SERIE **C**
MATHEMATIQUES
Durée : 2 Heures

Yaoundé le 16 mai 2024

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. (05 POINTS)

1- Pour tout entier naturel non nul n, on donne les nombres suivants : $a_n = 4 \times 10^n - 1$, $b_n = 2 \times 10^n - 1$ et $c_n = 2 \times 10^n + 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et c_n sont des multiples de 3 et que b_n n'est pas divisible par 3. **0,75pt**

b) Vérifier que le nombre b_3 est un nombre premier. **0,50pt**

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_{2n} = b_n \times c_n$, puis en déduire la décomposition de a_6 en facteurs premiers. **0,75pt**

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2)$ et conclure. **1,00pt**

2- Soit E un espace vectoriel réel euclidien orienté, de dimension 3 et $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E. On considère trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ déterminés par : $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$, $\vec{v} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{\jmath} - 2\sqrt{2}\vec{k})$ et $\vec{w} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{\jmath} + 2\sqrt{2}\vec{k})$.

a) Démontrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de E. **1,25pt**

b) Cette base est-elle de sens direct ou de sens indirect ? justifiez votre réponse. **0,75pt**

EXERCICE 2. (05 POINTS)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A = (-1, 0, -1)$, $B = (0, 0, -2)$, $C = (1, 1, -4)$ et l'ensemble (Σ) des points $M = (x, y, z)$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$.

1- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). **1,00pt**

2- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Σ). **0,50pt**

3- Montrer que l'intersection de (Σ) avec le plan (ABC) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. **1,00pt**

4- On considère les droites $(D_1): \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$ et $(D_2): \begin{cases} x - y = 0 \\ z - x = 1 \end{cases}$. On désigne par S_1 le demi-tour d'axe la droite (D_1).

a) Les droites (D_1) et (D_2) sont-elles orthogonales ? Perpendiculaires ? Coplanaires ? Justifier votre réponse. **0,75pt**

b) Donner un vecteur directeur et un point de la perpendiculaire commune aux droites (D_1) et (D_2). **0,75pt**

c) Soit $M = (x, y, z)$ un point de l'espace et $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ l'image de M par l'application S_1. Exprimer x_1, y_1, z_1 en fonction de x, y et z. **1,00pt**

PROBLEME (10 POINTS)

On considère une fonction f définie sur $[0,1[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = xln(1-x) - xlnx + x \quad si \;\; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1- On donne la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x + lnx$.

a) Etudier la variation de g et dresser son tableau de variation. **1,00pt**

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]e^{-1}, \frac{1}{2}\right[$. **0,75pt**

c) Déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. **0,50pt**

2- Etude et construction de la courbe de f.

a) Etudier la continuité de f en 0. **0,50pt**

b) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x})$ et donner une interprétation géométrique. **0,50pt**

c) Calculer la dérivée $f'(x)$, puis établir que $f'(x) = -g(\frac{x}{1-x})$ pour $x \in [0,1[$.
1,00pt

d) En déduire que f' s'annule sur $]0,1[$ en une unique valeur β. **0,50pt**

e) Trouver une relation entre α et β, puis donner un encadrement exact de β.
0,75pt

f) Dresser le tableau de variation de f. **1,00pt**

g) Construire la courbe de f dans un repère orthonormé où l'unité graphique sur les axes est de 10 cm. **1,00pt**

3- Calcul d'aire

a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\frac{x}{1-x} = a + \frac{b}{1-x}$ **0,50pt**

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $I = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} xln(\frac{1-x}{x})dx$. **1,00pt**

c) Déduire de la question précédente l'aire A en cm^2 du domaine du plan compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = \frac{1}{2}$.
1,00pt

Fin de l'épreuve.