PRÉPAS INTERNATIONALES

Filière Ingénierie Générale

B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepas.internationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 30 juillet 2020

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. (4 POINTS)

1-

a) Résoudre dans $Z \times Z$ l'équation (E) : $5x - 11y = 4$. **1,00pt**

b) Déterminer les nombres entiers qui vérifient les relations : $\boldsymbol{a} = 2\ [5]$ et $\boldsymbol{a} \equiv 6\ [11]$ et qui sont contenus dans l'intervalle $[110, 240]$. **1,00pt**

2- On considère le plan complexe (O, $\vec{u}, \vec{v}$) et l'application g du plan dans le plan qui a tout point $M(x, y)$ associe le point $M(x', y')$ telle que $\begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases}$.

a) Déterminer l'expression complexe de g. **0,50pt**

b) Déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques. **0,75pt**

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|iz + 3 + i| = 2$. **0,75pt**

EXERCICE 2. (6 POINTS)

1- On donne la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^{-x} sinx$.

a) Calculer la dérivée première $u'(x)$ et la dérivée seconde $u''(x)$. **1,00pt**

b) Trouver deux nombres réels a et b tels que : $u''(x) + a.u'(x) + b.u(x) = 0$. **0,50pt**

c) Calculer une primitive de la fonction u. **0,50pt**

2- $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. On donne trois points A, B et C de coordonnées respectives $(0, 0, 2)$, $(1, 1, 3)$ et $(1, -1, -1)$. On considère le plan (P) d'équation cartésienne : $-x + 2y - z - 6 = 0$.

a) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan et trouver une équation cartésienne de ce plan. **1,00pt**

b) Vérifier que les plan (P) et (ABC) sont parallèles. **0,50pt**

c) Déterminer une translation de l'espace qui transforme le plan (ABC) en (P). **1,00pt**

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{x}^6 - 3\mathrm{x}^5 + 4\mathrm{x}^4 - 6\mathrm{x}^3 + 5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2 = 0$ sachant qu'elle admet i et –i comme racine simple. **1,50pt**

PRÉPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 2375 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux,
Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepas.internationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **C**

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 30 juillet 2020

PROBLEME (10 POINTS)

1- On considère la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \tan x$.

a) Montrer que g est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On désigne par φ sa bijection réciproque. **0,75pt**

b) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. **1,00pt**

c) Dresser le tableau de variation de φ puis tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **1,25pt**

2- On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = \frac{\varphi(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

a) Etudier la monotonie sur $[0, +\infty[$ des fonctions définies par :
$f_0(x) = x - \frac{x^3}{3} - \varphi(x)$ et $f_1(x) = x - \varphi(x)$. **1,00pt**

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq x - \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}$. **0,50pt**

c) En déduire que h est dérivable en zéro et préciser $h'(0)$. **0,50pt**

3- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{\varphi(t)}{t}\right) dt & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

a) Montrer que f est une fonction paire. **0,50pt**

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $1 - f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{t-\varphi(t)}{t}\right) dt$. En déduire que f est continue en 0. **1,00pt**

c) En déduire pour tout $x > 0$, $0 \leq \frac{1-f(x)}{x} \leq \frac{x}{9}$. En déduire que f est dérivable en 0. **1,00pt**

d) Montrer que pour $x \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t} dt \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}}$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. **1,00pt**

4- On se propose d'étudier la fonction f.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $x^2 f'(x) = -\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t} dt + \varphi(x)$. **0,50pt**

b) On pose $u(x) = x^2 f'(x)$. Etudier la monotonie de la fonction u. **0,50pt**

c) Dresser le tableau de variation de f. **0,50pt**

Fin de l'épreuve.