PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepas.internationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 30 juillet 2020

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. (6 POINTS)

Dans cet exercice, le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) où l'unité sur les axes est de 2 cm.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$. **1,00pt**

2- K, L et M sont les points d'affixes : $z_K = 1 + i$, $z_L = 1 - i$ et $z_M = -\sqrt{3}i$.

   a) Placer les points K, L et M dans le plan complexe P. **1,00pt**

   b) Déterminer l'affixe du point N symétrique de M par rapport au point L. **0,50pt**

3- On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Déterminer l'expression complexe de R. **0,50pt**

   b) Déterminer les affixes des points A et C images respectives de M et N par R. **0,50pt**

4- La translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(0,2)$ transforme le point M en D et le point N en B.

   a) Déterminer les affixes des points D et B. **0,50pt**

   b) Montrer que les segments $[DB]$ et $[AC]$ ont un même milieu qu'on précisera. **0,50pt**

   c) Montrer que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$, puis déduire la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}}\right)$. **1,00pt**

   d) Donner la nature exacte du quadrilatère ABCD. **0,50pt**

EXERCICE 2. (4 POINTS)

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier n par : $I_n = \int_0^1 (1 + x^n) \ln(1 + x) dx$.

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les inégalités $0 \le \ln(1 + x) \le \ln 2$, pour tout $x \in [0,1]$. En déduire que $0 \le I_n \le 2 \ln 2$. **1,00pt**

2- Montrer que la suite (I_n) est convergente. On désigne par α sa limite. **0,75pt**

3- Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{1}{2}x \le \ln(1 + x) \le x$. En déduire que α est non nul. **1,00pt**

4- Montrer que $\alpha = \int_0^1 \ln(1 + x) dx$. En déduire la valeur exacte de α. **1,25pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepas.internationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, E, F, TI, GCE/AL**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 30 juillet 2020

PROBLEME (10 POINTS)

(O, I, J) est un repère orthonormé où l'unité sur les axes est de 2 cm.

Partie A

1- On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 - 2x\ln x$.
   a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0. **0,50pt**
   b) Calculer la dérivée de f, étudier son signe et dresser le tableau de variation. **1,00pt**
   c) De la variation de f, déterminer le signe de $f(x)$. **0,50pt**

2- On considère la fonction g définie sur $]0\,,2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{(x-2)^2}$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère cité plus haut.
   a) Calculer les limites de g en $+\infty$, 0 et 2. **1,00pt**
   b) Montrer que pour tout $x \in\,]0\,,2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ $g'(x) = \frac{f(x)}{x(x-2)^3}$. **0,50pt**
   c) Etudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variation de g. **0,75pt**
   d) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1. **0,50pt**
   e) Calculer les ordonnées des points de (C_g) d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. **0,50pt**
   f) Construire la courbe (C_g) et la droite (T). **1,25pt**

Partie B

On considère la fonction h définie sur $]2;+\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x(x-2)}$.

1- Déterminer les réels a et b tels que : $h(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}$. **0,50pt**
2- En déduire une primitive de h sur l'intervalle $]2;+\infty[$. **0,50pt**
3- Déterminer la primitive H de h pour laquelle $H(3) = 0$. **1,00pt**
4- Soit m un nombre réel tel que $m > 3$.
   a) Calculer l'aire $A(m)$ en cm² de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_g) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 3$. **1,00pt**
   b) Calculer la limites de $A(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$. **0,50pt**

Fin de l'épreuve.