CORRECTION CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE (D, E, F, TI, GCR)

EXERCICE 1 :

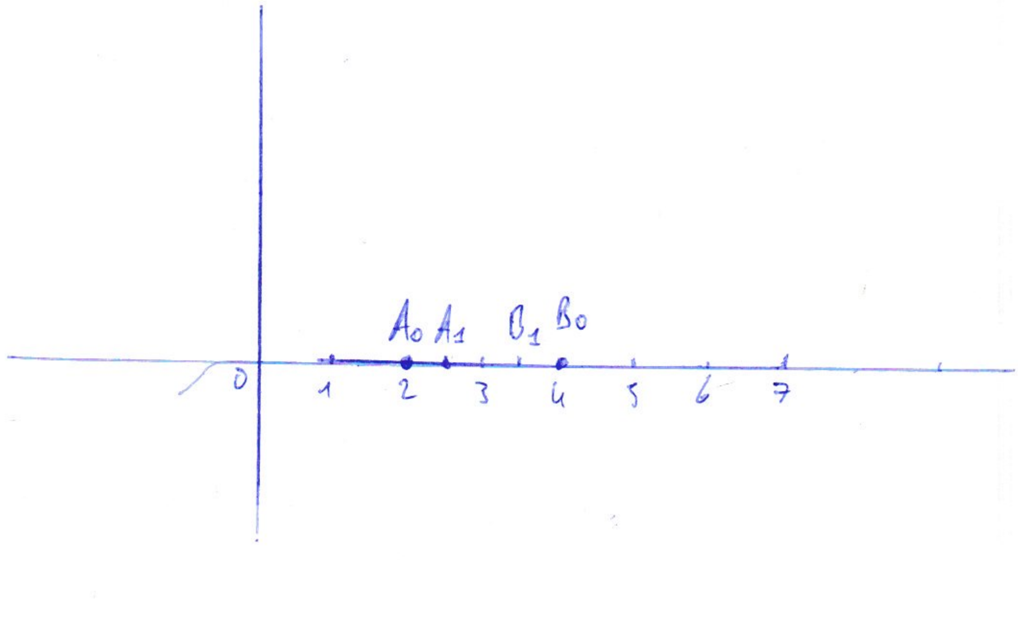
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_0 = 2 \\ b_0 = 4 \end{matrix}$$

1) Plaçons A_0, A_1, B_0 et B_1 :

$$a_1 = \frac{1}{4}(a_0 + 3b_0) = \frac{1}{4}(2 + 3 \times 4) = \frac{7}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{4}(3a_0 + b_0) = \frac{1}{4}(3 \times 2 + 4) = \frac{5}{2}$$

$A_0(2;0)$ $B_0(4;0)$ $A_1\left(\frac{7}{2};0\right)$ $B_1\left(\frac{5}{2};0\right)$



2) a) Démontrons que (U_n) est constante :

$$U_{n+1} - U_n = a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n$$
$$= \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n + \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n - a_n - b_n$$
$$= 0$$

D'où (U_n) est constante.

b) Déduisons :

$$I = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{U_n}{2}$$

Or (U_n) est constante $\Rightarrow U_n = a_0 + b_0 = 6$

$$\Rightarrow I = \frac{6}{2} = 3$$

3) a) Mq (V_n) géométrique et convergente :

* géométrique

$$V_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$$
$$= \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n - \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{4}b_n$$
$$= -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$$
$$= -\frac{1}{2}(a_n - b_n)$$
$$V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = -2$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$

②

* Convergence :

(V_n) géométrique $\Rightarrow$ $V_n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$

D'où (V_n) est convergente.

b) On peut dire que la distance $A_n B_n$ tend vers 0.

c) Exprimons a_n et b_n :

$$\begin{cases} a_n + b_n = 6 \\ a_n - b_n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $a_n = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = 3$

$b_n = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = 3$

EXERCICE 2 :

$P(z) = iz^3 - (1+3i)z^2 + (-2+7i)z + 5-i$

1) Calculons $P(i)$:

$P(i) = i(i)^3 + (1+3i) + (-2+7i)i + 5-i$

$= 1 + 1 + 3i - 2i - 7 + 5 - i$

$= 0$

2) Ecrivons $P(z)$ sous forme d'un produit de facteurs :

$$
\begin{array}{l|l}
iz^3 - (1+3i)z^2 + (-2+7i)z + 5 - i & z - i \\
\hline
-iz^3 - z^2 & iz^2 - (2+3i)z + (1+5i) \\
\quad (-2-3i)z^2 & \\
\quad (2+3i)z^2 - (-3+2i)z & \\
\qquad (1+5i)z + 5 - i & \\
\qquad -(1+5i)z - 5 + i & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ $P(z) = (z-i)\left(iz^2 - (2+3i)z + (1+5i)\right)$

3) Resolvons dans $\mathbb{C}$:

$$iz^2 - (2+3i)z + (1+5i) = 0$$

$$\Delta = (2+3i)^2 - 4i(1+5i)$$
$$= 4 + 12i - 9 \cancel{+40} - 4i + 20$$
$$= \cancel{20}\ 15 + 8i$$

