TOUTES SERIES
MATHEMATIQUES
Durée : 2 Heures

Yaoundé le 14 mai 2025

Concours d'entrée en première année
HAUTES ETUDES DE COMMERCE

EXERCICE 1 (5 POINTS)

On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \end{cases}$$

On note (Δ) l'axe de repère $(O; i)$. Pour tout entier naturel, on désigne par A_n et B_n les points de (Δ) d'abscisses respectives a_n et b_n.

1- Placer les points A_0, B_0, A_1 et B_1 sur l'axe (Δ). **1,00pt**

2- (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n + b_n$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est constante. **0,50pt**

b) En déduire que pour tout entier naturel n, les segments $[A_nB_n]$ et $[A_{n+1}B_{n+1}]$ ont le même milieu I dont on précisera l'abscisse. **1,00pt**

3- (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - b_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et convergente. **1,00pt**

b) Que peut-on dire de la distance A_nB_n lorsque n tend vers $+\infty$? **0,50pt**

4- Exprimer a_n et b_n en fonction de n, puis démontrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite. **1,00pt**

EXERCICE 2 (5,5 POINTS)

On considère le polynôme complexe p défini par :

$$p(z) = iz^3 - (1+3i)z^2 + (-2+7i)z + 5 - i$$

1- Calculer $p(i)$. **0,50pt**

2- Ecrire $p(z)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs. **1,00pt**

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 - (2+3i)z + 1 + 5i = 0$. En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$. **1,50pt**

4- On considère l'application F du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1+i)z + 2 - 3i$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F. **1,00pt**

b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que z' soit un réel. **1,50pt**

TOUTES SERIES
MATHEMATIQUES
Durée : 2 Heures

PROBLEME (09,5 POINTS)

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) (unité graphique : $4cm$), la courbe (C) de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+1}$; la droite $(\triangle)$ d'équation $y = x$ et la droite (∇) d'équation $x = \alpha$ avec $1 \leq \alpha \leq 10$.

1- Etudier les variations de la fonction g. **1,00pt**

2- Vérifier que $g(x) = x + \frac{2x}{x^2+1}$ et en déduire que la droite $(\triangle)$ est asymptote à la courbe (C), étudier ensuite la position de (C) par rapport à $(\triangle)$. **1,00pt**

3- Construire (C) et $(\triangle)$ dans le repère orthonormé (O, i, j). **1,00pt**

On s'intéresse à la partie (P) du plan délimité par la courbe (C), et les droites $(\triangle)$ et (∇); et à la partie (T) délimitée par l'axe des abscisses, et les droites $(\triangle)$ et (∇). La réunion de (P) et (T) représente à l'échelle $\frac{1}{50}$ème la voile d'un bateau. Ces deux parties exigent des voiles différentes, mais doivent avoir la même aire. Le but du problème est de choisir le nombre α de telle sorte que les aires des parties (P) et (T) soient égales.

4- Calculer en fonction de α l'intégrale $I = \int_0^\alpha \frac{2x}{x^2+1} dx$. **1,00pt**

5- Calculer en fonction de α, l'aire en cm^2 du domaine délimité par les courbes (C) et (∇),et l'axe des abscisses. **1,00pt**

6- Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2}$.

a) Etudier la fonction f et dresser son tableau de variation. **1,50pt**

b) Montrer que sur l'intervalle $[1; 10]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. **1,00pt**

c) Démontrer que $\ln(\alpha^2 + 1) = \frac{\alpha^2}{2}$. **1,00pt**

d) En déduire que pour cette valeur α, les aires des parties (P) et (T) sont égales et indiquer la solution du problème posé. **1,00pt**

Fin de l'épreuve.