# CORRECTION CONCOURS D'ENTREE SERIE C :

## EXERCICE 1 :

1) Mq 1999 est premier :

$\sqrt{1999} = 44,7$

Entre 2 et 44, aucun nombre ne divise 1999.

D'où 1999 est premier

2) Trouvons a et b :

$a^2 - b^2 = 47976$

Décomposition en produits de facteurs premiers :

| | |
|---|---|
| ~~47976~~ | ~~2~~ |
| ~~23988~~ | ~~11994~~ |
| ~~5997~~ | ~~2~~ |

| | |
|---|---|
| 47976 | 2 |
| 23988 | 2 |
| 11994 | 2 |
| 5997 | 3 |
| 1999 | 1999 |
| 1 | |

Donc $47976 = 2^3 \times 3 \times 1999$

Donc $(a-b)(a+b) = 47976$

Posons $x = a - b$

$y = a + b$

Prenons $x = 2$ et $y = 1999 \times 3 \times 2^2 = 23988$

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 23988 \end{cases}$$

$a = 11995$

$b = 11993$

3) a) Mq toute solution $x$ divise $11994$:

$(E)$: $x^2 - Sx + 11994 = 0$

$\Rightarrow x^2 - Sx = -11994$

$\Rightarrow x(x - S) = -11994$

$\Rightarrow x$ divise $-11994$

$\Rightarrow x$ divise $11994$

b) Trouvons $S$:

3 solution de $(E) \Rightarrow 3^2 - 3S + 11994 = 0$

$\Rightarrow S = 4001$

* Trouvons l'autre solution :

$x^2 - 4001x + 11994 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 3995$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{4001 - 3995}{2} = 3$ $\qquad x_2 = \dfrac{4001 + 3995}{2} = 3998$

c) Valeurs de $S$:

$\Delta = S^2 - 47976 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow S^2 - k^2 = 47976$

$\Rightarrow S = 11995$

$k = 11993$

(2)

resolvons (E):

$\Delta$ :

$$x_1 = \frac{11995 - 11993}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{11995 + 11993}{2} = 11994$$

EXERCICE 2 :

1) Déterminons $Re[f(z)]$ et $Im[f(z)]$

$$f(z) = \frac{z}{3-2z} \qquad \bar{z}$$

Posons $z = a + ib$

$$f(z) = \frac{a+ib}{3-2a-2ib}$$

$$= \frac{(a+ib)(3-2a+2ib)}{(3-2a)^2 + 4b^2}$$

$$= \frac{3a - 2a^2 + i2ab + 3ib - 2iab - 2b^2}{(3-2a)^2 + 4b^2}$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{3a - 2(a^2+b^2)}{(3-2a)^2 + 4b^2}}_{Re} + i \underbrace{\frac{3b}{(3-2a)^2 + 4b^2}}_{Im}$$

2) Ensemble de points :

* f reel

f reel $\Rightarrow \dfrac{3b}{(3-2a)^2 + 4b^2} = 0 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow$ l'ensemble des points est l'axe des abcisses

* $f$ imaginaire pur :

$f$ imaginaire pur $\Rightarrow \dfrac{3a-2(a^2+b^2)}{(3-2a)^2+4b^2} = 0$

$\Rightarrow 2a^2+2b^2-3a = 0$

$\Rightarrow a^2+b^2-\frac{3}{2}a = 0$

$\Rightarrow \left(a-\frac{3}{4}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{4};0\right)$ et de rayon $r = \frac{3}{4}$

3) Trouvons $w_1$ et $w_2$ :

$f(z) = z \Rightarrow \dfrac{z}{3-2z} = z$

$\Rightarrow -2z^2+3z = z$

$\Rightarrow -2z^2+2z = 0$

$\Rightarrow z(-z+1) = 0$

$\Rightarrow z = 0$ ou $z = 1$

$\Rightarrow w_1 = 1$ et $w_2 = 0$

II- 1) Valeurs de $z_0$

Suite stationnaire $\Rightarrow f(z_0) = z_0$

$\Rightarrow z_0 = 0$ ou $z_0 = 1$

2) Exprimons le rapport :

$$\frac{\frac{z}{3-2z}-1}{\frac{z}{3-2z}} = \alpha\frac{z-1}{z} \Rightarrow \frac{-3+3z}{z} = \alpha\frac{z-1}{z}$$