Trouvons les racines carrées

Soit $\sqrt{\Delta} = a + ib$.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 17 \\ a^2 - b^2 = 15 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 17 \\ a^2 - b^2 = 15 \\ ab = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $a^2 = 16$ $\Rightarrow$ $a = 4$ ou $a = -4$

$\Rightarrow$ $b^2 = 1$ $\Rightarrow$ $b = 1$ ou $b = -1$

$\Rightarrow$ $\sqrt{\Delta} = 4 + i$ ou $\sqrt{\Delta} = -4 - i$

3 donc $z_1 = \frac{2+3i+4+i}{2i} = \frac{3+2i}{i} = 2-3i$

$z_2 = \frac{2+3i-4-i}{2i} = \frac{-1+i}{i} = 1+i$

$S_{\mathbb{C}} = \{2-3i, 1+i\}$

* Solutions de $P(z) = 0$:

$P(z) = (z-i)(z-2+3i)(z-1-i) = 0$

$\Rightarrow \quad z_1 = i \qquad z_2 = 2-3i \qquad z_3 = 1+i$

4) $z' = (1+i)z + 2-3i$

a) Nature et éléments caractéristiques de F:

b) Déterminons l'ensemble $(\mathcal{E})$:

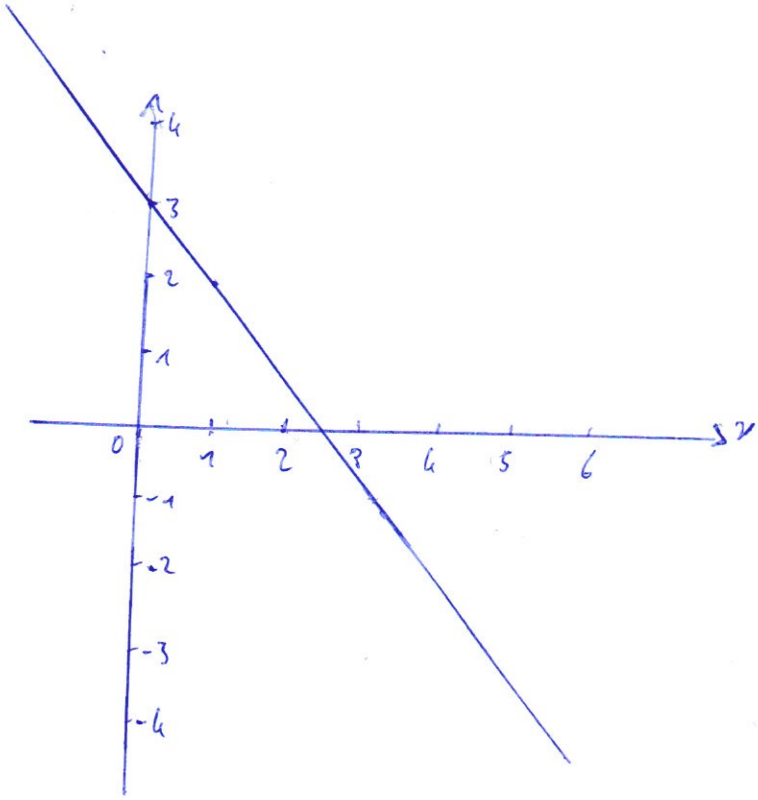
$z = a + ib$

$z' = (1+i)(a+ib) + 2 - 3i$

$= a + ib + ia - b + 2 - 3i$

$= a - b + 2 + i(a + b - 3)$

z' reel $\Rightarrow$ $a + b - 3 = 0$ (droite)



Problème :

$$g(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$$

1) Variations de g :

- $D_g = [0 ; +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

4 $\cdot \ \forall x \in [0 ; +\infty[,$

$$g'(x) = \frac{(3x^2+3)(x^2+1) - (2x)(x^3+3x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 + 3x^2 + 3 - 2x^4 - 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^4 + 3}{(x^2+1)^2} > 0$$

· Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) Vérifions :

$$g(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x(x^2+1+2)}{x^2+1}$$

$$= x\,\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1}$$

$$g(x) = x + \frac{2x}{x^2+1}$$

• Déduisons (Δ) asymptote

$$\lim_{x \to \infty} \left(g(x) - y \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= 0$$

