SERIE **C**
MATHEMATIQUES
Durée : 2 Heures

Yaoundé le 25 juillet 2024

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. (06 POINTS)

1- On donne une famille d'entiers naturels N qui est déterminé par : $n = a \times b \times c$ où a, b et c sont des nombres premiers qui vérifient $a < b < c$ et $a + b = c$

Exemple : $286 = 2 \times 11 \times 13$ $avec$ $2 + 11 = 13$ donc $286 \in N$

a) Déterminer deux autres nombres de la famille de N **0,50pt**

b) On admet que $a = 2$, donner un encadrement de b de telle manière que si n_1 et n_2 sont deux entiers tels que $n_1 < n_2$, on ait $n_1 < n < n_2$ $avec$ $n \in N$ **1,00pt**

c) On donne les nombres entiers $n_1 = 6 \times 10^4$ et $n_2 = 8 \times 10^4$. Déterminer les entiers N correspondants **1,00pt**

2- Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A et B sont deux points d'affixes respectives 1 et $2i$. A tout point M d'affixe z avec $(z \neq 2i)$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-1}{z-2i}$.

a) Caractériser l'ensemble (L) des points M qui sont tels que z' est un réel. **0,50pt**

b) Déterminer l'ensemble (C1) des points M d'affixe z tels que : $|z'| = 2$. **1,00pt**

c) Déterminer l'ensemble (C2) des points M d'affixe z tels que : $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. **1,00pt**

d) Démontrer que (C1) et (C2) ont un unique point commun qu'on précisera. **1,00pt**

EXERCICE 2. (04 POINTS)

(O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) est un repère orthonormé de l'espace. On donne la droite (D) qui passe par le point $A(-1, 0, -2)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}(-2, 1, -3)$, puis le plan (P) d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 6 = 0$.

1- Déterminer le point d'intersection de la droite (D) et du plan (P). **0,50pt**

2- Donner une équation cartésienne du plan (Q) parallèle à (P) et passant par B(1,2,4). **0,50pt**

3- Déterminer le vecteur de translation qui transforme le plan (P) en (Q). **0,50pt**

4- Déterminer l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ du plan (P). **1,00pt**

5- On considère $S_{(D)}$ le demi-tour d'axe (D).

a) Déterminer la nature et une caractéristique de l'application $S_{(D)} o S_{(P)}$. **0,75pt**

b) Déterminer les coordonnées du point O' image de O par l'application $S_{(D)} o S_{(P)}$. **0,75pt**

PROBLEME. (11 POINTS)

NB **:** les parties A et B sont strictement indépendantes.

Partie A

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $f(x)=\frac{x^2+3}{x\sqrt{3}}$ et (Γ) est la courbe de f dans un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1,00pt**
2- Construire la courbe (Γ) en précisant ses différentes asymptotes. **1,00pt**
3- On donne les vecteurs $\vec{u}=\sqrt{3}\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=\vec{\imath}+\sqrt{3}\vec{\jmath}$.
   a) Montrer que le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ est orthogonal. **0,50pt**
   b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $\overrightarrow{(u,\vec{v})}$. **0,50pt**
   c) Déterminer une équation de (Γ) dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. **1,00pt**
   d) En déduire que (Γ) est une hyperbole dont on précisera les sommets et son excentricité. **1,00pt**

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n ; on donne l'intégrale $I_n=\int_1^e (lnx)^n dx$.

1- Vérifier à l'aide d'une intégration par parties que $I_1=1$. **1,00pt**
2-
   a) Démontrer pour tout entier $n\neq 0$ et pour $x\in\,]1,e[$ que $(lnx)^n-(lnx)^{n+1}>0$. **0,50pt**
   b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante. **0,50pt**
   c) Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$. **1,00pt**
   d) Déterminer les valeurs exactes de I_3 et I_4 en fonction de e. **1,00pt**
3- Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $0\leq I_n$ et $(n+1)I_n\leq e$. **1,00pt**
4- En déduire que la suite (I_n) converge et calculer sa limite. **1,00pt**

Fin de l'épreuve.