PRÉPAS INTERNATIONALES

Filière Ingénierie Générale

B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 2 septembre 2020

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (03 POINTS)

1- On veut résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x+1} + 2\ln y - 3e^{2z} = -13 \\ \dfrac{-7}{x+1} + 3\ln y - 2e^{2z} = 5 \quad (S) \\ \dfrac{3}{x+1} - 4\ln y + 5e^{2z} = 9 \end{cases}$$

a) Préciser un changement de variables qui permet de résoudre le système (S). **0,75pt**

b) Déterminer les solutions du système (S). **2,25pt**

EXERCICE 2 (05,5 POINTS)

1- On considère le polynôme définie par : $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3-i)z - 2(1-i)$.

a) Déterminer un nombre réel racine du polynôme P. **0,50pt**

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$. **1,00pt**

2- On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 3 + i, z_B = 2i, z_C = 2 - 2i$. On considère la similitude directe S de centre B qui transforme A en C.

a) Placer les points A, B, C dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Montrer que ABC est un triangle rectangle. **1,50pt**

b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S. **0,75pt**

c) Soit M un point d'affixe z, M' son image par la similitude S, d'affixe z'. Exprimer z' en fonction de z. **0,50pt**

d) Déterminer puis placer le point D d'affixe z_D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. **0,75pt**

3- Soit l'ensemble (E) des points du plan dont l'affixe z vérifie l'équation $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 3 = 0$. Déterminer l'image de (E) par la similitude directe S définie à la question (3). **0,50pt**

PROBLEME (11.5 POINTS)

NB *: Le problème comporte trois parties dépendantes les unes des autres.*

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 2 septembre 2020

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 + x^2 + 1$.

1- Etudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g. **1,50pt**

2- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ qui est contenue dans l'intervalle $\left]\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}\right[$. **1,50pt**

3- En déduire le signe de $g(x)$. **0,50pt**

Partie B

On donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = 2\ln(1 + x^2) - \frac{1}{x}$.

1- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **1,00pt**

2-

a) Calculer $f'(x)$ et justifier que le signe de $f'(x)$ est fonction du signe de $g(x)$. **1,00pt**

b) En déduire que f admet un minimum relatif en α. **0,50pt**

c) Dresser le tableau de variation de f (On notera $f(\alpha)$ l'image de α). **0,50pt**

3- (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

a) Démontrer que (C_f) admet une direction asymptotique d'axe (OI) à l'infini. **0,50pt**

b) Construire (C_f) en prenant $\alpha = -0{,}72$. **1,00pt**

Partie C

On donne la fonction h définie sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $h(x) = tanx$.

1- Montrer que h détermine une bijection de $\left[\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ vers un intervalle K à préciser. **0,50pt**

2- On désigne par h^{-1} la réciproque de cette bijection que l'on ne déterminera pas.

a) Calculer $h^{-1}(\sqrt{3})$ et $h^{-1}(1)$. **0,50pt**

b) Démontrer que h^{-1} est dérivable sur K et $\forall x \in K$; $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. **0,50pt**

c) Démontrer que $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{12}$ (utiliser la question b) précédente). **0,50pt**

3- On donne l'intégrale $J = \int_1^{\sqrt{3}} \ln(1 + x^2)$. Par une intégration par parties, démontrer que J s'exprime en fonction de I (On remarquera que $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$) ; par la suite calculer la valeur de J. **0,75pt**

4- Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{3}$. **0,75pt**

Fin de l'épreuve.