

CONCOIRS PREPA-MI

MATHEMATIQUES. Serie D

PROPOSITION DE CORRECTION

EXERCICE 1.

1. a) Résolvons dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = -23 \\ 2x + 3y - z = -4 \\ 5x - y + 2z = -13 \end{cases}$$

Après réduction; on a

$$x = \frac{14}{9}; y = -7; z = \frac{-125}{9}$$

1. b) Déduisons la solution

Poseons $x = x + y + z = x + y$

et $z = xy + z$ (0,75) et :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = -23 \quad (*) \\ 2x + 3y - z = -4 \\ 5x - y + 2z = -13 \end{cases}$$

Après la question 1a)

$$x = \frac{14}{9}; y = -7; z = \frac{-125}{9}$$

$$\begin{cases} x + y = 14/9 \quad (i) \\ xy = -7 \quad (ii) \\ xyz = -125/9 \quad (iii) \end{cases}$$

(1) et (ii) donnent l'équation $u^2 - \frac{14}{9}u - 7 = 0$

$\Rightarrow 9u^2 - 14u - 63 = 0 \quad (**)$

$A = b^2 - 4ac = 2404$; donc

$(**) \text{ admet 2 solutions}$

$u = \frac{7-8\sqrt{154}}{9}$ ou $u = \frac{7+8\sqrt{154}}{9}$

Comme $xy = -7 \Rightarrow z = \frac{9}{63}$

$z = \left(\frac{14}{9}, \frac{125}{63}, \left(\frac{0,75}{63} \right), \left(\frac{125}{63} \right) \right)$

2. a) calculons la dérivée

de $u \mid u(x) = \ln(1+25x)$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$u'(x) = \frac{(1+25x)^{-1}}{1+25x} = \frac{1}{(1+25x)^2}$

$A = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+25x} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+25x)]_0^{\pi/2}$

$A = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}$ 0,5

c. Déduisons la valeur de B

$A = \ln \sqrt{3}$ et $A+B=1$;

donc $B = 1 - \ln \sqrt{3}$ 0,1

Exercice 2)

$u_0 = 2$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

a. Montrons que (u_n) est

monotone par 1.

Par récurrence; on a

$u_0 \geq 1$ et $u_0 = 2$ 0,25

Supposons que $u_{n-1} \geq 1$

pour $n \in \mathbb{N}$; on aura

$\sqrt{u_{n-1}} \geq 1$ 0,5 donc $u_n \geq 1$

correctement. fin; $u_n \geq 1$

b. Montrons que (u_n) est

décroissante

$u_{n+1} = \sqrt{u_n} < u_n$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n} < u_n$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n} < u_n$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n} < u_n$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n} < u_n$

AMEM: $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n}$ (0,25) $\ln(n+1) - \ln n$
 or $\ln 30 - \ln 29 \approx 0$ donc

$\ln(n+1) - \ln n \leq 0 \Rightarrow \ln(n+1) \leq \ln n$ (0,25)
 (un) not décroissante

c. Montrons que $\ln(n)$ converge
 et qu'elle a une limite

un) est décroissante et
 minorée; donc elle converge
 vers une limite et
 notation de $f(x) = x$
 $\Rightarrow n \leq x \Rightarrow x^2 \leq x$
 $\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$ (0,25)
 or $x = 1$; donc $x = 1$

4. on donne $P(x) = x^3 - 7x^2 + 9$

a. vérifions que -1 est une
 racine de P (0,5)
 $P(-1) = -1 - 7 + 9 = 1 \neq 0$
 donc -1 n'est pas racine

b. déterminons a, b et c
 $P(x) = (x+1)(x^2+bx+c)$

exercice 2

a. $a = 8$; $b = -9$ et $c = 9$ (0,25)
 c. Résolvons dans $\mathbb{R}$: $P(x) = 0$ (0,25)

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0$ ou $x^3 - 9x^2 + 9 = 0$

$a = b^2 - 4ac = 81 - 80 = 1$

$x_1 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4}$; $x_2 = \frac{12}{4} = 3$

$S = \{-1, \frac{3}{2}, 3\}$ (0,25)

d. déterminons dans $\mathbb{R}$: les

solutions de l'inéquation

(I_1) $x^3 - 9x^2 + 9 < 0$

• Constante sur $x: x > 0$

• Inéquation $x^3 - 9x^2 + 9 < 0$

après changement de

variable $x = 1/x$ ou

pour solution $x = -1$ ou

$x = 3$ ou $x = 3/2$ (0,25)

• $\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

• $\ln x = 3/2 \Rightarrow x = e^{3/2}$

• $\ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$

• Tableau de signes

x	0	e^{-1}	$e^{3/2}$	e^3	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+	0	+

$S =]0; e^{-1}[\cup]e, e^3[$ (0,5)

Exercice 3

$z_1 = b + ai$; $z_2 = d + bi$

$z_3 = b + di$; $z_4 = d + ci$

1. Trouvons une relation

entre a et d

$z_1 = z_3 \Leftrightarrow b + ai = b + di$ (0,5)
 donc on a bien $a = d$

2. déterminons z_1, z_2, z_3, z_4

$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -6 \quad (1) \\ 3z_1 + 2z_2 + z_4 = -3 + 5i \quad (2) \end{cases}$

