PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 18 mai 2021

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (06 POINTS)

z est un nombre complexe, $(\mathcal{P})$ est le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1- Soit l'équation (E) : $z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0$.
   a) Vérifier que (-2) est solution de l'équation (E). **0,50pt**
   b) Résoudre alors l'équation (E). **1,50pt**

2- A, B et C sont les points d'affixes respectives $-2, 3 + 5i$ et $3 - 5i$.
   a) Déterminer la nature du triangle ABC. **0,75pt**
   b) La droite (BC) coupe $(O, \vec{e}_1)$ en un point K. Déterminer l'affixe k du point K. **0,50pt**

3- r désigne la rotation du plan tel que $\mathrm{r(K) = K}$ et $\mathrm{r(B) = A}$; h l'application du plan dans le plan qui à tout point $\mathrm{M(z)}$ associe le point $\mathrm{M'(z')}$ tel que $\mathrm{z' = -2z + 9}$.
   a) Préciser la mesure principale de l'angle de r. **0,50pt**
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h. **0,75pt**
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f = h \circ r$. **0,75pt**
   d) Déterminer l'écriture complexe de f. **0,75pt**

EXERCICE 2 (04 POINTS)

On considère la suite (u_n) définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases}$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 4u_n - 6n + 15$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1- Montrer que la suite $(\mathrm{v_n})$ est une suite géométrique. **0,75pt**

2- Calculer $\mathrm{v_0}$ puis exprimer $\mathrm{v_n}$ en fonction de n.
   En déduire que $\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{u_n} = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$. **1,25pt**

3- Montrer que la suite $(\mathrm{u_n})$ peut s'écrire sous la forme $\mathrm{u_n = t_n + w_n}$ où $(\mathrm{t_n})$ est une suite géométrique et $(\mathrm{w_n})$ une suite arithmétique. **0,50pt**

4- Calculer $\mathrm{T_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n}$ et $\mathrm{S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n}$.
   En déduire $\sum \mathrm{u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$. **1,50pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 18 mai 2021

PROBLEME (10 POINTS)

On donne deux fonctions f et g définies sur l'ensemble $D =]0, +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$ et $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - lnx$. On désigne par (C_f) est la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité sur les axes est de 2 cm.

1- Etude de la variation de g.
   a) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$. **0,50pt**
   b) Calculer la dérivée de g et dresser son tableau de variation. **1,00pt**
   c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1,2[$. **0,50pt**
   d) Déterminer le signe de $g(x)$. **0,50pt**

2- Etude de la variation de f et construction de la courbe (C_f).
   a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. **0,50pt**
   b) En déduire les asymptotes de la courbe de f. **0,50pt**
   c) Démontrer que $f'(x) = \frac{2(2x+1)g(x)}{(x^2+x)^2}$. **0,50pt**
   d) Donner le sens de variation de f et dresser le tableau de variation. **1,00pt**
   e) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$ par deux fractions rationnelles. **1,00pt**
   f) On note le point A intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses, déterminer une équation cartésienne de la droite (D) tangente à (C_f) en A. **0,50pt**
   g) Tracer la droite (D) et la courbe (C_f). **2,00pt**

3- On considère deux fonctions h et k définies sur l'ensemble $D =]0, +\infty[$ par :
$$h(x) = \frac{lnx}{x} \text{ et } k(x) = \frac{lnx}{x+1}$$
   a) Démontrer que pour tout $x \epsilon D, h(x) - k(x) = \frac{1}{2}f(x)$. **0,25pt**
   b) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $k(x) \leq h(x)$. **0,25pt**
   c) Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{lnx}{x}dx$. **0,50pt**
   d) Puis en déduire de la question précédente que : $\int_1^3 k(x)dx \leq \frac{(ln3)^2}{2}$. **0,50pt**

Fin de l'épreuve.