SERIE **D, E, F, TI, GCE**
MATHEMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 20 juillet 2023

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. 05 POINTS

1- On donne (u_n) une suite numérique qui est définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

a) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1. **0,75pt**

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. **0,50pt**

c) Justifier que (u_n) est convergente et déterminer sa limite. **0,75pt**

2- On donne le polynôme P défini par : $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9$.

a) Vérifier que -1 est une racine de P. **0,50pt**

b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$. **0,75pt**

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. **0,75pt**

d) En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'inéquation ci-dessous :
$(I_1) : 2ln^3x - 7ln^2x + 9 < 0$. **1,00pt**

EXERCICE 2. 05 POINTS

On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$

1- Montrer que les nombres complexes i et $-i$ sont des racines de P. **0,50pt**

2- Déterminer les nombres a, b et c tels que : $P(z) = (z^2+1)(az^2 + bz + c)$. **0,75pt**

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$. **1,00pt**

4- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectifs : $z_A = i$, $z_B = -i$, $z_C = -\sqrt{3} + 2i$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2i$.

a) Construire les points A, B, C et D (prendre 2 cm comme unité sur les axes). **1,00pt**

b) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[CD]$. **0,25pt**

c) Calculer les distances AI, BI et CI. **0,75pt**

d) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le rayon et le centre. **0,75pt**

SERIE **D, E, F, TI, GCE**
MATHEMATIQUES
Durée : 3 Heures

PROBLEME. 10 POINTS

(O, I, J) est un repère orthonormé où l'unité sur les axes est de 2cm. On considère la fonction f définie sur $D =]0,2[\cup]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{(x-2)^2}$ et (C_f) sa courbe représentative.

Partie A

1- On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - 2 - 2xlnx$.
   a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en 0. **0,50pt**
   b) Calculer la dérivée de g, étudier son signe et dresser son tableau de variation. **1,00pt**
   c) Déduire de la variation de g, le signe de $g(x)$. **0,50pt**
2- Etude de la variation de f et construction de sa courbe représentative.
   a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **0,75pt**
   b) Déterminer toutes les asymptotes à la courbe de f. **0,75pt**
   c) Démontrer que pour tout $x \in D, f(x) = \frac{g(x)}{x(x-2)^3}$. **0,75pt**
   d) Donner le signe de la dérivée $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. **1,25pt**
   e) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1. **0,50pt**
   f) Construire la courbe (C_f) et la droite (T). **1,00pt**

Partie B

On considère la fonction h définie sur $]2;\,+\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x(x-2)}$.

1- Déterminer les réels a et b tels que : $h(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}$ pour $x > 2$. **0,50pt**
2- En déduire une primitive H de h sur l'intervalle $]2;\,+\infty[$. **0,50pt**
3- Soit a un nombre réel tel que $a > 3$. $A(a)$ est l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction (C_f) et les droites d'équations $x = a$ et $x = 3$.
   a) Calculer en fonction de a, l'aire $A(a)$. **1,50pt**
   b) Calculer la limite de $A(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$. **0,50pt**

Fin de l'épreuve.