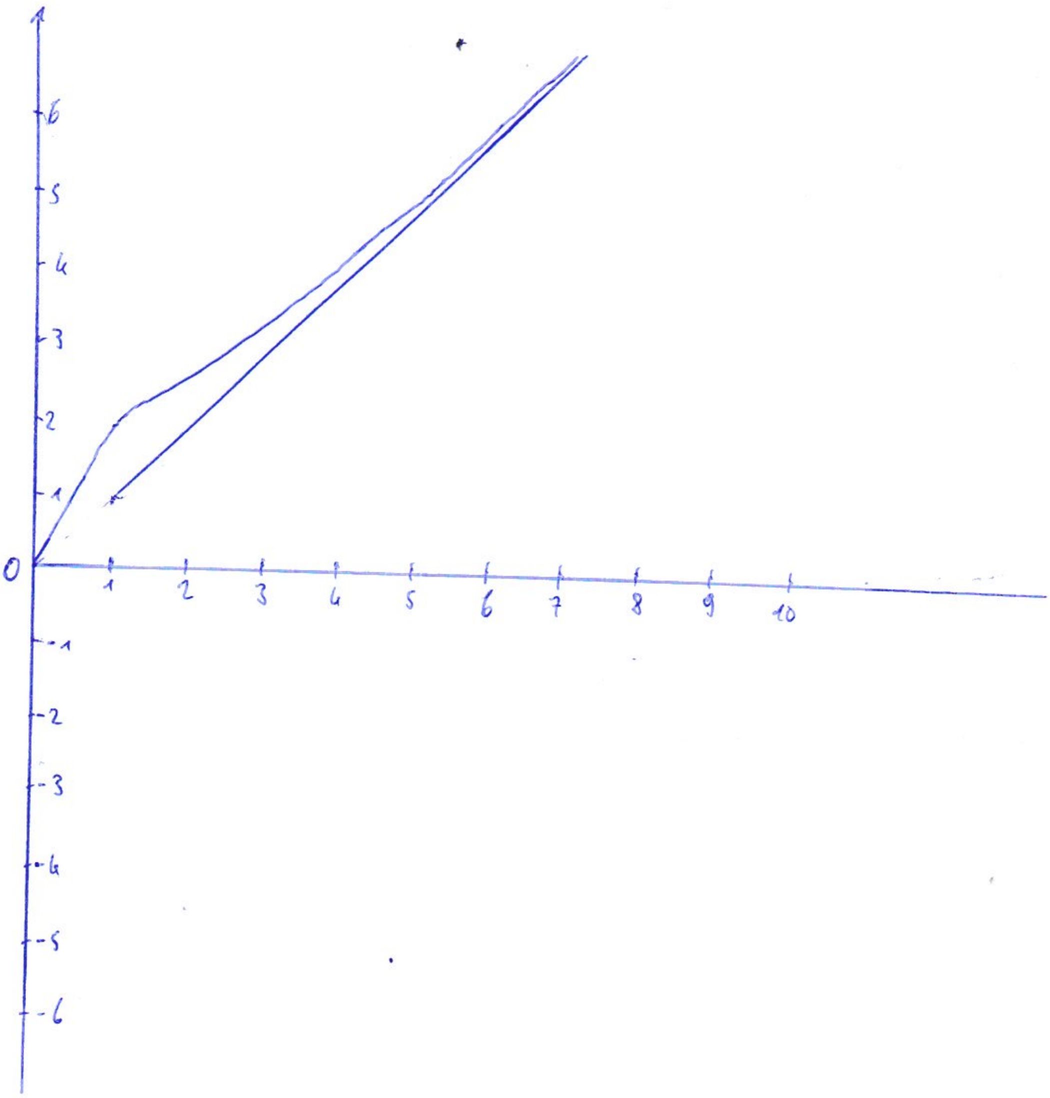
D'où $(\Delta) : y = x$ est asymptote

• Position de (C) par rapport à (Δ) :

$$g(x) - y = \frac{2x}{x^2+1} > 0 \quad \forall x \in [0 ; +\infty[$$

Donc sur $[0 ; +\infty[$, (C) est au dessus de (Δ).

3) Construisons (C) et (Δ) :



(5) 4) Calculons I :

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

$$= \left[\ln|x^2+1|\right]_0^{\alpha}$$

$$= \left[\ln(x^2+1)\right]_0^{\alpha}$$

$$I = \ln(\alpha^2+1)$$

5) Aire en fonction de α :

$$A = \int_0^{\alpha} g(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\alpha} x + \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha} + \ln(\alpha^2+1)$$

$$A = \frac{1}{2}\alpha^2 + \ln(\alpha^2+1)$$

6) a) étudions f :

$$f(x) = \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2}$$

- $D_f = [0 ; +\infty[$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \cancel{\frac{x}{2}} -\infty$$

b) Mq $f(x)=0$ admet une solution unique :

- f est continu sur $[0;+\infty[$ donc sur $[1;10]$
- $\forall x \in [1;10]$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - x$

$$= \frac{2x - x^3 - x}{x^2+1}$$

$$= \frac{-x^3 - x}{x^2+1}$$

$$= \frac{-x(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= -x < 0 \quad \text{sur } [1;10]$$

Donc f est monotone

- ~~$0 \in [0;]-\infty; 0]$~~ $0 \in [f(10); f(1)]$

D'où $f(x)=0$ admet une solution unique notée α :

* Encadrement :

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(\alpha)$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-

α	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(\alpha)$	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-

α	1,5	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,6
$f(\alpha)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-

D'où $1{,}58 \leq \alpha \leq 1{,}59$

6 c) Mq $\ln(\alpha^2+1) = \frac{\alpha^2}{2}$

α solution de $f(x) = 0$

$\Rightarrow \ln(\alpha^2+1) - \frac{\alpha^2}{2} = 0$

$\Rightarrow \ln(\alpha^2+1) = \frac{\alpha^2}{2}$