PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 2 septembre 2020

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1 (03,5 POINTS)

1- On veut résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $n^2(2n+1)=468$
   a) Combien de diviseurs comptent le nombre 468 ? **0,25pt**
   b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2(2x+1)=468$. **1,00pt**
   c) Peut-on trouver un entier naturel $b \geq 1$ tel que le nombre qui s'écrit 941 dans le système décimal s'écrivent $\overline{4205}$ dans le système de numération de base b ? **0,75pt**

2- Soient a et b deux entiers relatifs
   a) Montrer que $(a+b)^7 \equiv a^7+b^7\ [7]$. **0,75pt**
   b) Déterminer les entiers relatifs qui vérifient le système suivant : **0,75pt**

$$\begin{cases} -20 \leq x \leq 10 \\ x^7+128 \equiv 0\ \ [7] \end{cases}$$

EXERCICE 2. (04,5 POINTS)

Dans le plan vectoriel euclidien P, on considère l'endomorphisme σ_a dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $M=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1- Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$; σ_a est un automorphisme. **0,50pt**

2- Dans le plan affine euclidien P ; on considère l'application affine Sa d'endomorphisme σ_a qui transforme l'origine O du repère en un point O'(-1, 1). On pose $S_a(M)=M'$ avec $M(x,y)$ *et* $M'(x',y')$.
   a) Donner les expressions de x' et y' en fonction de x et y. **0,75pt**
   b) Le point M a pour affixe $z=x+iy$ et le point M'a pour affixe $z'=x'+iy'$. Montrer que z et z' sont liées par une relation de la forme $z'=\alpha\overline{z}+\beta$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z et α et β sont des réels à déterminer. **0,75pt**
   c) Déterminer la nature de Sa et donner les caractéristiques de Sa. **1,00pt**

3- On note (Γ_a) l'image de (C_a) par l'application Sa.
   a) Montrer que (Γ_a) est la courbe représentative dans le repère (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) de la fonction g_a telle que $g_a(x)=-ax-a+1+(1+a^2)e^{x+1-a}$. **1,00pt**
   b) Dresser le tableau de variation de g_1 (le cas $a=1$). **0,50pt**

PROBLEME (12 POINTS)

NB *: Le problème comporte deux parties indépendantes.*

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepasinternationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**
MATHÉMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 2 septembre 2020

Le plan affine euclidien $\mathbb{P}$ est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). On note P le plan vectoriel euclidien associé. Dans les parties A et B du problème, $a \in \mathbb{R}$.

Partie A

f_a est la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f_a(x) = a(1-x) + lnx$ où ln désigne le logarithme népérien.

1- Dresser le tableau de variation de la fonction f_a (pour $a \leq 0 \quad et \quad a > 0$). **2,00pt**
2- A quelle condition f_a est-elle une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$? **0,50pt**
3- (C_a) est la courbe représentative de f_a dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Montrer que les courbes (C_a) ont un point commun A que l'on déterminera. **0,50pt**
4- Etudier f_1 et tracer sa courbe représentative (C_1) dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) (on étudiera les branches infinies et on prendra $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2$ cm. **1,50pt**
5- Calculer en fonction de a et de δ l'intégrale $I_a(\delta) = \int_\delta^2 f_a\,(x)dx$ où $\delta \in \mathbb{R}_+^*$; puis calculer la limite de $I_a(\delta)$ lorsque δ tend vers 0. **1,00pt**

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. On se propose d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ puis de préciser sa limite. Pour tout $n > 0$, on pose $v_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

1- En remarquant que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, pour tout $x \neq 0$, montrer que $v_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite. **1,50pt**
2- En remarquant que $p! \geq p(p-1)$, pour tout $p \geq 2$, montrer que $u_n \leq 3 - \frac{1}{n}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note par α sa limite. **1,00pt**
3- On se propose ici de déterminer la valeur exacte de α. Pour tout entier $p \geq 1$, on pose $I_p = \int_1^e \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$.
   a) Calculer la dérivée de la fonction $g(x) = \frac{1+\ln x}{x}$, pour tout $x > 0$. En déduire la valeur de I_1. **1,00pt**
   b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{p+1} = -\frac{1}{e} + (p+1)I_p$. **1,00pt**
   c) Montrer par récurrence sur l'entier $p \geq 1$, que $\frac{I_p}{p!} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{p!}\right)$. **1,00pt**
   d) Démontrer que pour tout $p \geq 1$, $0 \leq I_p \leq 1$. En déduire la valeur de α. **1,00pt**

Fin de l'épreuve.