PRÉPAS INTERNATIONALES

SERIE **C**
MATHEMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 14 mai 2025

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. 4 POINTS

1- Montrer que 1999 est un nombre premier. **0,50pt**

2- Trouver deux entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 47976$. **1,00pt**

3- On considère l'équation (E): $x^2 - Sx + 11994 = 0$, dont l'inconnue est $x \in \mathbb{N}$ et S est un entier relatif.

a) Montrer que toute solution x de (E) divise 11994. **0,50pt**

b) Peut-on trouver S pour que 3 soit une solution de (E)? Si oui, déterminer l'autre solution. **0,50pt**

c) Pour quelles valeurs de S le discriminant de (E) est-il un carré parfait ? Résoudre l'équation (E). **1,50pt**

EXERCICE 2. 7,5 POINTS

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, u, v), on note I le point d'affixe 1. Soit f l'application de $\mathbb{C} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z}{3-2z}$.

I -

1- Déterminer Re$[f(z)]$ et Im$[f(z)]$. **0,50pt**

2- Déterminer les ensembles des points du plan dont les affixes sont transformés par f en un réel, et dont les affixes sont transformés par f en un imaginaire pur. **1,00pt**

3- Déterminer les nombres complexes ω_1 et ω_2 invariants par f. (On appelle ω_1 celui de plus petit module). **1,00pt**

II - Soit la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de z_0 complexe distinct de $\frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout entier naturel n.

1- Pour quelles valeurs de z_0 cette suite est-elle stationnaire ? Ces valeurs seront exclues dans la suite du problème. **0,50pt**

2- Soit $Z = f(z)$. Exprimer le rapport $\frac{Z-\omega_1}{Z-\omega_2}$ en fonction de $\frac{z-\omega_1}{z-\omega_2}$. **1,00pt**

3- En déduire la limite de la suite réelle de terme général $|z_n - \omega_1|$ quand n tend vers l'infini. **0,50pt**

III - Soit M_n le point d'affixe z_n, pour tout entier naturel n. Soit z_0 un nombre complexe non réel.

1- Montrer que, pour tout entier naturel n, M_n est sur le cercle circonscrit au triangle OM_0I. **1,00pt**

2-

a) Montrer que, pour tout entier naturel n: $\frac{OM_n}{IM_n} = k_n$ où k_n est une constante positive dépendant de M_0 et de n. **1,00pt**

b) Montrer que M_n est à l'intersection de deux cercles que l'on déterminera. **1,00pt**

EXERCICE 3. 8,5 POINTS

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1- Etudier le sens de variation de la fonction h. **1,00pt**

2-

a) Démontrer que pour tout $x \in]0;1]$, $h(x) \leq \ln(x)$. **1,00pt**

b) En déduire la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers 0. **0,50pt**

3- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = t - 2\ln(t)$

a) Après avoir étudié le sens de variation de g, montrer que pour tout réel t strictement positif, $t \geq 2\ln(t)$ et en déduire que $e^t \geq t^2$. **1,00pt**

b) Démontrer que pour tout réel $x \geq e$, $\int_e^x \frac{e^t}{t} dt \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$. **0,75pt**

c) En déduire que pour tout réel $x \geq e$, $h(x) \geq \frac{1}{2}(x^2 - e^2)$. **0,75pt**

d) En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$. **0,50pt**

4- Dresser le tableau de variation de la fonction h. **0,50pt**

5- Déterminer la limite de $\frac{h(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Préciser les branches infinies de la représentation graphique (C) de la fonction h. **1,00pt**

6- Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 1. **0,50pt**

7- Tracer la droite (D) dans un repère orthonormé puis donner l'allure de (C). **1,00pt**

Fin de l'épreuve.