SERIE **C**
MATHEMATIQUES
Durée : 3 Heures

Yaoundé le 20 juillet 2023

Concours d'entrée en première année

EXERCICE 1. 05 POINTS

1- On considère le système de congruences (S) : $\begin{cases} a \equiv 6 \, mod(13) \\ a \equiv 4 \, mod(7) \end{cases}$ où a est un entier relatif

a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x - 13y = 2$. **1,00pt**

b) En utilisant la question précédente, déterminer les solutions de (S). **1,00pt**

c) Trouver toutes les solutions de (S) comprises entre 910 et 1050. **1,00pt**

2- On donne le nombre entier naturel $N = 1000x + 110y + z$ où x, y et z sont les chiffres de la numération décimale avec $x \neq 0$.

a) Donner l'écriture de N en base 10. **0,50pt**

b) En admettant que x est un multiple de 4, déterminer les valeurs de N qui sont divisibles par 9 et par 5. **1,50pt**

EXERCICE 2. 05 POINTS

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2 + 3i$, $z_B = -3$ et $z_C = 3 - 2i$.

1- Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$. **0,50pt**

2- Construire les points A, B et C dans ce plan. **0,75pt**

3- Construire les points P, Q et R tels que les triangles APB, BQC et ACR soient des triangles rectangles isocèles et de sens direct. **0,75pt**

4- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S_1 de centre B qui transforme P en A. **0,50pt**

5- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S_2 de centre C qui transforme A en R. **0,50pt**

6- On admet que la composée des 2 similitudes $S_2 o S_1$ est une rotation.

a) Déterminer l'angle de la rotation de $S_2 o S_1$. **0,50pt**

b) Déterminer les images de P et de I par $S_2 o S_1$. **0,50pt**

c) Déterminer l'expression complexe de la rotation $S_2 o S_1$. **0,50pt**

d) Donner en justifiant votre réponse, la nature du triangle IPR. **0,50pt**

SERIE **C**
MATHEMATIQUES
Durée : 3 Heures

PROBLEME. 10 POINTS

NB : Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie A

1- Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel $x > 0$, on ait : $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$. **0,75pt**

2- Soit $t \geq 1$, calculer en fonction de t l'intégrale : $I(t) = \int_1^t \frac{1}{x(x+1)^2}dx$. **0,75pt**

3- On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par : $F(t) = \int_1^t \frac{lnx}{(x+1)^3}dx$

a) Calculer $F(t)$ à l'aide d'une intégration par parties. **1,00pt**

b) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{4}$. **0,50pt**

Partie B

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $4y'' + 4y' + y = 0$. **0,50pt**

2- Déterminer la solution g de E telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. **1,00pt**

3- On considère la fonction f définie par $f(x) = x(1 + e^{-\frac{1}{2}x})$ et (C_f) est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{u}, \vec{v}$) d'unité 2 cm sur les axes

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. **0,50pt**

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote de la courbe de f au voisinage de $+\infty$. **0,50pt**

c) Calculer la limite en $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique. **0,50pt**

d) Etudier la variation de la fonction h définie par : $h(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - x + 2$ puis en déduire le signe de $h(x)$. **1,00pt**

e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{h(x)}{2e^{\frac{1}{2}x}}$. **0,50pt**

f) Dresser le tableau de variation de f. **0,50pt**

g) Construire la courbe de f. **1,00pt**

4- On considère que A est l'aire de la portion du plan délimitée par la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

a) Calculer la dérivée de la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = (-2x - 4)e^{\frac{-x}{2}}$. **0,50pt**

b) Calculer l'aire A en centimètre carré. **0,50pt**

Fin de l'épreuve.