$\Rightarrow -3(z-1) = \alpha(z-1)$

$\Rightarrow \alpha = -3$

D'où $\dfrac{z-w_1}{z-w_2} = -3\dfrac{z-w_1}{z-w_2}$

3 3) Limite de la suite réelle :

III - (

4

# EXERCICE 3:

$$h(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$$

1) Sens de variation de h:

* $D_h = ]0 ; +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 0$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

• $\forall x \in ]0 ; +\infty[$,

$$h'(x) = \frac{e^x}{x} > 0 \quad \forall x \in ]0 ; +\infty[$$

• Tableau de variation:

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2) a) Mq $\forall x \in ]0 ; 1]$, $h(x) \leq \ln(x)$

On a $\forall x \in ]0 ; 1]$, $\forall t \in [1 ; x]$,

$\frac{e^t}{t} \geq 0$

$\Rightarrow \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt \geq 0$ car $x \in ]0 ; 1]$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \leq 0$

Or $\forall x \in ]0 ; 1]$,

$h(x) \leq 0 \leq \ln x \leq 1$

$\Rightarrow h(x) \leq \ln x$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$

3) a) Sens de variation de $g$ :

* $D_g = ]0 ; +\infty[$

* $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = +\infty$

* $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$

* $\forall x \in ]0;+\infty[$ , $g'(t) = 1 - \frac{2}{t}$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{t} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{2}{t} = 1$$
$$\Rightarrow t = 2$$

* Tableau de variation :

| $t$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2-2\ln 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

* Mq $\forall t > 0$, $t \geq 2 \ln t$

$\forall t \in ]0;+\infty[$ , $g(t) \geq 0$ (Tableau de variation)

$$\Rightarrow t - 2\ln t \geq 0$$
$$\Rightarrow t \geq 2 \ln t$$

(5) * Déduisons :

$t \geq 2\ln t$

$\Rightarrow t \geq \ln(t^2)$

$\Rightarrow e^t \geq e^{\ln(t^2)}$

$\Rightarrow e^t \geq t^2$

b) Mq $\forall x \geq e$, $\int_e^x \frac{e^t}{t}\,dt \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$

$e^t \geq t^2 \Rightarrow \frac{e^t}{t} \geq t$

$\Rightarrow \int_e^x \frac{e^t}{t}\,dt \geq \left[\frac{1}{2}t^2\right]_e^x$

$\Rightarrow \int_e^x \frac{e^t}{t}\,dt \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$

c) Déduisons en :

$h(x) \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$

On a $\int_e^x \frac{e^t}{t}\,dt \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$

Or $h(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$

$= \int_1^e \frac{e^t}{t}\,dt + \int_e^x \frac{e^t}{t}\,dt$

avec $\frac{e^t}{t} \geq 0$

$\Rightarrow \int_1^e \frac{e^t}{t}\,dt \geq 0$

D'où $\int_1^e \frac{e^t}{t}\,dt + \int_e^x \frac{e^t}{t}\,dt \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$

$\Rightarrow h(x) \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$

d) limite de $h(x)$ :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(x^2 - e^2) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

5) Limite de $\frac{h(x)}{x}$ :

On a $h(x) \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$

$\Rightarrow \frac{h(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\frac{(x^2-e^2)}{x}$

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\frac{(x^2-e^2)}{x} = +\infty$

Donc Branche parabolique de direction (OY)

6) Eq de la tangente $(\Delta)$ :

$y = h'(1)(x-1) + h(1)$

$\Rightarrow y = e^1(x-1)$

7) Courbe (c)