• On va résoudre (1), on a

$b + d = -3$

$a + b + c + d = 0$

ou en notation (2) on a

$b + d = -3$

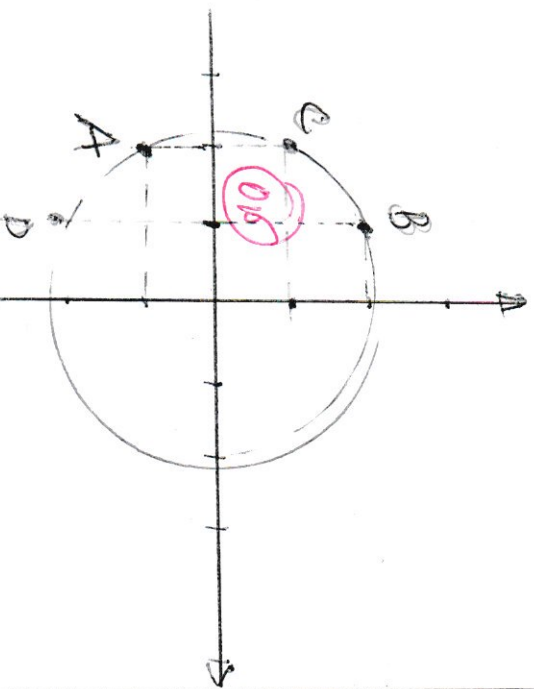
$3a + 2b + c = 5$

D'ou le systeme

$$\begin{cases} b+d = -3 \\ a+c = 3 \\ 3a+2b+c = 5 \\ a = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -1+2i \\ z_2 &= -2-i \\ z_3 &= -1-2i \\ z_4 &= -2+i \end{aligned}$$

2. a) Placer A; B; C et D



b) verifier que $|z_1| = |z_2|$

$$|z_1| = |-1+2i| = \sqrt{5}$$

$$|z_2| = |-2-i| = \sqrt{5}$$

$$\text{done } |z_1| = |z_2|$$

$$\frac{z_B}{z_A} = -i \text{ et } \frac{z_C}{z_D} = -i$$

done $\angle = \arg(-i) = -\pi/2$

c. Montrer que A; B; C et D

sont sur une même cercle

$$OA = OB = OC = OD = \sqrt{5}$$

done A, B, C, D $\in \mathcal{C}(0, \sqrt{5})$

Exercice 4

a) calculer le coefficient

de corrélation

mean

$$\bar{x} = 3.3; \quad \bar{y} = 2.67$$

$$\bar{x} = 3.3; \quad \bar{y} = 2.67$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{6} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16.11$$

$$\sigma = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{xy}} = 0.92$$

$$\sigma = 0.92$$

0.92, donc les corrélations sont fortes et les variables sont liées

b) écriture de l'équation de la droite

$$y - \bar{y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

$$\Rightarrow y - 2.67 = 0.6 (x - 3.3)$$

$$\Rightarrow y = 0.6x - 4.2$$

1. c) combien faut-on

ajouter la production

de 60.000 litres ?

Si nous prenons $x = 60$

$$y = 0.6 \times 60 - 4.2 = 31.8$$

$$31.800 \text{ FCFA}$$

2. a) vérifier que $u(x) =$

est une solution

de (E)

$$u(x) = 2x^2 e^x$$

$$u'(x) = (4x + 2) e^x$$

$$u''(x) = (4 + 4x + 2) e^x$$

$$u''(x) - 2u'(x) + u(x) = 4e^x$$

done u est solution de

2. b) on pose $z = 4 - u$

- Montrons que a est solution de (E)ssi $2a + a(1) = 0$
 (E0): $y'' - 2y' + y = 0$
 2 solutions de (E0)
 $\Leftrightarrow 2'' - 2 \cdot 2' + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow 0'' - 0'' - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$
 $\Leftrightarrow 0'' - 2 \cdot 0 + 0 = 0 - 2 \cdot 0 + 0$
 $\Leftrightarrow 0'' - 2 \cdot 0 + 0 = 0 - 2 \cdot 0 + 0$
 $\Leftrightarrow 0'' - 2 \cdot 0 + 0 = 0 - 2 \cdot 0 + 0$
 $\Rightarrow a$ est solution de (E)

c. Recherchons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E0): $y'' - 2y' + y = 0$
 équation caractéristique: $r^2 - 2r + 1 = 0$
 qui admet une solution double. La solution de (E0)

Soit $a(x) = (ax+b)e^x$
 0,701
 a. déterminons la solution de (E) et celle qui passe par 0 et dont la tangente est perpendiculaire à $y = \frac{1}{3}x$
 la solution de (E) est

tel que
 $a(x) = (ax+b)e^x$
 $= (2x^2 + ax + b)e^x$

or $a(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$
 ie $a(x) = (2x^2 + ax)e^x$
 or $a'(0) = -3$ et
 $a'(x) = (4x + a + 2x^2 + ax)e^x$
 $a'(0) = -3 \Rightarrow a = -3$
 $a(x) = (2x^2 - 3x)e^x$