)$.

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{5e^{-x}}{1+e^{-x}}$. **0,50pt**

   b) Calculer en fonction de λ, l'aire $\boldsymbol{A}$. **1,00pt**

   c) En déduire l'aire $\boldsymbol{A}$ lors que λ tend vers $+\infty$. **0,50pt**

Fin de l'épreuve.