PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**
MATHÉMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 18 mai 2021

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (05 POINTS)

Partie A

L'espace (ξ) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points $A(-3\,;0\,;1)$, $B(-2\,;5\,;1)$ et $C(1\,;\ -1\,;2)$.

1- Démontrer que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires. **0,75pt**

2- Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. **0,75pt**

3- Soit G l'isobarycentre des points A, B et C. On note (P) le plan médiateur du segment $[OG]$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (P). **1,00pt**
   b) Déterminer l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ de plan (P). **1,00pt**
   c) Soit $S_{(OG)}$ le demi – tour d'axe (OG). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(P)} \circ S_{(OG)}$. **0,50pt**

Partie B

1- Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que : $PGCD(a,b) + PPCM(a,b) = b + 9$. **1,00pt**

EXERCICE 2 (05 POINTS)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$).

1- On donne deux points A et B de coordonnées respectives $\binom{1}{1}$ et $\binom{3}{1}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z dans les cas suivants :
   a) (E1) $(z-1-i)(\overline{z}-1+i) = 4$ **0,75pt**
   b) (E2) $\arg(\overline{z}-3+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$ **0,75pt**

2- On donne le nombre complexe $v = -\frac{1}{2}(1+i)$ et on construit la suite de points (A_n) de la manière suivante $A_0 = O$, A_1 est un point d'affixe $z_1 = i$, puis pour tout entier $n \geq 2$, A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$. On admettra que A_n a pour affixe z_n.
   a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $z_n - z_{n-1} = v(z_{n-2} - z_{n-1})$. **0,75pt**
   b) A partir de la question précédente, montrer que $z_n - z_{n-1} = (-v)^{n-1} \times i$. **0,75pt**
   c) En déduire de la question b) que $z_n = \frac{i[1-(-v)^n]}{1+v}$ et que $z_2 = \frac{1}{2}(-1+3i)$. **1,00pt**
   d) On considère la similitude directe S qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2.
      I. Donner l'écriture complexe de S. **0,50pt**
      II. Déterminer les caractéristiques de S. **0,50pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE C
MATHÉMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 18 mai 2021

PROBLEME (10 POINTS)

NB : les parties A, B et C du problème sont strictement indépendantes

Partie A

1-
a) Etudier les variations et le signe de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : **1,00pt**
$$f(x) = x - 1 - lnx$$
b) Etudier les variations et le signe de la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : **1,00pt**
$$g(x) = lnx + \frac{3}{2} - 2x + \frac{x^2}{2}$$
c) En déduire que pour tout réel a positif : $a - \frac{a^2}{2} < ln(1+a) < a.$ **1,00pt**

Partie B

Pour tout entier naturel non nul, on donne l'intégrale $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx.$

1- Calculer I_1 en utilisant une intégration par parties. **0,50pt**

2- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$; puis en déduire la limite de I_n lorsque n tend vers l'infini. **1,00pt**

3- Montrer en utilisant une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{(n+1)!}$; puis en déduire les valeurs exactes de $I_2\ et\ I_3$. **1,00pt**

Partie C

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$). Soient Ω un point de coordonnées $(2,1)$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs tels que $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$. Le point M de coordonnées (x,y) dans le repère (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) a pour coordonnées (X,Y) dans le repère (Ω, $\vec{u},\vec{v}$) et vérifie l'équation:
$$36x^2 + 29y^2 - 24xy - 120x - 10y - 55 = 0\ (E)$$

1- Montrer que le repère (Ω, $\vec{u},\vec{v}$) est orthonormé. **0,50pt**

2- Exprimer x et y en fonction de X et Y. **1,00pt**

3- Démontrer que l'équation de (E) dans le repère (Ω,$\vec{u},\vec{v}$) est : $4X^2 + 9Y^2 = 36.$ **0,50pt**

4- En se servant du repère (Ω, $\vec{u},\vec{v}$) , vérifier que la courbe décrite par le point M est une conique dont on précisera :
a) la nature exacte et son excentricité. **0,50pt**
b) les foyers et les sommets. **1,00pt**

5- Construire la courbe de (E). **1,00pt**

Fin de l'épreuve.