PREPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 601 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux, Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepas.internationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, TI, E, F, GCE/AL**

MATHEMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 6 juillet 2020

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. (6 POINTS)

On considère le nombre complexe $z_0 = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) Calculer z_0^2 et z_0^4 . En déduire le module et un argument du nombre complexe z_0.
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, à tout point M de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit $z_0 \cdot z$ est égal à 8.
3) On considère le polynôme complexe $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i)$.
   a) Démontrer qu'il existe un nombre imaginaire pur racine du polynôme P.
   b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.
4) On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = 3 + i,\ z_B = 2i,\ z_C = 2 - 2i$.
   a) Placer les points dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unités sur les axes 2cm).
   b) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle.
   c) Déterminer deux points D et E pour que ABDE soit un carré de sens direct.

EXERCICE 2. (4 POINTS)

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} \cdots + \frac{n}{n^2}$$

1) Montrer par récurrence que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. En déduire que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.
2) Démontrer que pour tout $x \geq 0,\ \ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
3) Justifier que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \leq n^4$. En déduire que alors les inégalités
$$v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$$
4) Conclure sur la convergence de la suite (u_n).

PREPAS INTERNATIONALES
Filière Ingénierie Générale
B.P. : 601 Yaoundé
Sis Carrefour des Carreaux, Immeuble 3ème étage
Tél. : 696 16 46 86
E-mail. : prepas.internationales@yahoo.com
Site : www.prepas-internationales.org

SERIE **D, TI, E, F, GCE/AL**

MATHEMATIQUES

Durée : 3 Heures

Yaoundé le 6 juillet 2020

PROBLEME (10 POINTS)

Partie A

1) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3lnx + 6$

En utilisant le sens de variation de g, déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{3lnx}{\sqrt{x}} + x - 1$
   a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Utiliser 1- pour déterminer le sens de variation de f.
3) Soit Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.
   a) Montrer que Δ est asymptote à C_f et étudier la position de relative de $\Delta\ et\ C_f$.
   b) Construire $\Delta\ et\ C_f$.(unité graphique :0,5cm)
   c) Calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = e$.

Partie B

On pose $I_p = \int_1^e x^2(lnx)^p dx)$ où p est un entier naturel non nul.

1)
   a) Calculez I_1
   b) Montrez que pour tout entier naturel non nul : $I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$
   c) Déduisez-en I_2, puis I_3.
2) On considère la suite (I_p) , p ≥ 0.
   a) Montrez que cette suite est décroissante.
   b) Etablissez la convergence de cette suite vers une limite L $\geq$ 0.
3)
   a) Montrez qu'il y a contradiction entre le fait que L soit strictement positive et la relation obtenue dans 1 : b).
   b) Déduisez-en alors la limite de la suite (I p)

Fin de l'épreuve.